
ABITUR-TRAINING
Allgemeinbildendes Gymnasium
Analysis
Baden-Württemberg
Abitur ab 2019
STARK
MEHR
ERFAHREN
Allgemei
nasium
Sto
Ba
RK
ABITUR-TRAINING
MATHEMATIK
GYMNASIUM
Abitur ab 2019
Baden-Württemberg
Analytische Geometrie
Pflicht- und Wahlteil
STARK

MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Allgemeinbildendes Gymnasium

Analysis

Baden-Württemberg

Abitur ab 2019

STARK

Inhalt

Vorwort

Gleichungen ... **1**
1 Lineare Gleichungen ... 2
2 Quadratische Gleichungen ... 4
3 Quadratische Ungleichungen ... 6
4 Bruchgleichungen ... 8
5 Wurzelgleichungen ... 10
6 Potenzgleichungen ... 11
7 Exponentialgleichungen ... 13
8 Trigonometrische Gleichungen ... 14
9 Substitutionsverfahren ... 19
10 Nullprodukt-Gleichungen ... 21
11 Lineare Gleichungssysteme (LGS) ... 22

Geraden ... **25**

Funktionen und ihre Eigenschaften ... **31**
1 Definitionsmenge, Graph, Nullstellen, Symmetrie ... 32
2 Lineare Funktionen ... 34
3 Potenzfunktionen ... 35
4 Ganzrationale Funktionen ... 38
LF 5 Gebrochenrationale Funktionen ... 43
6 Verschiebungen und Streckungen von Graphen ... 48
7 Exponentialfunktionen ... 52
8 Trigonometrische Funktionen ... 59
9 Zusammengesetzte Funktionen; Verkettung ... 65

Differenzialrechnung ... **67**
1 Bedeutung der Ableitung ... 68
2 Ableitungsregeln ... 71
3 Untersuchung von Funktionen und Graphen ... 76
4 Tangente und Normale ... 85
5 Schnitt von Graphen, Berührung, Orthogonalität ... 90
LF 6 Ortslinien ... 92
7 Änderungsraten ... 94

Integralrechnung **99**
1 Bedeutung des Integrals 100
2 Bestimmung von Stammfunktionen – Technik des Integrierens 101
3 Berechnung von Flächeninhalten 106
LF 4 Rotationskörper 118
LF 5 Die Integralfunktion 119
6 Rekonstruktion eines Bestandes aus der momentanen Änderungsrate 121
LF 7 Mittelwertbildung mithilfe des Integrals 126

Vermischte Aufgaben **129**
A Innermathematische Fragestellungen 130
B Anwendungsbezogene Fragestellungen 142

Anhang: Einsatz des WTR in der Analysis **157**
1 Analysis mit dem Casio fx-87DE X ClassWiz 158
2 Analysis mit dem TI-30X Plus MathPrint 165

Lösungen **171**

Stichwortverzeichnis **331**

Die mit **LF** markierten Kapitel sind für das Basisfach nicht relevant.
Zudem sind im Basisfach allgemein nur Verkettungen mit linearer innerer Funktion relevant und es werden keine Kurvenscharen behandelt.

Autoren:
Dr. Raimund Ordowski, Arnold Zitterbart

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die **Analysis** ist neben den Gebieten Geometrie und Stochastik Gegenstand der Abiturprüfung und umfasst etwa die Hälfte der Gesamtprüfung.
Ab dem Abitur 2019 ist nur noch ein wissenschaftlicher Taschenrechner **(WTR)** für die schriftliche Prüfung zugelassen, sodass mehr als bisher von Hand gerechnet werden muss und Überlegungen anhand vorgegebener Graphen wohl eine größere Rolle spielen werden.

Dieses Buch will kein Schulbuch und keinen Unterricht ersetzen. Wir haben versucht, Ihnen eine möglichst gut nachvollziehbare, aber nicht zu umfangreiche und theorielastige Wiederholung der Analysis für Klausuren und die Abiturprüfung anzubieten. Die einzelnen Kapitel und Abschnitte sind in der Regel so konzipiert, dass Sie auch ganz **gezielt bestimmte Themen** wiederholen können.
Sind Sie mit den Grundlagen der Analysis bereits vertraut, so können Sie das Buch auch einfach als Sammlung von Beispielen und Aufgaben nutzen.

Zunächst werden in fünf Kapiteln **grundlegende Begriffe und Verfahren** der Analysis wiederholt und eingeübt. Die einzelnen Kapitel sind so aufgebaut, dass nach jedem vorgestellten Verfahren mindestens ein **ausführlich gelöstes Beispiel** folgt, an das sich eine Reihe von kleineren **Übungsaufgaben** anschließt.

Das letzte Kapitel enthält eine **Sammlung von umfangreicheren Aufgaben** über alle Inhalte hinweg mit innermathematischen bzw. anwendungsbezogenen Fragestellungen. Die Formulierungen und Anweisungen in den Aufgaben entsprechen dabei weitgehend den Vorgaben für die Aufgaben der Abiturprüfung.

Zu allen Aufgaben gibt es im Lösungsteil **ausführliche Lösungen**, mit denen Sie Ihre eigenen Überlegungen und Berechnungen kontrollieren können.

Im Anhang des Buches (vor dem Lösungsteil) finden Sie Anleitungen zu den grundlegenden Aufgabentypen der Analysis für die beiden gängigen WTR-Modelle **Casio fx-87DE X ClassWiz** und **TI-30X Plus MathPrint**. Bei allen Lösungen von Beispielen und Aufgaben wird bei Bedarf auf den entsprechenden Aufgabentyp aus diesem Teil verwiesen, sodass Sie den WTR stets gezielt einsetzen können.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

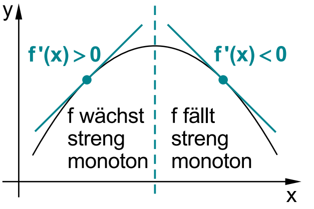
Dr. Raimund Ordowski — Arnold Zitterbart

3 Untersuchung von Funktionen und Graphen

In diesem Abschnitt finden Sie die wichtigsten Verfahren, mit denen sich eine Funktion f und ihr Graph G_f mithilfe der Ableitungen von f untersuchen lassen. Machen Sie sich dazu noch einmal bewusst, dass die Ableitung $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 an den Graphen von f angibt. Anhand der Abbildungen können Sie sich die folgenden Sätze gut veranschaulichen und einprägen.

Monotonie

Mithilfe der Ableitungsfunktion von f kann man untersuchen, ob die Funktionswerte mit wachsenden x-Werten zunehmen oder abnehmen. Die Skizze rechts veranschaulicht den sogenannten **Monotoniesatz**:



> Gilt **$f'(x) > 0$** auf einem Intervall, so ist f dort **streng monoton wachsend.**
> Gilt **$f'(x) < 0$** auf einem Intervall, so ist f dort **streng monoton fallend.**

Gilt nur $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ auf einem Intervall, so nennt man f dort monoton wachsend bzw. monoton fallend (ohne den Zusatz „streng").

■ Beispiel 1

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = x^3 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

b) Untersuchen Sie die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ auf Monotonie.

Lösung a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Somit ist f streng monoton wachsend.

b) Bei der ganzrationalen Funktion g geht man wie folgt vor:
Man bestimmt zunächst alle Werte für x, für die die Ableitung $g'(x) = x^2 - 1$ den Wert 0 annimmt:

$$g'(x) = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x_{1;2} = \pm 1$$

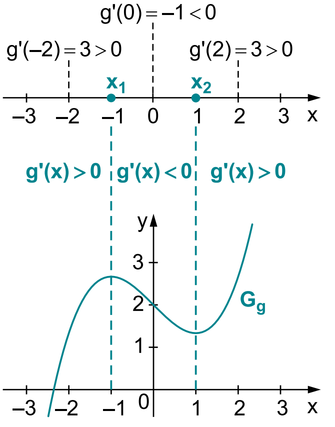
Durch $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ werden die reellen Zahlen in drei Teilintervalle geteilt:
$I_1 = (-\infty; -1)$; $I_2 = (-1; 1)$ und $I_3 = (1; \infty)$.

Auf jedem Teilintervall ist g' nur positiv oder nur negativ. Das Vorzeichen von g' kann man daher durch jeweils einen **Testwert** aus jedem Teilintervall ermitteln:

- $g'(-2) = 4 - 1 = 3 > 0$,
  d. h., $g'(x) > 0$ für alle $x \in I_1$,
- $g'(0) = 0 - 1 = -1 < 0$,
  d. h., $g'(x) < 0$ für alle $x \in I_2$,
- $g'(2) = 4 - 1 = 3 > 0$,
  d. h., $g'(x) > 0$ für alle $x \in I_3$.

Somit ist die Funktion g nach dem Monotoniesatz

- streng monoton wachsend in $I_1 = (-\infty; -1)$,
- streng monoton fallend in $I_2 = (-1; 1)$,
- streng monoton wachsend in $I_3 = (1; \infty)$.



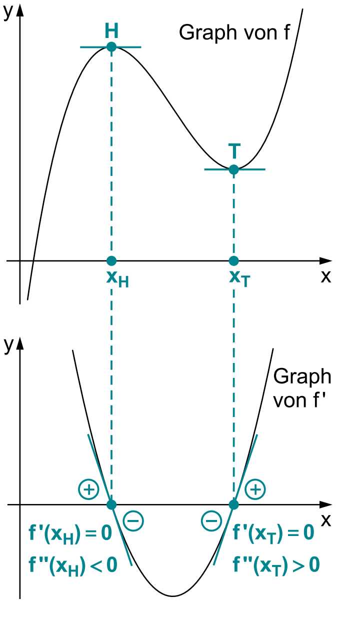
Anmerkung: Das Verfahren aus Beispiel 1b lässt sich auch bei anderen auf einem **Intervall** definierten Funktionen anwenden, deren Ableitung dort nur endlich viele Nullstellen hat.

Extremstellen

Mithilfe der Ableitungen einer Funktion f lassen sich Extremwerte von f bzw. Hoch- und Tiefpunkte des zugehörigen Graphen G_f bestimmen, wenn f auf einem Intervall definiert ist und die x-Werte dieser Punkte **im Innern** des Intervalls liegen. Man spricht dann von **lokalen Extremwerten**.

Durchläuft man den in der Abbildung vorgegebenen Graphen einer Funktion f in positive x-Richtung mithilfe einer gedachten Tangente (Geodreieck), so ist die Steigung des Graphen positiv bis zum Hochpunkt H des Graphen. Im Punkt H selbst ist sie gleich null. Danach wird die Steigung negativ bis zum Tiefpunkt T. Im Punkt T ist sie null, anschließend wird sie wieder positiv.

