2021

Realschule

Original-Prüf…
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Bayern

Mathematik II

+ *Weitere Prüfungsaufgaben*

PDF

Original-Prüfungsaufgaben **2020** zum Download

STARK

Inhalt

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

PDF zum Download

Auf die PDF mit den Abschlussprüfungen 2002 bis 2013 kann online zugegriffen werden. Der Zugangscode ist auf der Umschlaginnenseite zu finden.

Jeweils im Herbst erscheinen die neuen Ausgaben
der Abschlussprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Lösungen der Abschlussprüfungsaufgaben:
2002–2014: RSD Alois Einhauser und StD Dietmar Steiner
ab 2015: RSD Alois Einhauser

Übungsaufgaben:
RSD Alois Einhauser

Hinweise

Die Abschlussprüfungsaufgaben im Fach Mathematik werden vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus zentral für alle bayerischen Realschulen gestellt.

Die Abschlussprüfung setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil (A) besteht aus drei kurzen Aufgaben zu den Themenbereichen Funktionen, ebene Geometrie und Raumgeometrie. Der zweite Teil (B) besteht aus zwei komplexeren Aufgaben. Die erreichbare Anzahl der Punkte ist im Teil B etwa doppelt so hoch wie im Teil A.

Sie haben zur Bearbeitung der Aufgaben **150 Minuten** Zeit. Als Hilfsmittel sind elektronische Taschenrechner (auch grafikfähige) und eine zugelassene Formelsammlung erlaubt.

Zur Lösung der Aufgaben:

1. Bei allen Aufgaben sollen die Lösungen sinnvoll gerundet werden.
2. Bei einer Reihe von Aufgaben ist es ratsam, sich zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung eine Zeichnung bzw. Skizze zu erstellen.
3. Vorgehensweise für die Erstellung von Schrägbildern:
   a) Zeichnen der Schrägbildachse (waagrecht auf dem Arbeitsblatt).
   b) Antragen der gegebenen Strecke, die laut Angabe auf der Schrägbildachse liegen soll, auf dieser.
   c) Antragen einer Geraden, die mit der Schrägbildachse den angegebenen Winkel ω einschließt, in einem Endpunkt der in b angetragenen Strecke.
   d) Alle Linien, die senkrecht zur Zeichenebene verlaufen, werden im Schrägbild unter dem Winkel ω angetragen.
   Alle Strecken, die senkrecht zur Zeichenebene verlaufen, werden mit dem Faktor q verkürzt angetragen.
   e) Strecken, die in der Zeichenebene oder parallel zu dieser liegen, werden in wahrer Länge angetragen.

Zu allen Aufgaben haben wir ausführliche **Lösungsvorschläge** abgedruckt, die möglichst nur zur Kontrolle benutzt werden sollten. Wenn Sie nicht weiterkommen, sollen Ihnen unsere grau markierten **Hinweise und Tipps** helfen, den Lösungsweg zu erkennen. Zuerst sollten Sie selbst die Lösung finden und dann mit dem Buch vergleichen. Nur wenn man sich selbst anstrengt, bleibt der Stoff auch im Gedächtnis und man „lernt“ dazu.

Übungsaufgaben

Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen

Lehrplaninhalte:

Quadratische Funktionen
- Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2 + bx + c$: Graphen und Eigenschaften; Sonderformen; Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung für verschobene Parabeln
- Gleichungen von Parabeln ermitteln
- Bearbeiten von Extremwertproblemen (nur quadratische Terme)

Aufgaben 1; 3 bis 12

Quadratische Gleichungen
- Quadratische Gleichungen lösen (quadratische Ergänzung, gegebenenfalls auch grafische Lösung); Diskriminante und Lösbarkeit; Lösungsformel
- Berechnen der Koordinaten von Schnittpunkten (Gerade $\cap$ Parabel, Parabel $\cap$ Parabel)
- Untersuchen der Tangentiallage zweier Funktionsgraphen

