

2021 Training

Mittlerer Schulabschluss

**MEHR
ERFAHREN**

Realschule · Gesamtschule EK · Sek II
Nordrhein-Westfalen

Mathematik 10. Klasse

- + *Basiswissen mit Übungen*
- + *Herausnehmbare Formelsammlung*
- + *Original-Prüfung*



STARK

Inhalt

Vorwort

Hinweise und Tipps	I
1 Hinweise zur Zentralen Prüfung	I
2 Wie man für die Prüfung lernen kann	IV
3 Das Lösen einer mathematischen Aufgabe	VI
Training Grundwissen	1
1 Wiederholung 5.–9. Klasse	3
1.1 Terme	3
Termumformungen	4
Zerlegung von Termen in Produkte – Faktorisieren	9
Bruchterme	10
1.2 Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen	14
1.3 Proportionale und antiproportionale Zuordnungen	16
Proportionale Zuordnungen	16
Nicht-proportionale Zuordnungen	17
Antiproportionale Zuordnungen	17
1.4 Prozent- und Zinsrechnung	18
1.5 Umrechnungen von Größen	24
1.6 Ebene Figuren	26
1.7 Potenzen	28
Definitionen	28
Gesetze für das Rechnen mit Potenzen	29
Sehr große und sehr kleine Zahlen	29
Gleichungen mit Potenzen der Form $x^n = a$	30
2 Lineare Funktionen – Lineare Gleichungssysteme	32
2.1 Lineare Funktionen	32
Lineare Funktionen der Form $f: y = m \cdot x$	33
Allgemeine lineare Funktionen $f: y = m \cdot x + t$	36
2.2 Lineare Gleichungssysteme	40
Grafisches Lösungsverfahren	40
Rechnerische Lösungsverfahren	41
3 Quadratische Funktionen und Gleichungen	46
3.1 Quadratische Funktionen	46
Die quadratische Funktion $f: y = x^2$	46
Quadratische Funktionen der Form $f: y = ax^2$	46

	Quadratische Funktionen der Form $f: y = ax^2 + n$	49
	Quadratische Funktionen der Form $f: y = a(x - m)^2$	51
	Quadratische Funktionen der Form $f: y = a(x - m)^2 + n$	53
3.2	Extremwertaufgaben	56
3.3	Quadratische Gleichungen	61
	Reinquadratische Gleichungen mit $b = 0$	61
	Quadratische Gleichungen mit $b \neq 0$	62
3.4	Nullstellen von Parabeln	65
3.5	Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade	67
4	Exponentialfunktionen und Wachstumsprozesse	70
4.1	Exponentielle Zunahme und exponentielle Abnahme	70
4.2	Exponentialfunktionen	72
4.3	Exponentialgleichungen	78
5	Grafische Darstellungen und Diagramme	81
5.1	Interpretation von grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge	81
	Lineares Wachstum, lineare Abnahme	83
	Nicht lineares Wachstum	90
5.2	Analyse grafischer Darstellungen bei statistischen Datenerhebungen	93
6	Ähnlichkeit	99
6.1	Ähnliche Figuren	99
6.2	Zentrische Streckung	100
7	Sätze am rechtwinkligen Dreieck	106
7.1	Der Satz des Pythagoras	106
7.2	Der Satz des Thales	110
8	Trigonometrie	112
8.1	Trigonometrische Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken	112
8.2	Berechnungen in beliebigen Dreiecken	119
9	Kreis	122
9.1	Kreisfläche und Kreisumfang, Kreisring	122
9.2	Kreisbogen und Kreissektor, Berechnungen am Kreis und an Kreisteilen	125
10	Körper	129
10.1	Schrägbild und Netz eines Körpers	129
10.2	Prisma	133
10.3	Kreiszylinder	139
10.4	Pyramide	142
10.5	Kegel	148
10.6	Kugel	151
10.7	Rotationskörper, zusammengesetzte Körper und Restkörper	154