Der Graph der Ableitung f' hat an der Stelle x_H eine negative Steigung, an der Stelle x_T eine positive Steigung.



Diese Überlegungen veranschaulichen die folgenden Kriterien für Extremwerte:

An einer **lokalen Extremstelle** x_0 von f gilt immer $f'(x_0) = 0$ (**notwendige** Bedingung).

Für die Bestimmung von Maxima bzw. Minima einer Funktion f gibt es jeweils zwei **hinreichende** Kriterien:

(H1) Wenn $f'(x_H) = 0$ und $f''(x_H) < 0$ gilt, dann hat f an der Stelle x_H ein **lokales Maximum**.

(H2) Wenn $f'(x_H) = 0$ gilt und f' an der Stelle x_H das Vorzeichen von **plus nach minus** wechselt, so hat f an der Stelle x_H ein **lokales Maximum**.

Der Punkt $H(x_H \mid f(x_H))$ ist dann ein **Hochpunkt** des Graphen.

(T1) Wenn $f'(x_T) = 0$ und $f''(x_T) > 0$ gilt, dann hat f an der Stelle x_T ein **lokales Minimum**.

(T2) Wenn $f'(x_T) = 0$ gilt und f' an der Stelle x_T das Vorzeichen von **minus nach plus** wechselt, so hat f an der Stelle x_T ein **lokales Minimum**.

Der Punkt $T(x_T \mid f(x_T))$ ist dann ein **Tiefpunkt** des Graphen.

Anmerkung: In der Schulmathematik werden in der Regel Funktionen untersucht, die man beliebig oft ableiten kann und deren erste Ableitungen nur endlich viele Nullstellen haben. In diesen Fällen gilt auch umgekehrt:
Ist $f(x_0)$ ein lokales Extremum, so wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen.

Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Ihr Graph ist G_f.
Untersuchen Sie f für $x \to \pm\infty$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der x-Achse.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunkts von G_f.
Skizzieren Sie G_f.

Lösung **Verhalten für $x \to \pm\infty$:** (vgl. Kapitel „Funktionen und ihre Eigenschaften“, S. 39)

$$\begin{cases} x \to +\infty \;\Rightarrow\; x^3 \to +\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to +\infty \\ x \to -\infty \;\Rightarrow\; x^3 \to -\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty \end{cases}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:
Die Nullstellen von f erhält man aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x &= 0 \\ x \cdot (x^2 - 6x + 9) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x_1 = 0$ eine Lösung.

Die weiteren Lösungen erhält man mit der pq-Formel aus der Teilgleichung:
$x^2 - 6x + 9 = 0$

→WTR 1 $x_2 = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$

Der Graph G_f schneidet die x-Achse in den Punkten **$N_1(0|0)$** und **$N_2(3|0)$**.

Hoch- und Tiefpunkt:

Ableitungen von f:
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$f''(x) = 6x - 12$

Die Nullstellen von f' erhält man mit der pq-Formel aus:

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

→WTR 1 $x_{3;4} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$

Somit ist $x_3 = 1$ und $x_4 = 3 = x_2$.

Es gilt $f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$, d. h., f hat an der Stelle $x_3 = 1$ ein lokales Maximum. Mit $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$ ergibt sich der Hochpunkt $H(1|4)$ des Graphen. →WTR 5

Wegen $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$ hat f an der Stelle $x_4 = 3$ ein lokales Minimum.
Da $x_1 = 3$ Nullstelle von f ist, ist $T(3|0)$ der Tiefpunkt des Graphen.

Der Graph G_f hat den Hochpunkt **$H(1|4)$** und den Tiefpunkt **$T(3|0)$**.

Alternative über **Vorzeichenwechsel** von f':
Wie oben bestimmt man zunächst die Nullstellen $x_3 = 1$ und $x_4 = 3$ von f'.
Nach dem Vorbild von Beispiel 1 kann man dann f' auf Vorzeichenwechsel an diesen Stellen untersuchen, indem man einen Testwert kleiner als 1, einen zwischen 1 und 3 und einen größer als 3 heranzieht:

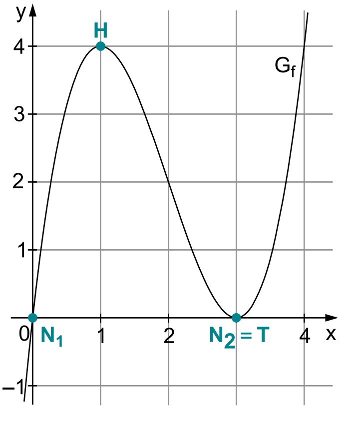
$f'(0) = 9 > 0$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$

$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$

Daraus liest man ab:
f' hat an der Stelle $x_3 = 1$ einen Vorzeichenwechsel von **plus nach minus**.
f hat daher an dieser Stelle ein lokales Maximum.
f' hat an der Stelle $x_4 = 3$ einen Vorzeichenwechsel von **minus nach plus**.
f hat daher an dieser Stelle ein lokales Minimum.

Skizze von G_f:



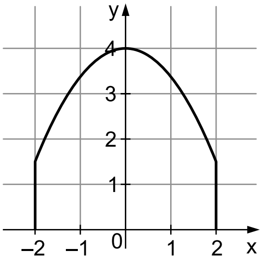
B Anwendungsbezogene Fragestellungen

144 Brücke

Die Abbildung zeigt den Querschnitt einer Brückenunterführung. Die obere Begrenzung der Innenwand wird beschrieben durch den Graphen G_f der Funktion f mit

$f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 4;\ \ -2 \le x \le 2$ (x und f(x) in Meter).

Durch die Unterführung führt auf Höhe der x-Achse eine Straße.



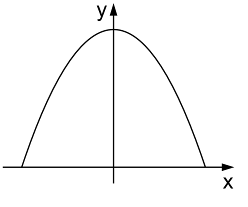
a) Berechnen Sie, wie hoch die senkrechten Innenwände der Unterführung sind.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, den eine senkrechte Innenwand mit der oberen Innenwand bildet.

b) Am Eingang der Unterführung wird senkrecht unter dem höchsten Punkt eine Ampel angebracht. Die Ampel wird von zwei Metallstangen gehalten, die jeweils orthogonal zur Innenwand der Unterführung verlaufen und an der Ampel in einem gemeinsamen Punkt B verschraubt sind. Die Befestigungspunkte der Stangen an der Innenwand befinden sich auf gleicher Höhe links und rechts von der Mitte der Unterführung und haben einen Abstand von 1 Meter.
Bestimmen Sie rechnerisch, in welcher Höhe über der Straße sich der Punkt B befindet.

c) Die Ampel wird entfernt, damit ein Spezialfahrzeug die Unterführung passieren kann. Das Spezialfahrzeug ist 2 Meter breit und 2 Meter hoch. Auf seinem Dach soll ein würfelförmiger Aufbau so befestigt werden, dass das Fahrzeug damit die Unterführung durchfahren kann.
Berechnen Sie die maximal mögliche Kantenlänge des Aufbaus.

145 Abwasserkanal

Der Querschnitt eines 20 m langen geradlinigen unterirdischen Abwasserkanals wird durch den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2{,}25$ und die x-Achse beschrieben (x und f(x) in Meter).



a) Bestimmen Sie die Weite des Winkels, den die Kanalwand mit dem Boden einschließt.
Zur Sicherung werden im Kanal einige Stahlstreben eingezogen. Betrachtet wird eine Strebe, deren Befestigungspunkte im Modell durch $P(-1{,}5\,|\,0)$ und $Q(1\,|\,f(1))$ beschrieben werden. Berechnen Sie die Länge dieser Strebe.
Überprüfen Sie, ob die Strebe im Punkt Q orthogonal auf die Kanalwand trifft.

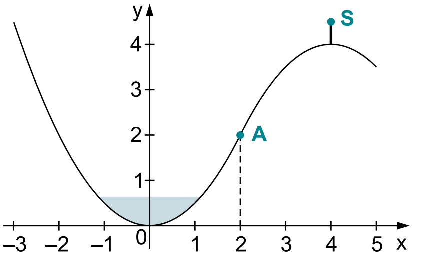
b) Berechnen Sie, welches Wasservolumen der Kanal enthält, wenn das Wasser 1,25 m hoch steht.
Zu einem bestimmten Zeitpunkt enthält der Kanal 44 m^3 Wasser.
Berechnen Sie die Breite der Wasseroberfläche im Querschnitt für diesen Fall.
Bestimmen Sie, wie hoch das Wasser dann steht.

146 Flussbett

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$.
Ihre Graphen sind G_f und G_g.

a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T von G_f an und berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts H von G_g.
Begründen Sie, dass sich die beiden Graphen im Punkt $A(2|2)$ berühren.
Die gemeinsame Tangente der Graphen im Punkt A schneidet die Gerade $x = 4$ im Punkt P. Berechnen Sie die Koordinaten von P.

b) Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Flussbetts, das für $-3 \leq x \leq 2$ durch G_f und für $2 \leq x \leq 5$ durch G_g modelliert wird (x, f(x) und g(x) in 10 Meter).
Im höchsten Punkt der rechten Böschung steht ein 5 Meter hoher Turm, von dessen Spitze S aus man das Wasser im Flussbett sehen kann.



Wegen großer Trockenheit sinkt der Wasserspiegel im Fluss. An einem bestimmten Tag ist der Wasserspiegel von der Turmspitze aus nicht mehr zu sehen.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man bestimmen kann, wie tief das Wasser in der Mitte des Flusses an diesem Tag höchstens sein kann.
Führen Sie die entsprechenden Berechnungen durch.

147 Niederschlag

Über einem bestimmten Gebiet fällt zwischen 2 Uhr nachts und 10 Uhr morgens starker Regen. Die momentane Niederschlagsrate pro Quadratmeter wird durch die Funktion f mit

$f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t - 10;\ \ 2 \leq t \leq 10$

modelliert (t in Stunden seit Mitternacht, f(t) in Liter pro Stunde).
Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt den Graphen von f.

