

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in die Logik	5
1.1	Was ist eigentlich Logik?	5
1.1.1	Syllogistische Formulierungen und Aussagen	6
1.1.2	Der grundlegende Syllogismus	9
1.1.3	Syllogistische Modi	10
1.1.4	Logik und Metaphysik	14
1.1.5	Begriffslogik und Aussagenlogik	17
1.1.6	Kontraposition und doppelte Negation	19
1.1.7	Und was ist mathematische Logik?	20
1.2	Einführung in die mathematische Logik	21
1.2.1	Rechnen mit Wahrheitswerten: GEORGE BOOLE	21
1.2.2	Die axiomatische Methode	24
1.2.3	Eine Formelsprache	26
1.2.4	Syntax und Semantik	27
1.2.5	Logische Äquivalenz und logisches Konditional	30
1.2.6	Subjunktion und Bisubjunktion	31
1.3	Einführung in die Modallogik	32
1.3.1	Logik der möglichen Welten	32
1.3.2	Modaloperatoren	33
1.3.3	„Morgen findet eine Seeschlacht statt“	33
1.4	Einführung in die Quantenlogik	37
1.4.1	Zur Vorgeschichte von SCHRÖDINGERS Katze	38
1.4.2	Der Beitrag von EINSTEIN, PODOLSKY und ROSEN	40
1.4.3	SCHRÖDINGERS Katze und „Generalbeichte“	41
1.4.4	Historisches zum Begriff „Verschränkung“	42
1.4.5	Quantenmechanisch versus quanteninspiziert	43
1.5	Zitate in Originalsprache	45
2	Grundlegende mathematische Strukturen	49
2.1	Mengenlehre	51
2.1.1	Beschreibung von Mengen	51

2.1.2	Kardinalzahl	52
2.1.3	Rechnen mit Teilmengen	52
2.1.4	Die Potenzmenge einer Menge	54
2.1.5	Bezüge zur Logik	55
2.2	Relationen	55
2.2.1	Eine Relation ist eine Menge von Tupeln	55
2.2.2	Klassen zweistelliger Relationen	58
2.2.3	Bezüge zur Logik	61
2.3	Extremale Elemente	62
2.3.1	Beispiel und HASSE-Diagramm	62
2.3.2	Extremale Elemente, Extrema und Atome	63
2.3.3	Suprema und Infima	66
2.3.4	Bezüge zur Logik	69
2.4	Abbildungen und Operationen	71
2.4.1	Abbildungen	72
2.4.2	Operationen	73
2.4.3	Orthokomplementierung	73
2.4.4	Zweistellige Operationen	75
2.4.5	Bezüge zur Logik	79
2.5	Verbandsstrukturen mit Orthokomplementierung	81
2.5.1	Die Struktur Verband	82
2.5.2	Die Struktur orthokomplementärer Verband	86
2.5.3	Die DE MORGAN'schen Gesetze	86
2.5.4	Ergänzung zum orthokomplementären Verband	88
2.5.5	Bezüge zur Logik	89
2.6	Die Struktur BOOLE'scher Verband	90
2.6.1	Die Bestandteile der Struktur	91
2.6.2	Der Teilmengenverband einer Menge	92
2.6.3	Ein Binärkode für Teilmengen	93
2.6.4	Bezüge zur Logik	93
2.7	Die Struktur <i>orthomodularer Verband</i>	98
2.7.1	Unterstrukturen eines orthokomplementären Verbands	98
2.7.2	Bezüge zur Logik	103
2.7.3	Der Satz von MITTELSTAEDT	104
2.8	Endliche Wahrscheinlichkeitsrechnung	106
2.8.1	Ergebnismengen und Ereignisalgebren	107
2.8.2	Wahrscheinlichkeitsfunktion und -maß	108
2.8.3	Verbundwahrscheinlichkeiten	111
2.8.4	Logik und Wahrscheinlichkeit	114
3	Klassische Logiken	119
3.1	Aussagenlogik	120
3.1.1	Die Sprache der Aussagenlogik	120
3.1.2	Die Semiotik der Aussagenlogik	127
3.1.3	Logisches Schließen	130

3.1.4	Schaltalgebra und Logikgatter	135
3.1.5	Probabilistische Erweiterung	143
3.1.6	Probabilistisches Schließen	154
3.1.7	Ist SCHRÖDINGERS Katze tot?	159
3.2	Modallogik	160
3.2.1	Die Sprache der Modallogik	160
3.2.2	Die Semiotik der Modallogik	163
3.2.3	Logisches Schließen	168
3.2.4	Probabilistische Erweiterung	171
3.2.5	Probabilistisches Schließen	172
3.2.6	Ist SCHRÖDINGERS Katze tot?	172
3.3	Prädikatenlogik	175
3.3.1	Die Sprache der Prädikatenlogik	175
3.3.2	Die Semiotik der Prädikatenlogik	184
3.3.3	Logisches Schließen	186
3.3.4	Logikprogrammierung	189
3.3.5	Probabilistische Erweiterung	191
3.3.6	Probabilistisches Schließen	194
3.3.7	Ist SCHRÖDINGERS Katze tot?	195
3.4	Fuzzy-Logik	196
3.4.1	Die Sprache der Fuzzy-Logik	196
3.4.2	Ist SCHRÖDINGERS Katze tot?	199
3.5	Zitate in Originalsprache	200
4	Logik der Überlagerungen	201
4.1	Welt und Sachverhalte	201
4.2	Das Würfelbeispiel	202
4.2.1	Achsenparallele Sachverhalte	202
4.2.2	Eine Verbindung zur Aussagenlogik	204
4.2.3	Der BOOLE'sche Verband der achsenparallelen Sachverhalte	204
4.2.4	Weitere Verbindungen zur Aussagenlogik	205
4.2.5	Ein weiterer BOOLE'scher Verband im Würfelbeispiel .	207
4.2.6	Vereinigung der beiden BOOLE'schen Verbände	208
4.2.7	Verletzung der Distributivgesetze	209
4.2.8	Orthomodularität	209
4.2.9	HASSE-Diagramm des Unterverbands	211
4.3	Ein Anwendungsbeispiel	212
4.4	Das Sphärenbeispiel	214
4.4.1	Die Mengenfamilie $\mathcal{S}$ ist durchschnittsstabil	215
4.4.2	Orthokomplementierung	216
4.4.3	Die Verbandsstruktur	218
4.4.4	Orthomodularität	218
4.5	Das semantische Dreieck der Überlagerungslogik	220
4.6	Ist SCHRÖDINGERS Katze tot?	220