11	Stochastik	160
11.1	Statistische Grundbegriffe	160
11.2	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	169
11.3	Die Wahrscheinlichkeit bei Zufallsexperimenten	169
11.4	Wahrscheinlichkeit und das Gesetz der großen Zahlen	172
11.5	Mehrstufige Zufallsexperimente	173
12	Werkzeuge	178
12.1	Arbeiten mit dem Taschenrechner	178
12.2	Arbeiten mit einer Tabellenkalkulation	181

Aufgaben im Stil der Zentralen Prüfung **187**

Vorschlag 1	189
Vorschlag 2	194
Vorschlag 3	199
Vorschlag 4	203

Zentrale Prüfung **207**

Zentrale Prüfung 2019	2019-1
-----------------------------	--------

Wegen des Corona-Virus wurden 2020 die Zentralen Prüfungen in Klasse 10 ersetzt durch Prüfungsarbeiten, die dezentral von den Lehrkräften erstellt wurden. Für 2020 können daher keine Original-Aufgaben abgedruckt werden.



Dieses Buch ist in zwei Versionen erhältlich: mit und ohne ActiveBook. Hast du die Ausgabe **mit ActiveBook** (51500ML) erworben, kannst du mit dem **Interaktiven Training** online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Symbol gekennzeichnet. Am besten gleich ausprobieren!



Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du in der Ausgabe mit ActiveBook auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autorinnen und Autoren:

Christoph Borr, Doris Cremer, Olaf Klärner, Karl-Heinz Kuhlmann, Wolfgang Matschke, Marc Möllers, Heike Ohrt, Dietmar Steiner

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

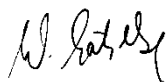
mit vorliegendem Buch kannst du dich **schon ab der 9. Klasse** auf die **Zentrale Prüfung** in Mathematik zum **mittleren Schulabschluss** vorbereiten.

Gerade bei einer zentral gestellten Prüfung ist das **Grundwissen** besonders wichtig. Denn es geht nicht um irgendwelche Spezialkenntnisse, die du vielleicht gut beherrschst, sondern die Aufgaben in der Prüfung werden auf einem möglichst breiten Grundwissen aufbauen. Es geht vor der Prüfung also um eine Gesamtwiederholung.

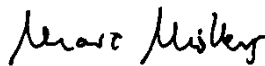
- ▶ Daher beginnt dieses Buch mit einem ausführlichen **Trainingsteil**. Im Kapitel 1 werden die wichtigsten Themen der 5. bis 9. Klasse so kurz wie möglich wiederholt, die Kapitel 2 bis 11 behandeln intensiv sämtliche prüfungsrelevanten Bereiche der 9. und 10. Klasse. In den einzelnen Kapiteln findest du insgesamt 210 Aufgaben, anhand derer du überprüfen kannst, ob du den Stoff sicher beherrschst. Wenn du dich bereits fit fühlst, kannst du direkt mit den **Anwendungsaufgaben** beginnen. Sollten dir diese Aufgaben noch Schwierigkeiten bereiten, kannst du die erforderlichen Stoffgebiete im Trainingsteil selbstständig erarbeiten und dich dann über die Lösung der Aufgaben zum **Grundwissen** erneut an die Anwendungsaufgaben machen.
- ▶ Wenn die einzelnen Themen „sitzen“, du die Aufgaben also lösen kannst, geht es weiter mit den **Aufgaben im Stil der Zentralen Prüfung**. Diese Aufgaben sind nicht mehr nach Themengebieten unterteilt, sondern – wie in der Prüfung – aus den verschiedensten Bereichen zusammengestellt. Es kommt also zunächst darauf an zu erkennen, *wie* die jeweilige Aufgabe gelöst werden könnte, welchem Themengebiet sie zuzuordnen ist. Der Rest sollte mit deinem Vorwissen aus dem Trainingsteil ganz einfach gehen. Ein wichtiger Gesichtspunkt in der Prüfung ist die **Bearbeitungszeit**. Daher solltest du *vor* der Prüfung schon unter echten Prüfungsbedingungen üben. In der Prüfung hast du **120 Minuten** Zeit, unterteilt in 30 Minuten für den 1. Teil und 90 Minuten für den 2. Teil. Auch wenn du anfangs die Aufgaben innerhalb dieser Zeit nicht schaffst, solltest du die „Prüfung“ in Abständen wiederholen, bis du sicher bist und die Aufgaben richtig und in der vorgesehenen Zeit löst. Wenn du merkst, dass du immer wieder über dasselbe Problem stolperst, solltest du das entsprechende Trainingskapitel wiederholen.
- ▶ Jetzt kannst du dich an die zuletzt gestellte **Zentrale Prüfung** wagen. Schaffst du es, diese in der vorgegebenen Zeitspanne und nur mit den zulässigen Hilfsmitteln zu bearbeiten, bist du optimal vorbereitet.