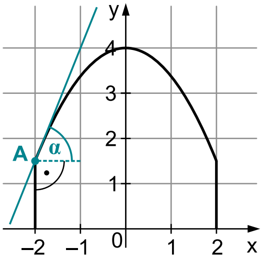
144 Begrenzung obere Innenwand: $f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 4;\ -2 \leq x \leq 2$ (x und f(x) in Meter)

Die Ableitung von f ist: $f'(x) = -\frac{5}{4}x$

a) Die **Höhe einer senkrechten Innenwand** entspricht dem Funktionswert von f an der Stelle –2 (bzw. an der Stelle 2):

$f(-2) = -\frac{5}{8} \cdot (-2)^2 + 4 = \frac{3}{2}$

Die senkrechten Innenwände sind **1,5 m** hoch.



Der gesuchte **Winkel zwischen den Innenwänden** setzt sich zusammen aus dem Steigungswinkel α der Tangente im Punkt A(–2 | 1,5) an G_f und einem rechten Winkel (s. Skizze).

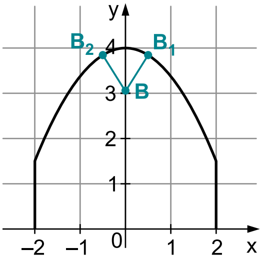
→ WTR 4 $\tan(\alpha) = f'(-2) = -\frac{5}{4} \cdot (-2) = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 68{,}2°$

$90° + 68{,}2° = 158{,}2°$

Die Innenwände bilden einen Winkel von **ca. 158,2°**.

b) **Lage des Punktes B:**

Nimmt man an, dass die Abbildung den Eingang der Unterführung beschreibt, so haben die Befestigungspunkte aufgrund der Symmetrie der Brückenunterführung die Koordinaten $B_1(0{,}5 \mid f(0{,}5))$ und $B_2(-0{,}5 \mid f(0{,}5))$. Die Normalen in den beiden Punkten schneiden sich in dem Punkt B auf der y-Achse.



Für die Normale n im Punkt B_1 erhält man mit $f'(0{,}5) = -\frac{5}{8}$ die Gleichung:

$$y = -\frac{1}{f'(0{,}5)} \cdot (x - 0{,}5) + f(0{,}5)$$

$$= \frac{8}{5} \cdot (x - 0{,}5) + \frac{123}{32}$$

Schnitt von n mit der y-Achse $x = 0$:

$$y = \frac{8}{5} \cdot (0 - 0{,}5) + \frac{123}{32} \approx 3{,}04$$

Der Befestigungspunkt B an der Ampel befindet sich **etwa 3 Meter über der Straße**.

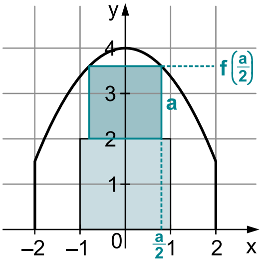
c) **Maximale Kantenlänge des Aufbaus:**

Für eine möglichst große Kantenlänge des Aufbaus wird das Fahrzeug mittig zur Straße fahren, wobei der Aufbau mittig, mit den Kanten parallel zu den Fahrzeugkanten befestigt ist (vgl. Skizze auf der nächsten Seite).

Ist a die Kantenlänge des würfelförmigen Aufbaus, so entnimmt man der Skizze die Bedingung für die maximal mögliche Kantenlänge:

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = 2 + a$$

Daraus ergibt sich für a:



$$-\frac{5}{8}\cdot\frac{a^2}{4}+4=2+a$$
$$-\frac{5}{32}a^2-a+2=0$$
$$-5a^2-32a+64=0$$
$$a^2+\frac{32}{5}a-\frac{64}{5}=0$$

→ WTR 1 $$a_{1;\,2}=-\frac{16}{5}\pm\sqrt{\frac{256}{25}+\frac{64}{5}}=-\frac{16}{5}\pm\frac{24}{5}$$

$$a_1=-8;\quad a_2=\frac{8}{5}=1{,}6$$

Relevant ist hier nur die positive Lösung $a_2=1{,}6$.

Die maximal mögliche Kantenlänge des Aufbaus beträgt **1,6 Meter**.

145 Begrenzung der Kanalinnenwand: $f(x)=-x^2+2{,}25$ (x und f(x) in Meter)

Ableitung von f: $f'(x)=-2x$

a) **Winkel:**

Nullstellen von f:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2{,}25=0$$
$$x^2=2{,}25$$
$$x_{1;\,2}=\pm 1{,}5$$

Wegen der Symmetrie von G_f genügt es, den Steigungswinkel der Tangente an der Stelle $x_1=-1{,}5$ zu berechnen:

→ WTR 4 $\tan(\alpha)=f'(-1{,}5)=-2\cdot(-1{,}5)=3 \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 71{,}6°$

Die Kanalwand schließt mit dem Boden einen Winkel von **etwa 71,6°** ein.

Strebe mit den Endpunkten P(–1,5 | 0) und Q(1 | f(1)) = Q(1 | 1,25):

Länge der Strecke PQ: $\sqrt{(1-(-1{,}5))^2+(1{,}25-0)^2}=\sqrt{7{,}8125}\approx 2{,}80$

Die Strebe ist etwa **2,8 m lang**.

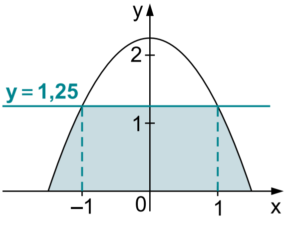
Steigung der Strecke PQ: $m_{PQ}=\frac{1{,}25-0}{1-(-1{,}5)}=0{,}5$

Tangentensteigung im Punkt Q(1 | 1,25): $f'(1)=-2\cdot 1=-2$

Wegen $f'(1)\cdot m_{PQ}=-2\cdot 0{,}5=-1$ trifft die Strebe **orthogonal auf die Kanalwand**.

b) **Wasservolumen bei 1,25 m Höhe:**

Schnittstellen von G_f mit der Geraden $y = 1{,}25$:



$$f(x) = 1{,}25$$
$$-x^2 + 2{,}25 = 1{,}25$$
$$x^2 = 1$$
$$x_{3;\,4} = \pm 1$$

Für den Inhalt der Querschnittsfläche des Wassers erhält man unter Ausnutzung der Achsensymmetrie von G_f (s. Skizze):

→ WTR 9

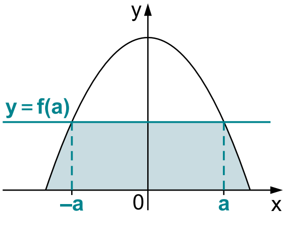
$$A = 2 \cdot 1{,}25 + 2 \cdot \int_1^{1{,}5} f(x)\,dx = 2{,}5 + 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 2{,}25x\right]_1^{1{,}5} = 2{,}5 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{6} \approx 3{,}167$$

Da der Kanal 20 m lang ist, erhält man für das Wasservolumen im Kanal:

$\mathbf{V \approx}\ 20\ \text{m} \cdot 3{,}167\ \text{m}^2 = \mathbf{63{,}34\ m^3}$

Breite der Wasseroberfläche, Wasserstand:

Der Wasserspiegel wird im Querschnitt durch eine zur x-Achse parallele Gerade beschrieben. Ihre positive Schnittstelle mit G_f sei a. Die Breite der Wasseroberfläche ist dann 2a, die Gleichung der Geraden $y = f(a)$.



Wenn der Kanal 44 m^3 Wasser enthält, gilt für den Inhalt der Querschnittsfläche des Wassers:

$44\ \text{m}^3 : 20\ \text{m} = 2{,}2\ \text{m}^2$

Analog zu oben muss dann gelten:

$$2{,}2 = 2a \cdot f(a) + 2 \cdot \int_a^{1{,}5} f(x)\,dx$$

$$2{,}2 = 2a \cdot (-a^2 + 2{,}25) + 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 2{,}25x\right]_a^{1{,}5}$$

$$2{,}2 = -2a^3 + 4{,}5a + 2 \cdot \left(-\frac{1{,}5^3}{3} + 2{,}25 \cdot 1{,}5\right) - 2 \cdot \left(-\frac{a^3}{3} + 2{,}25a\right)$$

$$2{,}2 = -\frac{4}{3}a^3 + 4{,}5$$

$$a^3 = 1{,}725$$

→ WTR 7

$$a = \sqrt[3]{1{,}725} \approx 1{,}20$$

Die Breite der Wasseroberfläche beträgt **etwa 2,40 m**.

Der Wasserstand ergibt sich aus $f(a) \approx f(1{,}20) = 0{,}81$.
Das Wasser im Kanal steht dann **ca. 81 cm** hoch.

146 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$.

Ableitungen von f und g: $f'(x) = x$; $g'(x) = -x + 4$

a) **Extrempunkte:**

G_f ist eine nach oben geöffnete Parabel 2. Ordnung mit dem Scheitel **T(0|0)** als Tiefpunkt.

G_g ist eine nach unten geöffnete Parabel 2. Ordnung, wobei ihr Scheitel der Hochpunkt H ist. Die Koordinaten von H berechnet man mithilfe der Ableitung von g:

$$g'(x) = 0$$
$$-x + 4 = 0$$
$$x = 4$$

Mit $g(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 - 4 = 4$ ergibt sich **H(4|4)**.

Berührung im Punkt A(2|2):

Es gilt:

(1) $f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2$ und $g(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 2$, d. h. $f(2) = g(2)$

(2) $f'(2) = 2$ und $g'(2) = -2 + 4 = 2$, d. h. $f'(2) = g'(2)$

Somit **berühren sich G_f und G_g** im Punkt A(2|2).

Gemeinsame Tangente in A:

Eine Gleichung der gemeinsamen Tangente ist:

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + 2 = 2 \cdot (x - 2) + 2 = 2x - 2$$

Schnitt mit der Geraden $x = 4$:

$$y = 2 \cdot 4 - 2 = 6$$

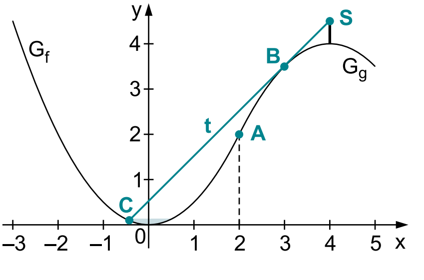
Schnittpunkt: **P(4|6)**

b) **Beschreibung:**

Der Punkt S liegt 5 Meter über H, seine Koordinaten sind somit S(4|4,5). (Beachten Sie, dass auf jeder Achse eine Einheit 10 Meter bedeutet.)

Der Sehstrahl von S zum tiefsten Punkt C am linken Ufer verläuft tangential zu G_g. Den Punkt C erhält man daher, indem man die Tangente t durch S an G_g legt und diese mit G_f schneidet.

Der Wasserspiegel ist von S aus nicht mehr zu sehen, wenn er höchstens bis zum Punkt C reicht.