Aufgaben 2; 3; 10 bis 12

1 Bestimmen Sie die Scheitelpunkte der Parabeln mit folgenden Gleichungen ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$):

p_1: $y = -4x^2 + 8x - 3$ | p_2: $y = 0{,}25x^2 + 3x$

p_3: $y = -2x^2 + 1{,}5$ | p_4: $y = -5x + x^2 + 2$

p_5: $y = 3 \cdot (x^2 - 3x + 2)$ | p_6: $y = (4x - 2) \cdot (x + 1)$

2 Ermitteln Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$):

(1) $(4x - 2) \cdot (x + 1) = 0$ | (2) $5x^2 - 4x = 0$

(3) $-x^2 - 2x + 1 = 0$ | (4) $2x^2 - 9x = -9$

(5) $3 \cdot (x^2 + 3x + 2) = 9$ | (6) $(2x - 2) \cdot (3x + 1) - 5x^2 = x^2 - 4$

3.1 Ermitteln Sie durch Rechnung die Schnittpunkte der Parabel p_1 mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$ und der Parabel p_2 mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 3$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Überprüfen Sie das Ergebnis grafisch.

3.2 Ermitteln Sie durch Rechnung die Schnittpunkte der Parabel p_1 mit der Gleichung $y = -x^2 + x + 3$ und der Parabel p_2 mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

3.3 Ermitteln Sie durch Rechnung die Schnittpunkte der Parabel p mit der Gleichung $y = 0{,}25x^2 + 2x - 3$ und der Geraden g, die durch die Punkte $A(-3 \mid -2)$ und $B(1 \mid 3)$ verläuft ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.)

3.4 Ermitteln Sie durch Rechnung die Schnittpunkte der Parabel p mit der Gleichung $y = -0{,}25x^2 + 0{,}5x + 5$ und der Geraden g, für die gilt: $\sphericalangle$(x-Achse; g) = 26,57° und $A(-1 \mid 3{,}5) \in g$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). (Auf zwei Stellen nach dem Komma runden.) Überprüfen Sie das Ergebnis grafisch.

3.5 Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Gerade g mit der Gleichung $y = 4x + 2$ eine Tangente an die Parabel p mit der Gleichung $y = x^2 + 6x + 3$ ist, und ermitteln Sie die Koordinaten des Berührpunktes B ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Überprüfen Sie das Ergebnis grafisch.

4 Die Parabel p hat eine Gleichung der Form $y = 0{,}5x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Sie verläuft durch die Punkte $A(-1 \mid 9{,}5)$ und $B(5 \mid -2{,}5)$. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel p.

5 Die Parabel p hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sie hat den Scheitel $S(-3 \mid -1)$ und verläuft durch den Punkt $P(1 \mid -5)$. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel p.

6 Die Symmetrieachse der nach unten geöffneten Normalparabel p hat die Gleichung $x = 2$ ($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Der Punkt $P(0{,}5 \mid 6{,}75)$ liegt auf der Parabel p. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel p.

7 Der Punkt $S(0 \mid 2{,}5)$ ist der Scheitel der nach unten geöffnete Normalparabel p. Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel p.

Lösungen

Quadratische Funktionen; quadratische Gleichungen

1 **Parabel p_1**

$y = -4x^2 + 8x - 3$	$(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$
$y = -4 \cdot \left(x^2 - 2x + \frac{3}{4}\right)$	ausklammern
$y = -4 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2 - 1 + \frac{3}{4}\right)$	quadratisch ergänzen
$y = -4 \cdot \left[(x-1)^2 - \frac{1}{4}\right]$	
$y = -4 \cdot (x - 1)^2 + 1$	ausmultiplizieren
$S_1(1 \mid 1)$	

Hinweis: Oft wird das nicht vollständige Ausklammern bevorzugt, der Lösungsweg lautet dann folgendermaßen:

$y = -4x^2 + 8x - 3$	$(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$
$y = -4 \cdot (x^2 - 2x) - 3$	ausklammern
$y = -4 \cdot (x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2 - 1) - 3$	quadratisch ergänzen
$y = -4 \cdot [(x - 1)^2 - 1] - 3$	
$y = -4 \cdot (x - 1)^2 + 4 - 3$	ausmultiplizieren
$y = -4 \cdot (x - 1)^2 + 1$	
$S_1(1 \mid 1)$	