Zu allen Aufgaben gibt es in einem separaten Buch (Best.-Nr. 51500L) ausführliche **Lösungen**, in denen jeder Rechenschritt erklärt ist. Zahlreiche Skizzen zur Veranschaulichung helfen dir beim Nachvollziehen von Sachverhalten. Beachte: Du solltest immer versuchen, die Lösung selbst zu finden, und erst dann mit dem Lösungsbuch vergleichen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der anstehenden Zentralen Prüfung vom Schulministerium bekannt gegeben werden, findest du aktuelle Informationen dazu im Internet unter: **www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell**



Wolfgang Matschke



Marc Möllers

4.2 Exponentialfunktionen

Vorgänge, bei denen ein Anfangswert c in regelmäßigen Schritten x immer um denselben Faktor a zu- bzw. abnimmt bezeichnet man als **exponentielle Wachstumsprozesse**. Im Sinne eines negativen Wachstums sind dabei auch Abnahmeprozesse eingeschlossen. Derartige Vorgänge können mathematisch durch **Exponentialfunktionen** beschrieben werden, in denen die **Variable x im Exponenten** auftritt:

Merke

Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen mit der Funktionsgleichung:

$$y = c \cdot a^x \quad (a > 0 \text{ und } a \neq 1 \text{ und } c \neq 0)$$

Dabei gilt: c : Anfangswert; a : Wachstumsfaktor; x : Wachstumsschritte; y : Endwert

Bei einer prozentualen Zu-/Abnahme um Prozentsatz p % gilt für Wachstumsfaktor a :

- Falls eine **Zunahme um p %** in jedem Schritt vorliegt, gilt: $a = 1 + \frac{p}{100}$ ($\Rightarrow a > 1$)
- Falls eine **Abnahme um p %** in jedem Schritt vorliegt, gilt: $a = 1 - \frac{p}{100}$ ($\Rightarrow 0 < a < 1$)

Für den Graphen einer Exponentialfunktion mit der Gleichung $y = c \cdot a^x$ gilt:

- Der Graph verläuft durch den Punkt $(0|c)$.
(Nach $x=0$ Wachstumsschritten entspricht der Endwert dem Anfangswert, d. h. $y=c$.)
- Der Graph hat die x -Achse als Asymptote, d. h. als eine Art Grenzgerade.
- Für $a > 1$: Der Graph steigt: **Exponentielles Wachstum**
Für $0 < a < 1$: Der Graph fällt: **Exponentielle Abnahme**
- Der Graph von $y = c \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x$ ergibt sich aus dem Graphen von $y = c \cdot a^x$ durch Spiegelung an der y -Achse.

In den folgenden Beispielen ist der Anfangswert $c=1$.