Der Wasserstand in der Mitte des Flusses ist dann höchstens so groß wie der y-Wert von C multipliziert mit 10 Metern.

Rechnung:
Die Tangente t durch S an G_g berührt G_g in einem Punkt $B(u\,|\,g(u))$.
Da S senkrecht unterhalb des Punktes P liegt (s. Teilaufgabe a), gilt $2 < u < 4$.
Eine Gleichung für t ist:

$$y = g'(u)\cdot(x-u)+g(u) = (-u+4)\cdot(x-u)-\tfrac{1}{2}u^2+4u-4$$

Punktprobe mit $S(4\,|\,4{,}5)$ liefert eine Gleichung für u:

$$4{,}5 = (-u+4)\cdot(4-u)-\tfrac{1}{2}u^2+4u-4$$
$$4{,}5 = (4-u)^2-\tfrac{1}{2}u^2+4u-4$$
$$4{,}5 = 16-8u+u^2-\tfrac{1}{2}u^2+4u-4$$
$$0 = \tfrac{1}{2}u^2-4u+7{,}5$$
$$0 = u^2-8u+15$$

→ WTR 1 $\quad u_{1;\,2} = 4\pm\sqrt{16-15} = 4\pm 1$

Die Lösung im Bereich $2 < u < 4$ ist $u_1 = 4-1 = 3$.
Damit ergibt sich für t die Gleichung:

$$y = g'(3)\cdot(x-3)+g(3) = 1\cdot(x-3)-\tfrac{1}{2}\cdot 3^2+4\cdot 3-4 = x+\tfrac{1}{2}$$

Der Punkt C ist der Schnittpunkt von t und G_f im Bereich $x < 2$:

$$\tfrac{1}{2}x^2 = x+\tfrac{1}{2}$$
$$x^2-2x-1 = 0$$
$$x_{1;\,2} = 1\pm\sqrt{2}$$

Die Lösung mit $x < 2$ ist $x_1 = 1-\sqrt{2} \approx -0{,}414$.
Einsetzen in die Gleichung der Tangente t liefert den y-Wert von C:

$$y_1 = 1-\sqrt{2}+\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}-\sqrt{2} \approx 0{,}086$$

Der Wasserstand in der Mitte des Flusses kann **höchstens etwa 0,86 Meter** betragen.

147 Niederschlagsrate f pro Quadratmeter: $f(t) = -\frac{1}{2}t^2+6t-10;\ \ 2 \le t \le 10$
(t in Stunden seit Mitternacht, f(t) in Liter pro Stunde)

a) **Regenmenge:**

→ WTR 9 $$N = \int_2^{10} f(t)\,dt = \int_2^{10}\left(-\tfrac{1}{2}t^2+6t-10\right)dt = \left[-\tfrac{1}{6}t^3+3t^2-10t\right]_2^{10} \approx 42{,}7$$

Zwischen 2 Uhr nachts und 10 Uhr morgens sind **etwa 43 Liter Wasser** pro Quadratmeter gefallen.

MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Allgemeinbildendes Gymnasium

Stochastik

Baden-Württemberg
Abitur ab 2019

STARK

Inhalt

Vorwort

Grundlagen: Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten **1**
1 Zufallsexperimente; Relative Häufigkeiten 2
2 Wahrscheinlichkeiten 9
3 Mehrstufige Zufallsexperimente 14
4 Kombinatorische Hilfsmittel 24

Vierfeldertafel und bedingte Wahrscheinlichkeit **33**

Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen **41**

Zufallsvariablen **51**

Binomialverteilung **67**

Testen von Hypothesen **93**

Varianz und Standardabweichung **107**

Normalverteilung **117**

Anhang: Einsatz des WTR in der Stochastik **125**
1 Stochastik mit dem Casio fx-87DE X ClassWiz 126
2 Stochastik mit dem TI-30X Plus MultiView 141

Lösungen **155**

Stichwortverzeichnis **247**

Autoren:
Dr. Raimund Ordowski, Dr. Jürgen Mehnert

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die **Stochastik** ist neben den Gebieten Analysis und Geometrie Gegenstand der Abiturprüfung und hat seit dem Abitur 2017 eine deutliche Aufwertung erfahren. Ab dem Abitur 2019 ist nur noch ein wissenschaftlicher Taschenrechner **(WTR)** für die schriftliche Prüfung zugelassen.

Dieses Buch will kein Schulbuch und keinen Unterricht ersetzen. Wir haben versucht, eine möglichst gut nachvollziehbare, aber nicht zu theorielastige Wiederholung für Unterricht und Prüfung mit vielseitigen Aufgabentypen anzubieten.

Folgende Themen sind Teil der schriftlichen Abiturprüfung im Bereich Stochastik:

- Baumdiagramme, Pfadregeln
- Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Erwartungswert
- Binomialverteilung, Formel von Bernoulli
- Einseitiges Testen von Hypothesen

Die Kapitel, in denen diese Themen behandelt werden, bieten entsprechend umfangreiches Aufgabenmaterial. Die anderen Kapitel frischen vor allem elementare, für das Verständnis wichtige Grundkenntnisse auf oder sind zurzeit kein Prüfungsthema, wie etwa die Normalverteilung. Sie beschränken sich daher auf die wesentlichen Grundbegriffe mit wenigen Übungsaufgaben. Eine Ausnahme bildet das Kapitel über Unabhängigkeit, aus dem viele Aufgaben auch als Übungsmaterial für Prüfungen geeignet sind. Kenntnisse aus dem Abschnitt „Kombinatorische Hilfsmittel“ sind für die Prüfung von Vorteil, zumindest einfache kombinatorische Überlegungen werden dort erwartet.

Das Buch ist so konzipiert, dass Sie auf verschiedene Weise damit arbeiten können, um sich optimal auf die Abiturprüfung vorzubereiten:

- Jedes Kapitel beginnt mit einem **einführenden Beispiel**, anhand dessen Ihnen die wichtigsten Begriffe und Regeln ohne große Theorie in Erinnerung gerufen bzw. verdeutlicht werden.
- Vielleicht benötigen Sie aber auch nur die anschließende **Zusammenfassung** der Theorie, die mit einer oder mehreren **Musteraufgaben** erläutert wird. Dann können Sie auch damit einsteigen.
- Sind Ihnen die wichtigsten Begriffe bereits vertraut, so bieten die **Übungsaufgaben** zu jedem Kapitel Trainingsmaterial mit steigendem Schwierigkeitsgrad. Die Formulierungen und Fragestellungen in den Aufgaben entsprechen weitgehend den Vorgaben für die Aufgaben der Abiturprüfung. Geeignete Aufgaben, die ganz oder teilweise im Pflichtteil des Abiturs auftreten könnten, die also ohne Hilfsmittel bearbeitet werden müssen, sind mit einem **P** gekennzeichnet. Die Grenzen zwischen Pflicht- und Wahlteil zur Stochastik im Abitur sind allerdings fließend. Grundsätzlich sind Aufgaben, zu deren Lösung der WTR benötigt wird, nur im Wahlteil des Abiturs möglich.

- Zu allen Aufgaben gibt es im Lösungsteil ausführliche **Lösungen**, mit denen Sie Ihre eigenen Überlegungen und Berechnungen vergleichen und kontrollieren können.
- Der letzte Teil des Buches umfasst ausführliche Anleitungen für die zwei gängigen WTR-Modelle **Casio fx-87DE X ClassWiz** und **TI-30X Plus MultiView** für die grundlegenden Aufgabentypen der Stochastik. Bei allen Lösungen von Aufgaben der vorangegangenen Kapitel, die den Einsatz des WTR benötigen, wird auf den entsprechenden Aufgabentyp aus diesem **WTR-Teil** verwiesen, sodass Sie den WTR stets gezielt einsetzen können.
  Der WTR-Teil kann aber auch für sich genutzt werden, um den Umgang mit dem Taschenrechner zu üben, wenn Ihnen die Theorie bereits vertraut ist.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Dr. Raimund Ordowski | Dr. Jürgen Mehnert

3 Mehrstufige Zufallsexperimente

Einführendes Beispiel

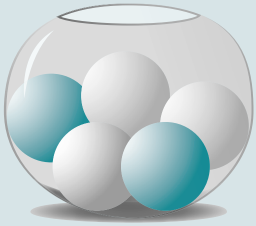
In einem Gefäß befinden sich zwei grüne und drei weiße Kugeln. Aus dem Gefäß wird zweimal eine Kugel gezogen und jeweils gleich wieder zurückgelegt.

Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

A: Beide Kugeln sind weiß.

B: Eine Kugel ist grün, die andere weiß.

C: Mindestens eine Kugel ist grün.

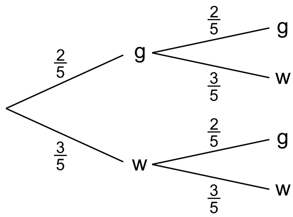


Baumdiagramm; Pfadregeln

Das beschriebene Zufallsexperiment ist **zweistufig**, da es sich aus der ersten und der zweiten Ziehung einer Kugel zusammensetzt. Da die gezogene Kugel nach dem ersten Zug zurückgelegt wird, spricht man von **Ziehen mit Zurücklegen**.

Wenn g das Ziehen einer grünen Kugel und w das Ziehen einer weißen Kugel bedeutet, dann lauten die vier möglichen Ergebnisse (g; g), (g; w), (w; g) und (w; w).

Das Zufallsexperiment lässt sich übersichtlich mithilfe eines **Baumdiagramms** darstellen. Die Äste des Baumdiagramms werden mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beschriftet. Die Wahrscheinlichkeit **eines Ergebnisses** berechnet sich, indem die Wahrscheinlichkeiten längs des **zugehörigen Pfades multipliziert** werden.