Parabel p_2

$y = 0{,}25x^2 + 3x$	$(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$
$y = 0{,}25 \cdot (x^2 + 12x)$	ausklammern
$y = 0{,}25 \cdot (x^2 + 2 \cdot 6x + 6^2 - 36)$	quadratisch ergänzen
$y = 0{,}25 \cdot [(x + 6)^2 - 36]$	
$y = 0{,}25 \cdot (x + 6)^2 - 9$	ausmultiplizieren
$S_2(-6 \mid -9)$	

Parabel p_3

$y = -2x^2 + 1{,}5$	$(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$
$S_3(0 \mid 1{,}5)$	

Parabel p_4

$y = -5x + x^2 + 2$	$(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$
$y = x^2 - 5x + 2$	
$y = (x^2 - 2 \cdot 2{,}5x + 2{,}5^2 - 6{,}25) + 2$	quadratisch ergänzen
$y = (x - 2{,}5)^2 - 4{,}25$	
$S_4(2{,}5 \mid -4{,}25)$	

Parabel p_5

$y = 3 \cdot (x^2 - 3x + 2)$ $\quad$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$
$y = 3 \cdot (x^2 - 3x) + 6$
$y = 3 \cdot (x^2 - 2 \cdot 1{,}5x + 1{,}5^2 - 2{,}25) + 6$ $\quad$ quadratisch ergänzen
$y = 3 \cdot [(x - 1{,}5)^2 - 2{,}25] + 6$
$y = 3 \cdot (x - 1{,}5)^2 - 6{,}75 + 6$ $\quad$ ausmultiplizieren
$y = 3 \cdot (x - 1{,}5)^2 - 0{,}75$
$S_5(1{,}5 \,|\, -0{,}75)$

Parabel p_6

$y = (4x - 2) \cdot (x + 1)$ $\quad$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$
$y = 4x^2 + 2x - 2$

$$y = 4 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2} x \right) - 2 \qquad \text{ausklammern}$$

$$y = 4 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} x + \left(\frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right) - 2 \qquad \text{quadratisch ergänzen}$$

$$y = 4 \cdot \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right] - 2$$

$$y = 4 \cdot \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{4} - 2 \qquad \text{ausmultiplizieren}$$

$$y = 4 \cdot \left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - 2\frac{1}{4}$$

$$S_6\left(-\frac{1}{4} \,\middle|\, -2\frac{1}{4} \right)$$

2 *Hinweis:*
Um die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung zu ermitteln, kann man die Gleichung auf die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$ bringen und in die allgemeine Lösungsformel einsetzen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$$

Gleichung 1

$(4x - 2) \cdot (x + 1) = 0$ $\quad$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R})$
$\Leftrightarrow \quad 4x - 2 = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \quad x = 0{,}5 \quad \vee \quad x = -1$ $\quad$ $\mathbb{L} = \{-1; 0{,}5\}$

oder Lösung mit Formel:

$(4x - 2) \cdot (x + 1) = 0$ $\quad$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R})$
$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 2x - 2 = 0$

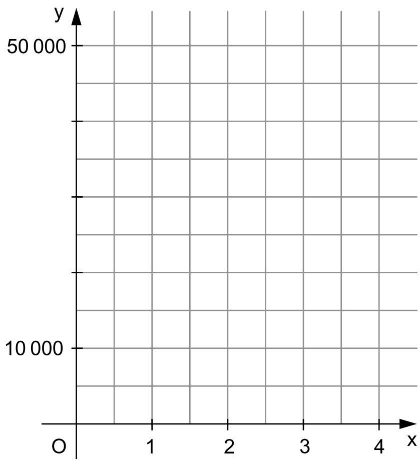
Abschlussprüfung an Realschulen 2018 – Mathematik II/III
Teil A

Aufgabe A 1

A 1.0 Die Anzahl der Ladestationen für Elektrofahrzeuge in Deutschland soll laut einer Prognose in den nächsten Jahren exponentiell wachsen. Diese Entwicklung kann man näherungsweise durch die Funktion
$f\colon y = 5\,000 \cdot 1{,}75^x$ $(\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$
beschreiben, wobei x die Anzahl der Jahre und y die Anzahl der Ladestationen darstellt.

