

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung und Wiederholung	1
1.1	Nötige Vorkenntnisse	2
1.2	Funktionen	5
1.2.1	Definition und Eigenschaften	6
1.2.2	Formelsammlung – Funktionen	12
1.3	Ableitungen	13
1.3.1	Motivation und Beispiele	13
1.3.2	Ableitungsregeln	20
1.3.3	Zweite und höhere Ableitungen	26
1.3.4	Formelsammlung – Ableitungen	33
1.4	Integrale	34
1.4.1	Motivation und grundlegende Regeln	34
1.4.2	Rechenregeln für Integration	51
1.4.3	Anwendung in der Physik: Trennung der Variablen zum Lösen von Differentialgleichungen erster Ordnung	79
1.4.4	Formelsammlung Integrale	85
1.5	Komplexe Zahlen	88
1.5.1	Motivation und Grundregeln	89
1.5.2	Die Euler-Darstellung	93
1.5.3	Funktionen mit komplexen Zahlen	97
1.5.4	Formelsammlung – komplexe Zahlen	101
1.6	Vektoren in der analytischen Geometrie	102
1.6.1	Grundbegriffe und Grundregeln	102
1.6.2	Skalarprodukte	105
1.6.3	Kreuzprodukte	114
1.6.4	Zylinder-, Kugel- und Polarkoordinaten	118
1.6.5	Formelsammlung – Vektoren in analytischer Geometrie	126
2	Erste neue und grundlegende Konzepte	131
2.1	Hyperbolische Funktionen	132

2.1.1	Definition und Eigenschaften	132
2.1.2	Die Umkehrfunktionen	137
2.1.3	Das anschauliche Verständnis der hyperbolischen Funktionen	141
2.1.4	Formelsammlung – hyperbolische Funktionen	144
2.2	Induktive Beweise	145
2.2.1	Das allgemeine Verfahren der vollständigen Induktion	145
2.2.2	Einige weitere Beispiele zur vollständigen Induktion	147
2.2.3	Induktive Beweise – Formelsammlung	158
2.3	Die Gamma-Funktion	159
2.3.1	Definition und Eigenschaften	160
2.3.2	Die Stirling-Formel	162
2.3.3	Formelsammlung – Gamma-Funktion	163
2.4	Die Indexschreibweise	164
2.4.1	Die Einstein'sche Summenkonvention	164
2.4.2	Das Kronecker-Delta	166
2.4.3	Das Levi-Civita-Symbol	168
2.4.4	Formelsammlung – Indexschreibweise	173
2.5	Dirac-Delta- und Heaviside-Theta-Funktion	174
2.5.1	Definition und Motivation	174
2.5.2	Regeln zum Umgang mit der Dirac-Delta- und Heaviside-Theta-Funktion	178
2.5.3	Dirac-Delta- und Heaviside-Theta-Funktion – Formelsammlung	184
2.6	Lösen von Differentialgleichungen	185
2.6.1	Variation der Konstanten	186
2.6.2	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	190
2.6.3	Grundlegende Aspekte von Green'schen Funktionen	195
2.6.4	Vereinfachen von Differentialgleichungen durch asymptotisches Verhalten	202
2.6.5	Lösen von Differentialgleichungen – Formelsammlung	208
3	Der allgemeine Vektorbegriff im mathematischen Sinne	211
3.1	N -dimensionale reelle Vektoren im $\mathbb{R}^N$	212
3.2	N -dimensionale komplexe Vektoren im $\mathbb{C}^N$	216
3.3	Der allgemeine Vektorbegriff – Begriffe und Definition	220
3.3.1	Der Vektorraum	220
3.3.2	Normen auf Vektorräumen	222
3.3.3	Skalarprodukte auf Vektorräumen	224
3.3.4	Gram-Schmidt-Verfahren, Operatoren und der duale Raum	226

3.4	Beispiele zu allgemeinen Vektorräumen	236
3.4.1	Raum der quadratintegrablen Funktionen auf dem Intervall $[-1, 1]$	236
3.4.2	Raum der quadratintegrablen Funktionen auf dem Intervall $(-\infty, \infty)$	244
3.5	Formelsammlung – Verallgemeinerung des Vektorbegriffs im mathematischen Sinne	246
4	Reihenentwicklungen	249
4.1	Die Taylor-Entwicklung	250
4.1.1	Motivation und Definition	250
4.1.2	Konvergenz der Taylor-Reihe	254
4.1.3	Wichtige Taylor-Reihen	254
4.1.4	Verkettete Taylor-Reihen	259
4.1.5	Taylor-Reihe in führender Ordnung	262
4.1.6	Der Potenzreihenansatz zum Lösen von Differentialgleichungen	266
4.2	Die Laurent-Reihe	274
4.2.1	Definition	274
4.2.2	Einige Beispiele	275
4.3	Die Fourier-Reihe	278
4.3.1	Motivation und Definition	278
4.3.2	Komplexwertige Fourier-Reihen	283
4.3.3	Eigenschaften der Entwicklungskoeffizienten	285
4.3.4	Beispiele für Fourier-Reihen	289
4.3.5	Lösen inhomogener, linearer Differentialgleichungen	291
4.4	Legendre-Polynome	295
4.4.1	Motivation und definierende Eigenschaften	295
4.4.2	Orthogonalität der Legendre-Polynome	305
4.4.3	Entwicklung in Legendre-Polynomen	306
4.5	Kugelflächenfunktionen	308
4.5.1	Motivation und Definition	308
4.5.2	Anschauliches Verständnis und reelle Kugelflächenfunktionen	312
4.5.3	Entwicklung in Kugelflächenfunktionen und Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen	320
4.6	Formelsammlung – Reihenentwicklung	324
5	Komplexe Integrale	331
5.1	Komplexe Funktionen und Begrifflichkeiten	332
5.2	Komplexe Linienintegrale	335
5.3	Die Cauchy'sche Integralformel	339
5.4	Der Residuensatz	340