Zum Ereignis
A: Beide Kugeln sind weiß.
gehört nur der eine Pfad mit dem Ergebnis (w; w). Folglich gilt:

$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

B: Eine Kugel ist grün, die andere weiß.
B setzt sich aus den **zwei Ergebnissen** (g; w) und (w; g) zusammen.
Die Wahrscheinlichkeiten der **entsprechenden Pfade** werden **addiert**:

$P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$

Für das Ereignis
C: Mindestens eine Kugel ist grün.
ergibt sich anhand der drei Pfade mit den Ergebnissen (g; g), (g; w) und (w; g):
$P(C) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} + \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{16}{25}$

Alternativ kann man die Wahrscheinlichkeit für C mithilfe des Gegenereignisses
$\overline{C}$: Keine Kugel ist grün.
berechnen, das aber gerade mit dem Ereignis A: „Beide Kugeln sind weiß" übereinstimmt. Daher ist:
$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

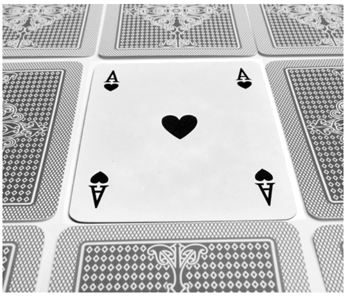
Zusammenfassung

Bei **mehrstufigen Zufallsexperimenten** lassen sich die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen mithilfe von **Baumdiagrammen** berechnen. Dabei gilt:

- **1. Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis erhält man, indem man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades **multipliziert**.
- **2. Pfadregel:** Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ergibt sich, indem man die Pfadwahrscheinlichkeiten der zugehörigen Ergebnisse **addiert**.
- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist jeweils 1.

Musteraufgabe

Auf einem Tisch werden zehn verdeckte Spielkarten zufällig verteilt. Darunter sind vier Damen und sechs Asse.



a) Es werden zwei Karten nacheinander aufgedeckt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   E: Es werden zwei Damen aufgedeckt.
   F: Die erste aufgedeckte Karte ist eine Dame, die zweite ein Ass.
   G: Es wird genau eine Dame aufgedeckt.
   H: Es wird mindestens eine Dame aufgedeckt.

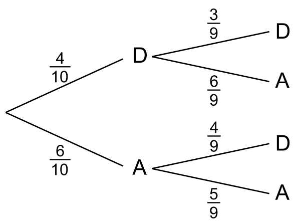
b) Es werden so lange Karten nacheinander aufgedeckt, bis man zwei Damen erhalten hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies spätestens mit der dritten Karte der Fall ist.

c) Erläutern Sie ohne Rechnung, wie viele Karten man mindestens aufdecken muss, damit mit Sicherheit
   - zwei Damen,
   - zwei Damen oder zwei Asse

   dabei sind.

d) Auf dem Tisch werden jetzt sechs Asse und n Damen zufällig verteilt. Es werden wieder zwei Karten nacheinander aufgedeckt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Dame darunter ist, beträgt nun $\frac{1}{7}$. Berechnen Sie n.

Lösung a) Da die Karten nacheinander aufgedeckt werden, liegen beim ersten Zug 10 Karten, beim zweiten Zug nur noch 9 Karten verdeckt auf dem Tisch. Das Aufdecken der Karten nacheinander entspricht dem zweifachen Ziehen einer Kugel aus einer Urne, wobei die zuerst gezogene Kugel <u>nicht</u> zurückgelegt wird (**Ziehen ohne Zurücklegen**). Da beim zweiten Aufdecken nur noch 9 Karten zur Verfügung stehen, ändern sich nun die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Stufe des Baumdiagramms:



Dabei bezeichnet D das Ziehen einer Dame, A das Ziehen eines Asses.

Mithilfe der Pfadregeln erhält man die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:

E: Es werden zwei Damen aufgedeckt.

$$P(E) = \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}}_{D\,D} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

F: Die erste aufgedeckte Karte ist eine Dame, die zweite ein Ass.

$$P(F) = \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}}_{D\,A} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

G: Es wird genau eine Dame aufgedeckt.
Die Dame kann entweder im ersten oder im zweiten Zug gezogen werden.

$$P(G) = \underbrace{\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9}}_{D\,A} + \underbrace{\frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}}_{A\,D} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

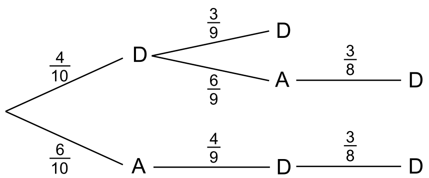
H: Es wird mindestens eine Dame aufgedeckt.
Zum Ereignis H gehören drei der vier Pfade:

$$P(H) = \underbrace{\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}}_{D\,D} + \underbrace{\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}}_{D\,A} + \underbrace{\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}}_{A\,D} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

Deutlich einfacher ist es hingegen, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses H mithilfe des Gegenereignisses
$\overline{H}$: Es wird keine Dame aufgedeckt.
zu bestimmen, da zu diesem Ereignis nur ein einziger Pfad gehört:

$$P(H) = 1 - P(\overline{H}) = 1 - \underbrace{\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}}_{A\,A} = 1 - \frac{30}{90} = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}$$

b) Das Zufallsexperiment hat nun eine unbekannte Anzahl an Stufen, da man nicht vorher weiß, wie oft man ziehen muss, um zwei Damen zu erhalten. Um das Baumdiagramm möglichst übersichtlich zu halten, werden nur die für die Fragestellung relevanten Pfade gezeichnet:



Anhand dieses **reduzierten Baumdiagramms** erhält man für das Ereignis
Z: Zwei Damen mit spätestens der dritten aufgedeckten Karte.
die Wahrscheinlichkeit:

$$P(Z) = \frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

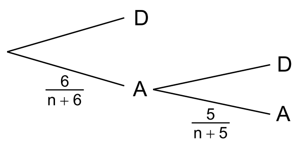
c) Im ungünstigsten Fall erhält man zunächst alle sechs Asse und eine Dame, bevor die zweite Dame aufgedeckt wird. Daher muss man mindestens acht Karten aufdecken, damit mit Sicherheit zwei Damen darunter sind.

Spätestens bei der dritten aufgedeckten Karte erhält man zwei gleichartige Karten (Asse oder Damen), da nur Damen und Asse auf dem Tisch liegen.

d) Auf dem Tisch liegen jetzt 6 Asse und n Damen, insgesamt also $n+6$ Karten. Das Ereignis
K: Es wird keine Dame aufgedeckt.
ist gleichbedeutend damit, dass genau zwei Asse aufgedeckt werden.

Anhand des reduzierten Baumdiagramms ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für K:

$$P(K) = \frac{6}{n+6}\cdot\frac{5}{n+5}$$



Aus der Vorgabe $P(K) = \frac{1}{7}$ ergibt sich für n:

$$\frac{30}{(n+6)\cdot(n+5)} = \frac{1}{7}$$

$$30\cdot 7 = (n+6)\cdot(n+5)$$

$$210 = n^2 + 11n + 30$$

$$0 = n^2 + 11n - 180$$

Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man

$$n_{1;\,2} = -5{,}5 \pm \sqrt{5{,}5^2 + 180} = -5{,}5 \pm \sqrt{210{,}25} = -5{,}5 \pm 14{,}5$$

und damit:

$n_1 = 9;\;\; n_2 = -20$

Die relevante Lösung ist $n = 9$.

Alternativ erhält man durch systematisches Probieren mit dem WTR für

$n=4:\;\; P(K) = \frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$n=5:\;\; P(K) = \frac{6}{11}\cdot\frac{5}{10} = \frac{3}{11}$

…

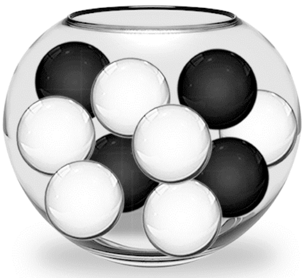
$n=9:\;\; P(K) = \frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14} = \frac{1}{7}$

Da die Wahrscheinlichkeit für K mit wachsendem n immer kleiner wird, ist $n = 9$ die einzige Lösung.

Es liegen neun Damen (und sechs Asse) verdeckt auf dem Tisch.

Übungsaufgaben

P 8 In einer Urne befinden sich vier schwarze und sechs weiße Kugeln.

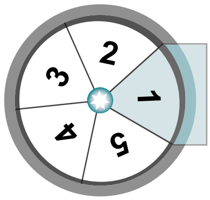


a) Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben.

b) Es werden nun nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der beiden Kugeln schwarz ist.

Übungsaufgaben

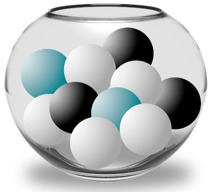
P 87 Das abgebildete Glücksrad hat fünf gleich große Sektoren. In der Urne liegen fünf weiße, drei schwarze und zwei grüne Kugeln.
Entscheiden Sie für die angegebenen Fälle jeweils, ob eine Bernoulli-Kette vorliegt. Geben Sie falls möglich deren Länge n und Trefferwahrscheinlichkeit p an.



a) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht und es wird jedes Mal notiert, ob die Zahl 1 oder die Zahl 2 erscheint.

b) Das Glücksrad wird achtmal gedreht und jedes Mal wird die erschienene Zahl notiert.

c) Aus der Urne wird fünfmal eine Kugel ohne Zurücklegen gezogen und es wird jedes Mal notiert, ob die Kugel weiß ist.



d) Aus der Urne wird viermal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen und es wird jedes Mal notiert, ob die Kugel schwarz ist.

e) Aus der Urne wird 20-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen und es wird jedes Mal notiert, ob die Kugel weiß oder grün oder keines von beiden ist.

P 88 Es ist bekannt, dass 15 % aller Smartphones vom Hersteller A stammen.
Bei einer Umfrage in einer Großstadt werden 100 zufällig ausgewählte Personen befragt, ob sie ein Smartphone von A besitzen.
Kann man von einer Bernoulli-Kette ausgehen?

P 89 Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 4$ und $p = \frac{1}{3}$.
Bestimmen Sie mithilfe der Bernoulli-Formel die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Berechnen Sie den Erwartungswert von X sowie $P(X \neq 1)$.

90 Die Zufallsvariable X ist $B_{20;\,0,4}$-verteilt.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

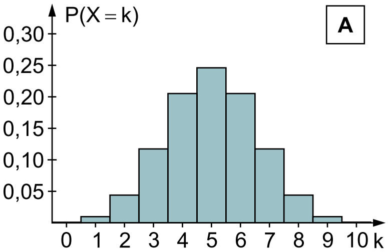
b) Bestimmen Sie mit dem WTR folgende Wahrscheinlichkeiten:

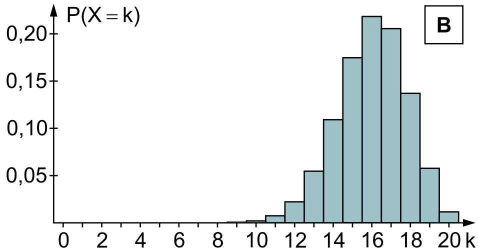
(1) $P(X = 10)$ (2) $P(X \neq 9)$ (3) $P(X \leq 10)$

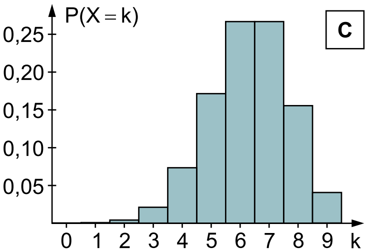
(4) $P(X \geq 8)$ (5) $P(7 \leq X \leq 16)$

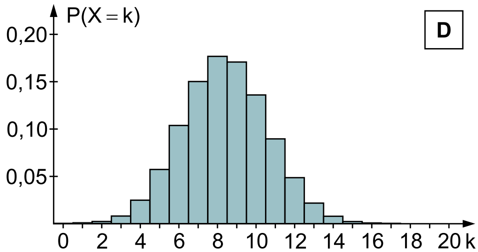
P 91 Auf vier der sieben Kärtchen befinden sich die Parameter der dargestellten Binomialverteilungen. Ordnen Sie jedem Histogramm die passenden Parameter zu und begründen Sie jeweils Ihre Auswahl.