A 1.1 Ergänzen Sie die Wertetabelle auf Tausender gerundet und zeichnen Sie sodann den Graphen der Funktion f in das Koordinatensystem ein. 2

x	0	1	2	3	4
$5\,000 \cdot 1{,}75^x$					



A 1.2 Ermitteln Sie mithilfe des Graphen, nach welcher Zeit die ursprüngliche Anzahl der Ladestationen erstmals um 600 % zugenommen haben wird. 2

A 1.3 Geben Sie an, welche jährliche Zunahme in Prozent in dieser Prognose angenommen wurde. 1

Aufgabe A 2

A 2.0 Die nebenstehende Zeichnung zeigt das Viereck ABCD.

Es gilt:

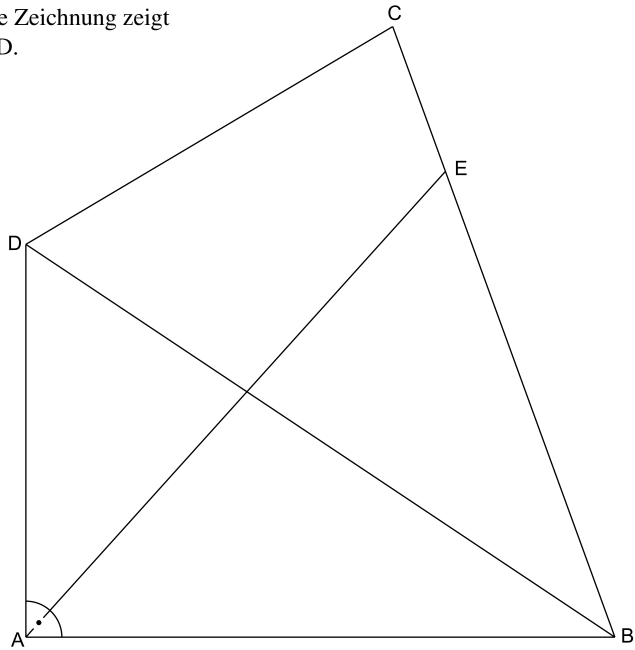
$\overline{AB} = 7{,}8$ cm;

$\overline{AD} = 5{,}2$ cm;

$\overline{BC} = 8{,}6$ cm;

$\sphericalangle BAD = 90°$;

$\sphericalangle CBA = 70°$.



Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

A 2.1 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen [BD] und den Flächeninhalt A des Dreiecks BCD.

[Ergebnisse: $\overline{BD} = 9{,}4$ cm; $A = 23{,}9$ cm^2] 4

A 2.2 Der Punkt E liegt auf der Strecke [BC]. Die Dreiecke ABE und BCD besitzen den gleichen Flächeninhalt.
Berechnen Sie die Länge der Strecke [AE].

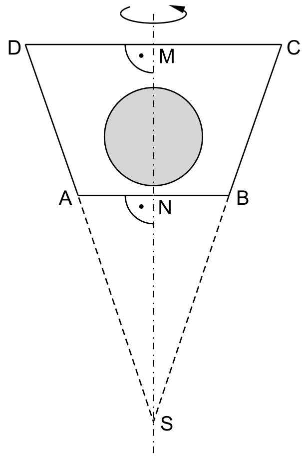
[Teilergebnis: $\overline{BE} = 6{,}5$ cm; Ergebnis: $\overline{AE} = 8{,}3$ cm] 2

A 2.3 Der Kreis um E mit dem Radius 3 cm schneidet die Strecke [AE] im Punkt P und die Strecke [BE] im Punkt Q.

Zeichnen Sie den Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ in die Zeichnung zu A 2.0 ein.
Berechnen Sie sodann den Flächeninhalt des Kreissektors, der durch die Strecken [QE], [EP] und den Kreisbogen $\overset{\frown}{PQ}$ begrenzt wird. 3

Aufgabe A 3

A 3.0 Die nebenstehende Skizze zeigt den Axialschnitt ABCD eines Rotationskörpers mit der Rotationsachse MS. Dieser Körper dient als Muster zur Herstellung einer Praline. Die Praline besteht aus Schokolade und einer kugelförmigen Cremefüllung. Der Anteil der Schokolade am Volumen der Praline beträgt 89 %.



Es gilt:

$\overline{MS} = 5$ cm;

$\overline{MN} = 2$ cm;

$\sphericalangle ADM = 71{,}6°$.

Runden Sie im Folgenden auf eine Stelle nach dem Komma.