5.4.1	Motivation und Herleitung	340
5.4.2	Bestimmen der Residuen	343
5.4.3	Das Lemma von Jordan	345
5.5	Formelsammlung – komplexe Integrale	349
6	Fourier-Transformationen	351
6.1	Einführung der Fourier-Transformation	351
6.2	Konventionen und Regeln	353
6.3	Übertragung auf Ortskoordinaten und höhere Dimensionen	357
6.4	Beispiele für Fourier-Transformationen	359
6.5	Lösen von inhomogenen Differentialgleichungen	367
6.6	Formelsammlung – Fourier-Transformation	371
7	Matrizen	373
7.1	Definitionen und Rechenregeln	374
7.1.1	Motivation der Matrixform	374
7.1.2	Praktische Rechenregeln	378
7.2	Mathematische Strukturen mit Matrizen	414
7.2.1	Funktionen von Matrizen	414
7.2.2	Gruppen von Matrizen und Darstellungen von Gruppen	425
7.2.3	Lie-Gruppen und Lie-Algebren	429
7.3	Einige spezielle Matrizen­gruppen und ihre Algebren	437
7.3.1	Die Gruppe der Drehmatrizen $SO(3)$	437
7.3.2	Die Gruppe der komplexen Drehmatrizen $SU(n)$	443
7.4	Formelsammlung – Matrizen	454
8	Vektoranalysis	461
8.1	Skalar- und Vektorfelder	462
8.1.1	Definition und Beispiele	462
8.2	Ableitung von Feldern	464
8.3	Integrale von Feldern	468
8.3.1	Wegintegrale	469
8.3.2	Flächenintegrale	474
8.3.3	Volumenintegrale	483
8.3.4	Das Keilprodukt	486
8.3.5	Krummlinige Koordinatensysteme und die Jacobi-Matrix	490
8.3.6	Dirac-Delta in Volumenintegralen	499
8.4	Differentiale von Funktionen und Feldern	502
8.4.1	Geometrische Interpretation eines Differentials einer Funktion	502
8.4.2	Die Legendre-Transformation	506
8.5	Differentialoperatoren Gradient, Rotation und Divergenz	509
8.5.1	Motivation und Definition	509

8.5.2	Zweite Ableitungen	515
8.5.3	Produkt- und andere Rechenregeln	515
8.5.4	In krummlinigen Koordinaten	519
8.6	Integralsätze	534
8.6.1	Einleitung und Motivation	534
8.6.2	Der Satz von Gauß	535
8.6.3	Der Satz von Stokes	537
8.6.4	Der Gradientensatz	539
8.6.5	Der Satz vom wandernden d	541
8.6.6	Folgerungen aus den Integralsätzen	541
8.6.7	Verallgemeinerung in der flachen Raumzeit	543
8.6.8	Die Green'schen Integralsätze	544
8.6.9	Der Helmholtz'sche Zerlegungssatz	545
8.7	Formelsammlung – Vektoranalysis	551
9	Variationsrechnung	557
9.1	Funktionale und ihre Extrema	558
9.1.1	Die Euler-Lagrange-Gleichung	558
9.1.2	Erhaltungsgrößen	561
9.1.3	Variation unter Nebenbedingungen	562
9.2	Klassische Beispiele zur Variationsrechnung	563
9.2.1	Analytische Mechanik	563
9.2.2	Lichtbrechung	566
9.2.3	Schnellster Weg im Schwerfeld	570
9.2.4	Durchhängen einer Kette	573
9.2.5	Geodätengleichung auf Oberflächen	576
9.3	Nicht klassische Beispiele zur Variationsrechnung	578
9.3.1	Relativistische Verallgemeinerung des Lagrange-Formalismus und Feldtheorie	578
9.3.2	Geodätengleichung auf allgemeinen Oberflächen	582
9.4	Formelsammlung - Variationsrechnung	586
10	Vektoren und Tensoren im physikalischen Sinne	589
10.1	Transformationen	589
10.1.1	Arten von Transformationen	591
10.2	Skalare, Vektoren und Tensoren	594
10.2.1	Skalare	595
10.2.2	Vektoren	597
10.2.3	Kovariante, kontravariante und duale Objekte	598
10.2.4	Tensoren	601
10.2.5	Kovariante Ableitungen	603

10.3	Einige physikalische Transformationen	608
10.3.1	Drehungen um feste Winkel	608
10.3.2	Translationen	612
10.3.3	Isometrische Gruppe	614
10.3.4	Galilei-Transformationen	616
10.3.5	Lorentz-Transformationen	619
10.3.6	Raumspiegelung, Zeit- und Ladungsumkehr	631
10.4	Formelsammlung – Vektoren und Tensoren im physikalischen Sinne	636
11	Zusammenfassung wichtiger Funktionen und ihrer Eigenschaften	641
11.1	Monome, Polynome und gebrochen rationale Funktionen	641
11.1.1	Monome	642
11.1.2	Polynome	643
11.1.3	Gebrochen rationale Funktionen	644
11.2	Exponentialfunktionen	646
11.3	Logarithmen	648
11.4	Trigonometrische Funktionen	649
11.5	Hyperbolische Funktionen	653
11.6	Theta-Funktion	656
11.7	Dirac-Delta-Distribution	658
11.8	Gamma-Funktion	661
	Weiterführende Literatur	663
	Stichwortverzeichnis	665