(1) n = 10; p = 0,5
(2) n = 10; p = 0,4
(3) n = 20; p = 0,6
(4) n = 20; p = 0,8
(5) n = 20; p = 0,42
(6) n = 9; p = 0,7
(7) n = 9; p = 0,8

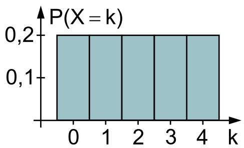




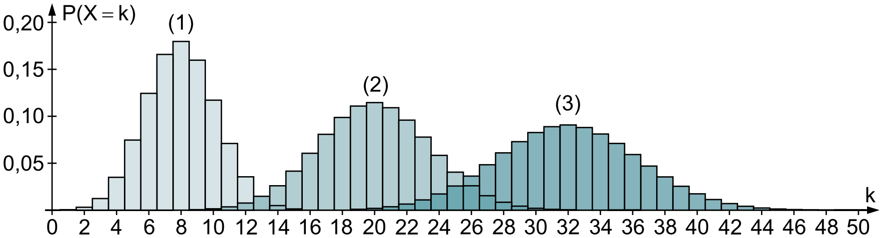




P 92 Begründen Sie, dass das abgebildete Histogramm nicht zu einer binomialverteilten Zufallsvariablen X gehören kann.



P 93 Die Histogramme beschreiben Binomialverteilungen mit der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,4. Die Erwartungswerte sind jeweils ganzzahlig.



Bestimmen Sie jeweils den Parameter n.
Beschreiben Sie, wie sich die Histogramme von Binomialverteilungen mit wachsendem n bei gleichem p verändern.

b) Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert für den Gewinn von Felix 0 ist:

$$E(X) = 0$$
$$p - 3p^2 = 0$$
$$p \cdot (1 - 3p) = 0$$
$$p_1 = 0; \; p_2 = \tfrac{1}{3}$$

Da $p > 0$ sein muss, ist das Spiel für $\mathbf{p = \tfrac{1}{3}}$ fair.

Für den Mittelpunktswinkel bei A gilt in diesem Fall: $\tfrac{1}{3} \cdot 360° = \mathbf{120°}$

Der Erwartungswert für den Gewinn von Felix beträgt –0,25 € pro Spiel, wenn gilt:

$$E(X) = -0,25$$
$$p - 3p^2 = -0,25$$
$$0 = 3p^2 - p - 0,25$$
$$p_{3;\,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 0,25}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 2}{6}$$
$$\left(p_3 = -\tfrac{1}{6}\right); \; p_4 = \tfrac{1}{2}$$

Für $\mathbf{p = \tfrac{1}{2}}$ würde Felix auf lange Sicht im Mittel 25 Cent pro Spiel verlieren.

87 a) Es liegt eine Bernoulli-Kette vor; Treffer: „Zahl 1 oder Zahl 2“.
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \tfrac{2}{5}$ Länge: $n = 10$

b) **Keine** Bernoulli-Kette, da kein Treffer definiert ist.

c) **Keine** Bernoulli-Kette, denn beim Ziehen ohne Zurücklegen ändert sich bei jeder Entnahme einer Kugel die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis „weiße Kugel“ für den nächsten Zug. D. h., die einzelnen Ziehungen sind nicht unabhängig.

d) Es liegt eine Bernoulli-Kette vor; Treffer: „schwarze Kugel“.
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \tfrac{3}{10}$ Länge: $n = 4$

e) Es liegt eine Bernoulli-Kette vor; Treffer: „weiße oder grüne Kugel“.
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \tfrac{7}{10}$ Länge: $n = 20$

88 Die zugrunde liegende Situation entspricht der aus Aufgabe 87 c:
Es werden 100 Personen aus der Gesamtheit der Einwohner der Stadt „ohne Zurücklegen“ ausgewählt, denn jede Person wird nur einmal befragt. Dabei ändert sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person ein Smartphone von A besitzt, mit jeder Person, die befragt wird.

Da aber die Stichprobe vom Umfang 100 sehr klein ist im Vergleich zur gesamten Einwohnerzahl einer Großstadt, ist diese Änderung sehr gering und vernachlässigbar. Durch die zufällige Auswahl der Personen kann man zusätzlich davon ausgehen, dass die Ergebnisse der Befragungen unabhängig voneinander sind.
Man kann daher in guter Näherung eine Bernoulli-Kette annehmen.

Treffer: „besitzt Smartphone von A“
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = 0{,}15$ Länge: $n = 100$

89 Die Zufallsvariable X ist $B_{4;\,\frac{1}{3}}$-verteilt. Für die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** von X erhält man nach der Bernoulli-Formel mit $p = \frac{1}{3}$ und $q = 1 - p = \frac{2}{3}$:

$$P(X=0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 = 1 \cdot 1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81}$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81}$$

$$P(X=3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^1 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$$

$$P(X=4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^0 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{81} \cdot 1 = \frac{1}{81}$$

In Tabellenform:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

Erwartungswert von X:
$\mathbf{E(X)} = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$

Wahrscheinlichkeit:
$\mathbf{P(X \neq 1)} = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{32}{81} = \mathbf{\frac{49}{81}}$

90 Die Zufallsvariable X ist $B_{20;\,0{,}4}$-verteilt.

a) Erwartungswert von X:
$\mathbf{E(X)} = 20 \cdot 0{,}4 = \mathbf{8}$

b) Mit dem WTR erhält man:

→ WTR 7/8
(1) $P(X=10) \approx 0{,}1171$

(2) $P(X \neq 9) = 1 - P(X=9) \approx 0{,}8403$

(3) $P(X \leq 10) \approx 0{,}8725$

(4) $P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0{,}5841$

(5) $P(7 \leq X \leq 16) = P(X \leq 16) - P(X \leq 6) \approx 0{,}7499$

91 Die Erwartungswerte bei den vorgeschlagenen Parametern wären:

(1) $n = 10;\ p = 0{,}5$: $\mu = 10 \cdot 0{,}5 = 5$

(2) $n = 10;\ p = 0{,}4$: $\mu = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

(3) $n = 20;\ p = 0{,}6$: $\mu = 20 \cdot 0{,}6 = 12$

(4) $n = 20;\ p = 0{,}8$: $\mu = 20 \cdot 0{,}8 = 16$

(5) $n = 20;\ p = 0{,}42$: $\mu = 20 \cdot 0{,}42 = 8{,}4$

(6) $n = 9;\ p = 0{,}7$: $\mu = 9 \cdot 0{,}7 = 6{,}3$

(7) $n = 9;\ p = 0{,}8$: $\mu = 9 \cdot 0{,}8 = 7{,}2$

Für die weitere Lösung vergleicht man die Maximalstellen der Histogramme mit diesen Erwartungswerten. Zur Erinnerung: Eine Maximalstelle einer Binomialverteilung weicht um weniger als 1 vom Erwartungswert ab. Ist der Erwartungswert ganzzahlig, so stimmt er mit der Maximalstelle überein.

Histogramm A:
Das Maximum des Histogramms liegt bei $k = 5$. Von den berechneten Erwartungswerten kommt daher nur $\mu = 5$ infrage.
Zu A gehören die Parameter (1) $n = 10$ und $p = 0{,}5$.

Histogramm B:
Das Maximum des Histogramms liegt bei $k = 16$, der Erwartungswert kann daher nur $\mu = 16$ sein. Somit gilt:
Zu B gehören die Parameter (4) $n = 20$ und $p = 0{,}8$.

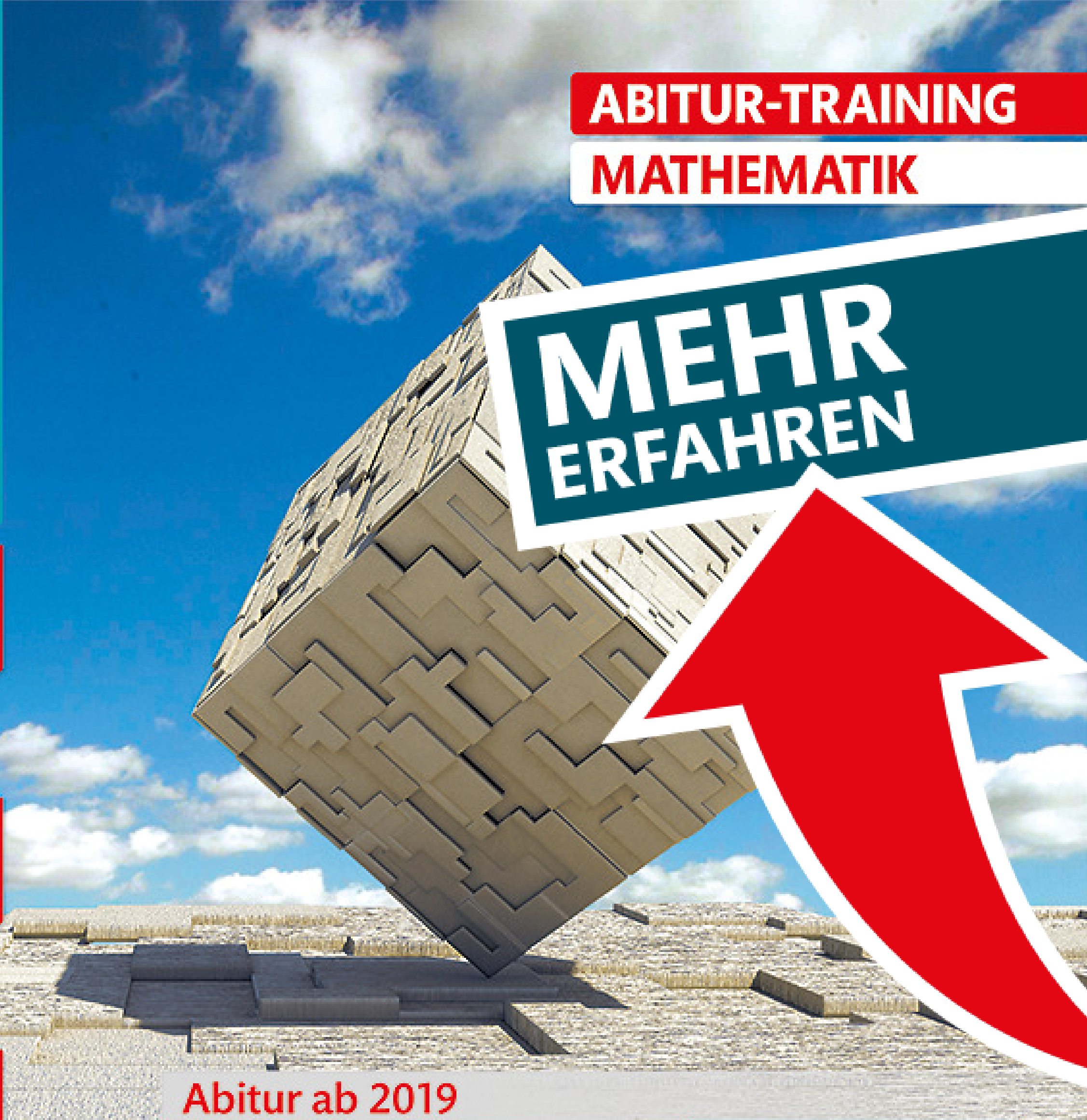
Histogramm C:
Das Maximum des Histogramms wird an den beiden Stellen $k_1 = 6$ und $k_2 = 7$ angenommen, der Erwartungswert muss dazwischenliegen. Dies gilt nur für $\mu = 6{,}3$.
Zu C gehören die Parameter (6) $n = 9$ und $p = 0{,}7$.