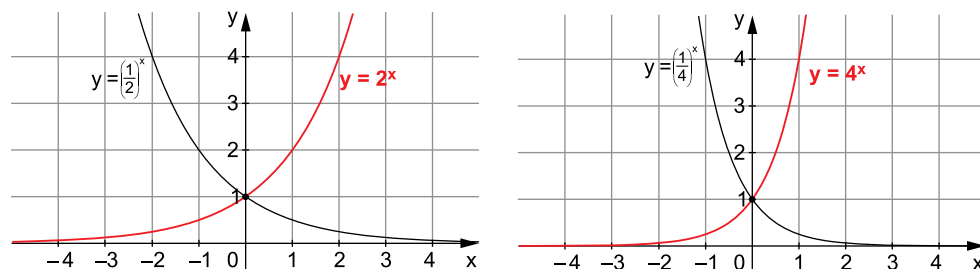
Beispiele

$$\begin{array}{ll} f_1: y = 2^x & f_3: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ f_2: y = 4^x & f_4: y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \end{array}$$

Wertetabelle

	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f_1	y	$\frac{1}{8} = 0,125$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{2} = 0,5$	1	2	4	8
f_2	y	$\frac{1}{64} \approx 0,016$	$\frac{1}{16} \approx 0,063$	$\frac{1}{4} = 0,25$	1	4	16	64
f_3	y	8	4	2	1	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{8} = 0,125$
f_4	y	64	16	4	1	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{1}{16} \approx 0,063$	$\frac{1}{64} \approx 0,016$

Graphen



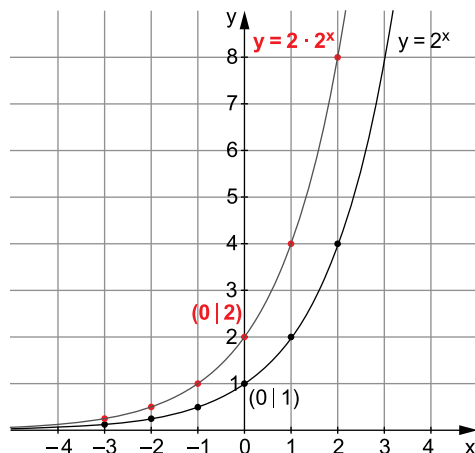
In den folgenden Beispielen ist der Anfangswert $c \neq 1$.

Beispiele

1. Für die Exponentialfunktion $y = 2 \cdot 2^x$ erhält man für $-3 \leq x \leq 3$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0,25	0,5	1	2	4	8	16

Graph



- Der schwarze Graph zu $y = 2^x$ (mit $c = 1$) geht durch den Punkt $(0 | 1)$, der rote Graph zu $y = 2 \cdot 2^x$ (mit $c = 2$) geht durch den Punkt $(0 | 2)$.
- An den beiden Graphen lässt sich nachvollziehen, dass sich die Funktionswerte von $y = 2 \cdot 2^x$ aus den entsprechenden Funktionswerten von $y = 2^x$ durch Multiplikation mit c bzw. mit 2 ergeben.

2. Wie müssen die Konstanten a und c gewählt werden, damit der Graph der Exponentialfunktion $f: y = c \cdot a^x$ durch die Punkte $A(2 | 1)$ und $B(-3 | 243)$ verläuft?

Lösung:

Einsetzen von $A(2 | 1)$ in $y = c \cdot a^x$:

$$y = c \cdot a^x \quad | A(2 | 1)$$

$$1 = c \cdot a^2$$

$$c = \frac{1}{a^2}$$

$$c = a^{-2}$$

Einsetzen von $B(-3 | 243)$ und $c = a^{-2}$:

$$y = c \cdot a^x \quad | B(-3 | 243)$$

$$243 = c \cdot a^{-3} \quad | c = a^{-2}$$

$$243 = a^{-2} \cdot a^{-3}$$

$$243 = a^{-5} \quad | 1. \text{ Potenzgesetz}$$

$$243 = \frac{1}{a^5} \quad | \cdot \frac{a^5}{243}$$

$$a^5 = \frac{1}{243}$$

$$a^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \quad | \sqrt[5]{}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow c = a^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9$$

$$\text{Funktionsgleichung: } y = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Aufgaben

105

Grundwissen

Erstelle jeweils eine Wertetabelle für ein geeignetes x -Intervall und zeichne den Graphen in ein Koordinatensystem.

a) $y = 3^x$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

d) $y = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

e) $y = \frac{1}{4} \cdot 3^x$

f) $y = -2^x$

106

Wie müssen die Konstanten a und c gewählt werden, damit der Graph der zugehörigen Exponentialfunktion $f: y = c \cdot a^x$ durch die Punkte $A(0|5)$ und $B(1|2)$ verläuft?