A 3.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass für die Strecken [MD] und [AN] gilt:
$\overline{MD} = 1{,}7$ cm und $\overline{AN} = 1{,}0$ cm. 2

A 3.2 Berechnen Sie das Volumen V der Cremefüllung. 3

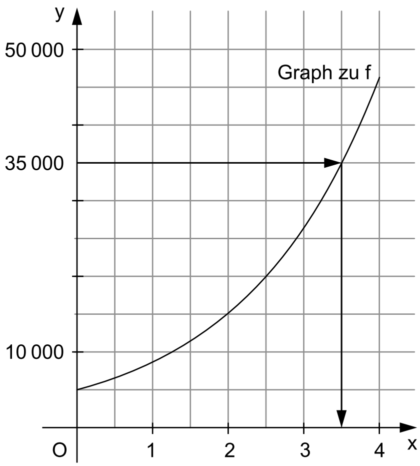
19

Lösung

Aufgabe A 1

A 1.1 Einzeichnen des Graphen zu f mithilfe der Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4
$5\,000 \cdot 1{,}75^x$	5 000	9 000	15 000	27 000	47 000



A 1.2 600 % von 5 000 sind 30 000. Bei einer Zunahme des Anfangswertes um 30 000 erhält man 35 000 Ladestationen.

oder:

Man kann auch mit „Kästchen rechnen":
Vom Anfangswert des Graphen auf der y-Achse (bei 1 Kästchen) muss man um 600 % (6 Kästchen) nach oben gehen. D. h., den gesuchten Zeitpunkt kann man von $1 + 6 = 7$ Kästchen auf der y-Achse ausgehend ablesen.

Im Rahmen der Zeichengenauigkeit: nach 3,5 Jahren

A 1.3 Bei einer Multiplikation mit 1,75 erhöht sich der Wert um den Faktor 0,75.

Jährliche Zunahme: 75 %

Aufgabe A 2

A 2.1 Berechnung von $\overline{BD}$ mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck DAB:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \qquad \Big|\sqrt{}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{7{,}8^2 + 5{,}2^2}\ \text{cm}$$

$$\overline{BD} = 9{,}4\ \text{cm}$$

Um den Flächeninhalt des Dreiecks BCD berechnen zu können, benötigt man neben den beiden gegebenen Seitenlängen $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$ den Zwischenwinkel CBD mit $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA - \sphericalangle DBA$. Man bestimmt daher zunächst das Winkelmaß $\sphericalangle DBA$.

Im rechtwinkligen Dreieck DAB gilt:

$$\tan \sphericalangle DBA = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

$$\tan \sphericalangle DBA = \frac{5{,}2\ \text{cm}}{7{,}8\ \text{cm}}$$

$$\sphericalangle DBA = 33{,}7^\circ$$

Für das Maß des Winkels CBD gilt:

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle CBA - \sphericalangle DBA$$

$$\sphericalangle CBD = 70^\circ - 33{,}7^\circ$$

$$\sphericalangle CBD = 36{,}3^\circ$$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks BCD gilt:

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \sphericalangle CBD$$

$$A_{BCD} = \left(\frac{1}{2} \cdot 9{,}4 \cdot 8{,}6 \cdot \sin 36{,}3^\circ\right) \text{cm}^2$$

$$A_{BCD} = 23{,}9\ \text{cm}^2$$

A 2.2 Um die Länge der Strecke [AE] mit dem Kosinussatz im Dreieck ABE bestimmen zu können, berechnet man zunächst die Länge der Strecke [BE].

Berechnung von $\overline{BE}$:

$$A_{BCD} = A_{ABE}$$

$$A_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BE} \cdot \sin \sphericalangle EBA \qquad \Big| \cdot \frac{2}{\overline{AB} \cdot \sin \sphericalangle EBA}$$

$$\overline{BE} = \frac{2 \cdot A_{BCD}}{\overline{AB} \cdot \sin \sphericalangle EBA} \qquad \text{mit } \sphericalangle EBA = \sphericalangle CBA = 70^\circ$$

$$\overline{BE} = \frac{2 \cdot 23{,}9\ \text{cm}^2}{7{,}8\ \text{cm} \cdot \sin 70^\circ}$$

$$\overline{BE} = 6{,}5\ \text{cm}$$