Anmerkung:
Gilt für den Erwartungswert μ und die Trefferwahrscheinlichkeit p einer Binomialverteilung, dass $\mu + p$ ganzzahlig ist (wie in diesem Fall $\mu + p = 6{,}3 + 0{,}7 = 7$), so nimmt die Binomialverteilung ihr Maximum an zwei benachbarten Stellen an. Der Erwartungswert μ liegt dazwischen.

Histogramm D:
Das Maximum des Histogramms liegt bei $k = 8$. Der Abbildung entnimmt man, dass nur $n = 20$ infrage kommt. Der Erwartungswert muss daher $\mu = 8{,}4$ sein.
Zu D gehören die Parameter (5) $n = 20$ und $p = 0{,}42$.

ABITUR-TRAINING
MATHEMATIK

GYMNASIUM



Abitur ab 2019

Baden-Württemberg

Analytische Geometrie

Pflicht- und Wahlteil

STARK

Inhalt

Vorwort

1 Wiederholung: Lineare Gleichungssysteme 1
1.1 Begriffsklärung 2
1.2 Das Gauß-Verfahren 3
1.3 Anzahl der Lösungen 6
1.4 Anwendungen 8

2 Darstellung geometrischer Objekte 11
2.1 Koordinatensystem 12
2.2 Schrägbilder 17

3 Vektoren 19
3.1 Definition 20
3.2 Punkte und Vektoren 20
3.3 Addition und skalare Multiplikation von Vektoren 22
3.4 Linearkombinationen 25

4 Skalarprodukt 29
4.1 Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts 30
4.2 Länge eines Vektors 32
4.3 Winkel zwischen zwei Vektoren 34

5 Parameterform von Geraden und Ebenen 37
5.1 Geraden 38
5.2 Ebenen 41

6 Weitere Darstellungsformen von Ebenen 45
6.1 Der Normalenvektor 46
6.2 Vektorprodukt 48
6.3 Normalenform der Ebene 50
6.4 Koordinatenform der Ebene 52
6.5 Spurpunkte und Spurgeraden 55

7 Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten 57
7.1 Berechnungen mithilfe der Parameterform 58
7.2 Berechnungen mithilfe der Koordinatenform 68

8 Schnittwinkel und Abstand 73
8.1 Schnittwinkel zwischen geometrischen Objekten 74
8.2 Abstand zwischen geometrischen Objekten 79

9 Flächeninhalt und Volumen **89**
9.1 Fläche eines Parallelogramms 90
9.2 Volumen eines Spats 92
9.3 Volumen einer Pyramide 93

10 Anwendungsaufgaben und Modellierung **97**

11 Aufgabenmix **103**

Lösungen **111**

Stichwortverzeichnis **201**

Autor: Eberhard Endres

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses Buch bietet Ihnen eine umfassende Zusammenstellung der Grundkompetenzen, die zum Lösen geometrischer Fragestellungen in der Oberstufe erforderlich sind, und unterstützt Sie damit bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik. Ab dem Abitur 2019 ist für die Abschlussprüfung ein wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR) zugelassen. Die Inhalte des Buches sind auf diesen Rechnertyp ausgelegt.

Die einzelnen Kapitel sind so aufgebaut, dass die Lerninhalte jeweils eines Themenbereichs übersichtlich hergeleitet und dargestellt sowie mit **Beispielen** erläutert werden. Wichtige **Begriffe** und **Definitionen** sind dabei in farbig getönten Feldern, **Regeln** und **Merksätze** in farbig umrandeten Kästen hervorgehoben. Jeder Abschnitt schließt mit **Übungsaufgaben** zur Einübung des Gelernten sowie zur eigenen Erfolgskontrolle.

Zunächst werden in den ersten drei Kapiteln mit der Wiederholung von **linearen Gleichungssystemen**, der **Darstellung geometrischer Objekte** sowie der Definition von **Vektoren** elementare Grundsteine gelegt, die zur Beschreibung und Untersuchung von **Geraden** und **Ebenen** benötigt werden. In weiteren Kapiteln werden die vektorgeometrischen Hilfsmittel **Skalarprodukt** und **Vektorprodukt** eingeführt, mit denen die **Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten** untersucht sowie **Abstands- und Winkelprobleme** behandelt werden können. Außerdem werden **Flächen- und Volumenberechnungen** mithilfe von Vektoren durchgeführt.

Die erworbenen Kenntnisse werden anschließend eingesetzt, um **anwendungsorientierte Fragestellungen** zu bearbeiten. Im letzten Kapitel finden Sie eine bunte **Sammlung von Aufgaben**, die Sie nach der Bearbeitung der vorhergehenden Kapitel zur eigenen **Erfolgskontrolle** und **Wiederholung** nutzen können.

Prinzipiell kann **jedes Kapitel separat** bearbeitet werden, jedoch bauen die meisten davon auf vorhergehenden Einheiten auf, sodass sich auch die Bearbeitung des gesamten Buches anbietet. Es steht Ihnen frei, über die Geschwindigkeit und Schwerpunkte der Bearbeitung selbst zu entscheiden.

Die **Lösungswege für alle Aufgaben** sind im Lösungsteil ausführlich dargestellt, um eine gewissenhafte Kontrolle zu ermöglichen und somit den Lernerfolg zu unterstützen. Die mit einem Stern **(✱)** gekennzeichneten Aufgaben sind etwas anspruchsvoller und regen in besonderer Weise zum Nachdenken an; Sie können diese beim ersten Durcharbeiten auch überspringen.

Viel Erfolg beim Abitur-Training Analytische Geometrie wünscht Ihnen

Eberhard Endres

Eberhard Endres

4.1 Definition und Eigenschaften des Skalarprodukts

In diesem Kapitel lernen Sie ein Produkt zwischen zwei Vektoren kennen, das durch seine Eigenschaften in vielen wichtigen geometrischen Fragestellungen Anwendung findet. Der Name Skalarprodukt weist darauf hin, dass das so definierte Produkt zweier Vektoren ein Skalar, also eine reelle Zahl, ist. Ein weiteres Produkt zwischen Vektoren lernen Sie in Kapitel 6 kennen.

Definition

Das **Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b}$** zwischen zwei reellen Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist definiert als:

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Bei zweidimensionalen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt sich entsprechend:

$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

Beispiel

Berechnen Sie $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) = -12 + 8 + 6 = 2$$

$$\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 0 \cdot 4) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 - 12 + 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Achten Sie auf den Unterschied zwischen dem Zeichen „∘" für Skalarprodukt und „·" für die skalare Multiplikation. Das Ergebnis des ersteren ist eine Zahl, das Ergebnis des letzteren ein Vektor. Die skalare Multiplikation hat dabei Vorrang vor dem Skalarprodukt. In diesem Buch wird konsequent das Zeichen „∘" für das Skalarprodukt verwendet.

Das Skalarprodukt besitzt einige wichtige Eigenschaften.

Regel

Eigenschaften des Skalarprodukts

- Das Skalarprodukt ist **kommutativ**: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
- Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{a}$ eines Vektors mit sich selbst ist nie negativ: $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$
  Man schreibt: $\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2$
- Das Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{a}$ eines Vektors mit sich selbst ist genau dann gleich null, wenn $\vec{a}$ der Nullvektor ist, also für $\vec{a} = \vec{o}$.
- Für das Skalarprodukt gilt das **Distributivgesetz**: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

Diese Eigenschaften lassen sich leicht nachweisen; dafür greift man immer auf die Definition des Skalarprodukts zurück.

Beispiel

Beweisen Sie das Kommutativgesetz für das Skalarprodukt.

Lösung:
Nach der Definition gelten folgende beiden Gleichungen:
$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ und $\vec{b} \circ \vec{a} = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$
Die jeweils rechten Seiten dieser Gleichungen stellen Terme in der Menge der reellen Zahlen dar. Für diese Terme gilt bekanntermaßen das Kommutativgesetz, sodass wegen $a_1b_1 = b_1a_1$ bzw. $a_2b_2 = b_2a_2$ bzw. $a_3b_3 = b_3a_3$ in der Menge der reellen Zahlen gilt:
$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$
Somit sind auch die linken Seiten der beiden Gleichungen gleich, d. h.
$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$.
Das Kommutativgesetz gilt folglich auch für das Skalarprodukt.