107

Prüfe, ob die angegebene Wertetabelle zu einer Exponentialfunktion gehört. Begründe deine Aussage. Falls es sich um eine Exponentialfunktion handelt, gib deren Funktionsgleichung an.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0,037	0,11	0,33	1	3	9	27	81



Interaktive
Aufgaben

1. Graph zuordnen
2. Wertetabelle

In Aufgaben mit **Anwendungsbezug** sollte man immer zuerst klären, welche der Bestandteile (Anfangswert, Wachstumsfaktor, Wachstumsschritte, Endwert) einer Exponentialfunktion gegeben bzw. gesucht sind. Dabei schreibt man für den **Endwert nach x Wachstumsschritten** statt y oft y_x .

Beispiele

1. Bei der Herstellung von Joghurt wird der Pilz *Lactobacillus bulgaricus* verwendet. Diese Pilze vermehren sich durch Zellteilung, wobei innerhalb einer bestimmten Zeit, der Generationszeit, aus einer Zelle zwei Tochterzellen entstehen. Die Generationszeit für den Joghurtpilz beträgt 30 Minuten.



- a) Auf wie viele Pilze wächst eine Pilzkultur von 100 Pilzen in 3 Stunden an?
- b) Wie viele Pilze waren es 1 Stunde vor Beobachtungsbeginn?

Lösung:

- a) Gegeben: Anfangswert: $c = 100$

Wachstumsfaktor (pro halbe Stunde): $a = 2$ Verdopplung alle halbe Stunde

Wachstumsschritte (Anzahl halbe Stunden): $x = 3 \cdot 2 = 6$

Gesucht: Endwert (Anzahl nach 3 Stunden bzw. 6 halben Stunden): y_6

Rechnung:

Für die Anzahl der Pilze nach 3 Stunden (6 halben Stunden) gilt:

$$y_x = c \cdot a^x$$

$$y_6 = 100 \cdot 2^6$$

$$y_6 = 6\,400$$

Antwort: Die Pilzkultur wächst auf 6 400 Pilze an.

- b) Wir stellen die Frage anders: Wie viele Pilze waren anfänglich vorhanden, wenn ihre Zahl nach 1 Stunde auf 100 angewachsen ist?

Gegeben: Wachstumsfaktor (pro halbe Stunde): $a = 2$

Wachstumsschritte (Anzahl halbe Stunden): $x = 1 \cdot 2 = 2$

Endwert (Anzahl nach 1 Stunde bzw. 2 halben Stunden): $y_2 = 100$

Gesucht: Anfangswert: c

Rechnung:

$$y_x = c \cdot a^x$$

$$100 = c \cdot 2^2$$

$$100 = c \cdot 4 \quad |:4$$

$$c = 25$$

Antwort: Eine Stunde vor Beobachtungsbeginn waren es 25 Pilze.

Zentrale Prüfung 2019 NRW – Mathematik

Prüfungsteil 1

Aufgabe 1

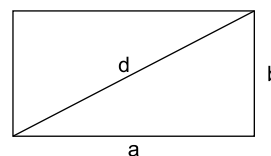
Ordne die Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