5	Lineare Algebra	223
5.1	Reelle und komplexe Zahlen	223
5.1.1	Punkte auf einer Geraden	223
5.1.2	Geometrische Addition reeller Zahlen	224
5.1.3	Geometrische Multiplikation reeller Zahlen	225
5.1.4	Die algebraische Struktur der reellen Zahlen	227
5.1.5	Quadratwurzeln nicht-negativer reeller Zahlen	229
5.1.6	Imaginäre Zahlen	229
5.1.7	Die komplexe Konjugation	231
5.2	Rechnen mit Matrizen	232
5.2.1	Addition und Multiplikation von Matrizen	233
5.2.2	Einige spezielle Matrizen	235
5.2.3	Operationen auf Matrizen	236
5.2.4	Der Koordinatenraum	237
5.2.5	Matrizen und lineare Abbildungen	240
5.3	Orthogonalprojektoren	243
5.3.1	Das Standardskalarprodukt	243
5.3.2	Untervektorräume	248
5.3.3	Eigenvektoren und Eigenwerte einer Matrix	252
5.3.4	Orthogonalprojektoren im Koordinatenraum	258
6	Logik der Orthogonalprojektoren	265
6.1	Der Begriff Skalarproduktraum	265
6.1.1	Ket-Ausdrücke und Koeffizientenabbildungen	266
6.1.2	Die algebraische Struktur Skalarproduktraum	267
6.1.3	Skalarproduktraum und Koordinatenraum	269
6.2	Untervektorräume eines Skalarproduktraums	273
6.2.1	Linearkombinationen	274
6.2.2	Dimensionstheorie	275
6.3	Lineare Operatoren im Skalarproduktraum	276
6.3.1	Ket-Bra-Ausdrücke	276
6.3.2	Adjungieren von Ket-Bra-Ausdrücken	279
6.3.3	Orthogonalprojektoren	281
6.4	Logik endlich-dimensionaler Untervektorräume	284
6.4.1	Algorithmen für logische Operationen	284
6.4.2	Distributivgesetze	294
6.4.3	Modulargesetz	296
6.4.4	Beziehungen zwischen algebraischen Verbandsbegriffen	296
6.4.5	Rechnen mit Orthogonalprojektoren	296
6.4.6	Charakterisierung BOOLE'scher Unterverbände	300
6.5	Projektionswahrscheinlichkeiten	303
6.5.1	Projizieren im Skalarproduktraum	304
6.5.2	Komposition und Verschränkung	309
6.5.3	Quanteninspirierte Logik	318
6.6	Klassische Logiken aus quantenlogischer Sicht	319

6.6.1	Aussagenlogik	320
6.6.2	Modallogik	323
6.6.3	Prädikatenlogik	325
7	Anwendungen in Datenbanken und Psychologie.....	327
7.1	Commuting Quantum Query Language.....	328
7.1.1	Die Logik der CQQL	328
7.1.2	Vereinfachung der Evaluierungsfunktion	329
7.1.3	Vergleich mit den Evaluierungen in anderen Logiken ..	334
7.2	Modellierung elementarer Datentypen	335
7.2.1	Motivierendes Beispiel	335
7.2.2	Elementare Datentypen	337
7.2.3	Orthogonale Datentypen	338
7.2.4	Nicht-orthogonale Datentypen	339
7.3	Modellierung komplexer Datentypen	347
7.3.1	Typtheorie objektorientierter Datenbanken	347
7.3.2	Der Tupel-Datentypkonstruktor	349
7.3.3	Der Set-Datentypkonstruktor	351
7.3.4	Datentypkonstruktion und Verschränkung	353
7.4	Komplexe Bedingungen auf Tupel-Werten	355
7.4.1	Was sind komplexe Bedingungen?	355
7.4.2	Konjunktion, Adjunktion und Negation	357
7.4.3	Kommutierende Bedingungen	359
7.4.4	Nicht-kommutierende Bedingungen	360
7.4.5	Überlappende Bedingungen	361
7.4.6	Normalisierung überlappender Bedingungen	363
7.5	Gewichtete Bedingungen	364
7.5.1	Anforderungen an eine Gewichtung	365
7.5.2	Gewichtete Adjunktion.....	366
7.5.3	Gewichtete Konjunktion.....	367
7.5.4	Gewichtsverband und geschachtelte Gewichtung	368
7.5.5	Abhängige Gewichte	370
7.6	Kognitive Verzerrungen	371
7.6.1	Ein Beispiel	372
7.6.2	Wahrscheinlichkeitstheoretischer Ansatz	372
7.6.3	Ein quantenlogischer Ansatz	373
7.6.4	Ein Rechenbeispiel	374
7.6.5	Die Stärke der Reihenfolgensensitivität	376
	Sachverzeichnis	379