Aufgrund der Eigenschaften des Skalarprodukts können Sie also mit dieser Multiplikation von Vektoren genauso rechnen wie mit der Multiplikation von Zahlen. Unter anderem gelten die binomischen Formeln, z. B.:
$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{b}^2$ (vgl. Aufgabe 31)

Aufgaben

25. Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -s \\ r \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$

26. Bestimmen Sie die Zahl a so, dass das Skalarprodukt die angegebenen Werte besitzt.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 8$ b) $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$

27. Beweisen Sie, dass für das Skalarprodukt gilt:

a) $\vec{a} \circ \vec{a} \geq 0$ für alle Vektoren $\vec{a}$

b) $\vec{a} \circ \vec{a} = 0$ nur für $\vec{a} = \vec{o}$

c) Distributivgesetz: $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$

d) Für $k \in \mathbb{R}$ gilt: $k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b}$

28. Begründen Sie, dass folgende Gleichung in der Regel nicht gilt:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$

29. Markieren Sie diejenigen Malpunkte, die ein Skalarprodukt darstellen:
$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + 5 \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{d})$

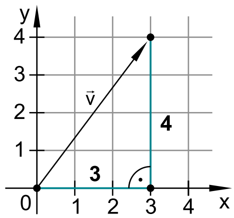
30. Vereinfachen Sie die Terme.
a) $\vec{a} \circ (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{c} \circ (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \circ (\vec{a} - \vec{c})$
b) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b})$

31. Berechnen Sie: $(\vec{a} + \vec{b})^2$ und $(\vec{a} - \vec{b})^2$

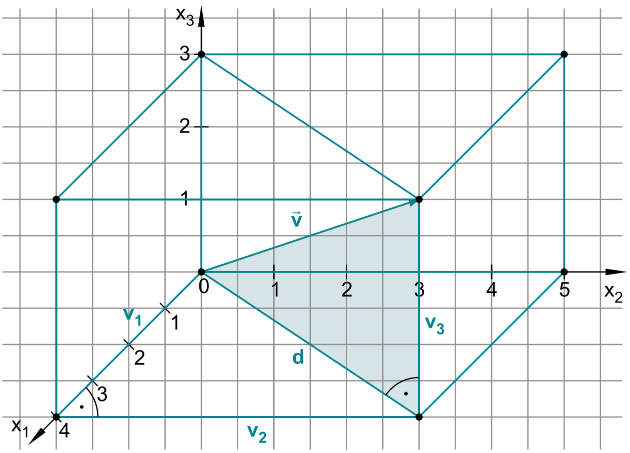
4.2 Länge eines Vektors

Stellt man den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in einem Koordinatensystem dar, so lässt sich seine Länge durch Ergänzung zu einem rechtwinkligen Dreieck berechnen. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich für die Länge des Vektors $\vec{v}$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$



Für dreidimensionale Vektoren gilt eine ähnliche Betrachtungsweise, wie man sich am Beispiel des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ anhand der Darstellung im Koordinatensystem klarmachen kann:



Der Vektor $\vec{v}$ zeigt vier Einheiten nach vorne, fünf Einheiten nach rechts und drei Einheiten nach oben. Umrahmt man diesen Vektor durch einen Quader mit den Seitenlängen $v_1 = 4$, $v_2 = 5$ und $v_3 = 3$, bildet er genau eine Raumdiagonale in diesem Quader. Für deren Länge L gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$L = |\vec{v}| = \sqrt{d^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{50}$

Allgemein gilt daher folgende Regel:

Regel

Länge eines Vektors

Die **Länge eines zweidimensionalen Vektors** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ beträgt $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Der **dreidimensionale Vektor** $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ besitzt die **Länge** $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

In beiden Fällen gilt: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}} = \sqrt{\vec{v}^2}$

Synonym zum Begriff Länge spricht man oft auch vom **Betrag des Vektors**.

Beachten Sie dabei aber, dass sich $\sqrt{\vec{v}^2}$ nicht zu $\vec{v}$, sondern nur zu $|\vec{v}|$ vereinfachen lässt!

Beispiel

Berechnen Sie die Länge des Vektors, der vom Punkt A(2|4|1) zum Punkt B(4|7|5) führt.

Lösung:

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ besitzt die Koordinaten

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 7-4 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und hat somit die Länge:

$$L = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$$

Aufgaben

32. Bestimmen Sie die Länge der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} r \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

33. Bestimmen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC mit A(1|2|–3), B(2|6|5), C(7|–4|–6).

25. a) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=3\cdot(-1)+2\cdot 2=-3+4=\mathbf{1}$

b) $\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-s\\r\end{pmatrix}=r\cdot(-s)+s\cdot r=-rs+rs=\mathbf{0}$

c) $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}=3\cdot 2+(-1)\cdot 5+0\cdot(-4)=6-5+0=\mathbf{1}$

d) $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-b\\a\\1\end{pmatrix}=a\cdot(-b)+b\cdot a+c\cdot 1=-ab+ab+c=\mathbf{c}$

26. a) $\begin{pmatrix}3\\a\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a\\-2\\5\end{pmatrix}=8 \iff 3a-2a+10=8 \iff a+10=8 \iff \mathbf{a=-2}$

b) $\begin{pmatrix}a\\a\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}a\\-2\\3\end{pmatrix}=6 \iff a^2-2a+6=6 \iff a^2-2a=0$

$\iff a\cdot(a-2)=0 \iff \mathbf{a=0 \text{ oder } a=2}$

27. a) $\vec{a}\circ\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2\geq 0$, weil alle drei Summanden Quadrate sind und nicht negativ sein können.

b) $\vec{a}\circ\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2=0$ kann sich nur ergeben, wenn $a_1^2=0$ und $a_2^2=0$ und $a_3^2=0$ gilt. Dies ist aber gleichbedeutend mit:

$\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{o}$

c) Vereinfachung der linken Seite der Behauptung ergibt:

$$\vec{a}\circ(\vec{b}+\vec{c})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\\b_3+c_3\end{pmatrix}$$
$$=a_1\cdot(b_1+c_1)+a_2\cdot(b_2+c_2)+a_3\cdot(b_3+c_3)$$
$$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3$$

Vereinfachung der rechten Seite liefert:

$$\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{c}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3$$

Die sechs Summanden stimmen in beiden Gleichungen überein, daher gilt das Distributivgesetz auch für das Skalarprodukt.

d) Gemäß Definition des Skalarprodukts gilt:
$k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = k \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = k \cdot a_1b_1 + k \cdot a_2b_2 + k \cdot a_3b_3$ und
$$(k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ k \cdot a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (k \cdot a_1) \cdot b_1 + (k \cdot a_2) \cdot b_2 + (k \cdot a_3) \cdot b_3$$
$$= k \cdot a_1b_1 + k \cdot a_2b_2 + k \cdot a_3b_3$$
Da diese beiden Terme gleich sind, gilt also: $k \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \circ \vec{b}$

28. Das Skalarprodukt $\vec{b} \circ \vec{c}$ ist eine reelle Zahl; daher ist $\vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c})$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{a}$. Andererseits ist $\vec{a} \circ \vec{b}$ ebenfalls eine reelle Zahl und somit $(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{c}$.
Wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ keine Vielfachen voneinander sind, dann können somit auch Vielfache dieser Vektoren nicht gleich sein und damit kann die Gleichung nicht richtig sein.

29. Im Teilterm $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ muss einer der beiden Malpunkte ein Skalarprodukt darstellen. Die Produkte $\vec{a} \circ \vec{c}$ und $\vec{a} \circ \vec{d}$ stellen ebenfalls Skalarprodukte und damit reelle Zahlen dar. Die anderen Malpunkte bedeuten die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl oder zweier Zahlen und sind somit kein Skalarprodukt-Verknüpfungszeichen. Der Term lautet also richtig:
$(\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} + 5 \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot (\vec{a} \circ \vec{c}) \cdot (\vec{a} \circ \vec{d})$
oder alternativ:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \circ \vec{c}) + 5 \cdot \vec{d} - \vec{b} \cdot (\vec{a} \circ \vec{c}) \cdot (\vec{a} \circ \vec{d})$

30. a) $\vec{a} \circ (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{c} \circ (\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} \circ (\vec{a} - \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{c} \circ \vec{a} - \vec{c} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{a} + \vec{b} \circ \vec{c}$
$= \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{a} \circ \vec{c} - \vec{b} \circ \vec{c} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{c} = \mathbf{\vec{o}}$

b) $(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{b} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{b} - \vec{b} \circ \vec{b}$
$= \vec{a} \circ \vec{a} - \vec{b} \circ \vec{b} = \mathbf{\vec{a}^2 - \vec{b}^2}$

31. $$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$
$$= (a_1 + b_1) \cdot (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \cdot (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \cdot (a_3 + b_3)$$
$$= a_1^2 + 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 + 2a_3b_3 + b_3^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + 2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$
$$= \mathbf{\vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) + \vec{b}^2}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})\circ(\vec{a}-\vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_1-b_1)\cdot(a_1-b_1)+(a_2-b_2)\cdot(a_2-b_2)+(a_3-b_3)\cdot(a_3-b_3) \\ &= a_1^2-2a_1b_1+b_1^2+a_2^2-2a_2b_2+b_2^2+a_3^2-2a_3b_3+b_3^2 \\ &= a_1^2+a_2^2+a_3^2-2\cdot(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+b_1^2+b_2^2+b_3^2 \\ &= \mathbf{\vec{a}^2-2\cdot(\vec{a}\circ\vec{b})+\vec{b}^2}\end{aligned}$$

32. $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

$|\vec{b}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+s^2} = \mathbf{\sqrt{1+s^2}}$

$|\vec{c}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2+(-4)^2+1^2} = \sqrt{64+16+1} = \sqrt{81} = \mathbf{9}$

$|\vec{d}| = \left|\begin{pmatrix} r \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2+(-4)^2+3^2} = \sqrt{r^2+16+9} = \mathbf{\sqrt{r^2+25}}$

33. Drückt man die Seiten des Dreiecks durch die entsprechenden Vektoren aus, erhält man:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 6-2 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\quad \mathbf{c} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+4^2+8^2} = \sqrt{1+16+64} = \sqrt{81} = \mathbf{9}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ -4-6 \\ -6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\quad \mathbf{a} = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2+(-10)^2+(-11)^2} = \sqrt{25+100+121} = \mathbf{\sqrt{246} \approx 15{,}7}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ -4-2 \\ -6-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\quad \mathbf{b} = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2+(-6)^2+(-3)^2} = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = \mathbf{9}$

34. a) $\cos\gamma = \dfrac{\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{9}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{\gamma \approx 41{,}6°}$

b) $\cos\gamma = \dfrac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{0}{5\cdot 15} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{\gamma = 90°}$