$$\frac{6}{10} \quad -0,626 \quad -6,26 \quad \frac{1}{6}$$

Aufgabe 2

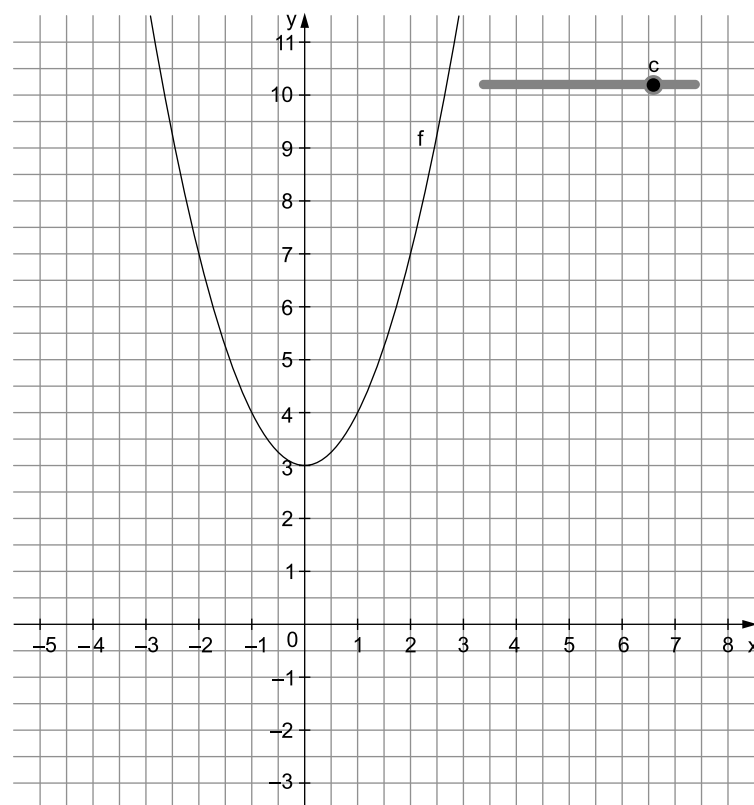
Ein Rechteck hat die Seitenlängen $a=5$ cm und $b=3$ cm.

- Berechne die Länge der Diagonale d .
- Wie verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn man jede Seitenlänge verdoppelt? Begründe.
- Ein anderes Rechteck hat einen Flächeninhalt von 24 cm^2 . Wie lang könnten die Seiten sein? Gib zwei unterschiedliche Möglichkeiten an.



Aufgabe 3

Isabelle zeichnet mit einer Geometriesoftware den Graphen einer quadratischen Funktion mit: $f(x)=x^2+c$. Sie erstellt einen Schieberegler, mit dem sie den Wert für c verändern kann.



- a) Der Schieberegler zeigt den Wert für c nicht an. Gib den Wert für c an.
- b) Für welche Werte von c verläuft der Graph f vollständig oberhalb der x-Achse? Gib den Bereich für c an.

Aufgabe 4

Tarek plant Urlaub in einer Jugendherberge. Mit einer Tabellenkalkulation berechnet er die Kosten für die Jugendherberge.

	A	B	C
1	Kosten für die Jugendherberge		
2	Anzahl der Nächte	7	
3			
4		<i>Preis pro Nacht in €</i>	<i>Preis für 7 Nächte €</i>
5	Übernachtung	18,00	126,00
6	Frühstück	4,00	28,00
7	Abendessen	6,00	42,00
8	Tourismussteuer (5 % vom Übernachtungspreis)	0,90	6,30
9			
10	Gesamtkosten in €		202,30

Abbildung: Tabellenblatt zur Berechnung der Kosten für die Jugendherberge

- a) Kreuze jeweils an, ob die Formel in diesem Zusammenhang geeignet ist, den Wert in Zelle C8 zu berechnen.

Formel	geeignet	nicht geeignet
= B5/3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
= B8 * B2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
= C10 – (C5 + C6 + C7)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- b) Tarek möchte Geld sparen und deshalb kein Abendessen buchen. Berechne, wie viel Prozent von den Gesamtkosten er dann spart.

Aufgabe 5

Löse das lineare Gleichungssystem. Notiere deinen Lösungsweg.

I $4x + y = 16$

II $-2x - 2y = 4$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK