2021

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR
ERFAHREN

Hamburg

Mathematik

+ Online-Glossar

ActiveBook
Interaktives
Training

Original-Prüfungsaufgaben
2020 zum Download

STARK

Inhalt

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online auf MyStark Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren! Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autor der Lösungen:

Dr. Jürgen Leitz

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

mit dem vorliegenden Buch geben wir Ihnen eine **optimale** Hilfestellung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung** in **Hamburg**.

- Im ersten Teil des Buches erhalten Sie zahlreiche **Informationen zum Abitur**, die für eine gezielte Vorbereitung auf die Abiturprüfung hilfreich und wichtig sind. Hierzu gehören die komplette Auflistung der Schwerpunktthemen für das **Abitur**, die **Hinweise zum Prüfungsablauf** sowie alles Wissenswerte zum Aufbau und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Weiter geben wir Ihnen eine Vielzahl **praktischer Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf die Abiturprüfung als auch während der Prüfung (Klausuren) ermöglichen, gestellte Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Sie finden in diesem Band die **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2019**. Die **Original-Abituraufgaben 2020** stehen Ihnen auf der **Plattform MyStark** zum Download zur Verfügung. Somit können Sie sich ein Bild davon machen, welche Anforderungen an die Abiturprüfung in den vergangenen Jahren gestellt wurden.
- Zu allen Aufgaben finden Sie vollständige und schülergerechte **Lösungsvorschläge**. Zusätzlich werden in den **Hinweisen und Tipps**, die zwischen Aufgabe und Lösung stehen, die Lösungsansätze dargestellt, ohne dass die Lösung vorweggenommen wird. Hier können Sie nachlesen, wenn Sie nicht wissen, wie Sie mit der Lösung einer Aufgabe anfangen sollen. Die Hinweise und Tipps sind hierarchisch nach aufsteigender **Hilfestellung** sortiert, sodass Sie nach dem Lesen des ersten Tipps nochmals nachdenken sollten, ob Sie jetzt die Lösung schaffen. Erst dann lesen Sie den zweiten Hinweis, der den Lösungsansatz genauer beschreibt.
- Damit Sie in diesem Buch passende Aufgaben zum Üben heraussuchen können, z. B. für die Vorbereitung auf eine anstehende Klausur, finden Sie gleich am Anfang ein **Stichwortverzeichnis**.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Vorbereitung auf das Abitur und bei Ihrer Prüfung, nicht nur im Fach Mathematik!

Dr. Jürgen Leitz und Stark Verlag

Allgemeine Hinweise zum Zentralabitur

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung

Zentrale schriftliche Prüfung

Die Abiturprüfung bildet den Abschluss der zweijährigen Studienstufe, die in Hamburg als Profiloberstufe ausgestaltet ist. An allen allgemeinbildenden und den berufsbildenden Gymnasien sowie an den Stadtteilschulen in Hamburg wird das Abitur mit zentraler Aufgabenstellung durchgeführt. Die Abituraufgaben werden in der Hamburger Behörde für Schule und Bildung entwickelt.
Das Abitur kann in Mathematik auf dem grundlegenden oder dem erhöhten Anforderungsniveau abgelegt werden. Ob das Anforderungsniveau in Mathematik grundlegend oder erhöht ist, wurde vor dem Eintritt in die Profiloberstufe verbindlich festgelegt, die Prüfung muss in dem gewählten Niveau abgelegt werden.
Den ersten von vier Aufgabenblöcken bildet der **hilfsmittelfreie Teil**. Im Rahmen dieses Aufgabenblocks müssen **mehrere kleinere** Aufgaben, die die Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie bzw. Lineare Algebra und Stochastik umfassen, bearbeitet werden. Die Bearbeitung dieses Teils muss – wie der Name schon andeutet – ohne Hilfsmittel wie Taschenrechner und Formelsammlung erfolgen.

Die prüfungsrelevanten Inhalte der Studienstufe

Modul 1 (Von der Änderungsrate zum Bestand)

Funktionen und Änderungsraten

- zu Anwendungskontexten mit funktionalen Zusammenhängen mathematische Modelle erstellen und Funktionsgraphen darstellen
- Veränderungen der Graphen von Funktionen bei Variation von Parametern untersuchen und diese Veränderungen beschreiben
- lineare Gleichungssysteme aufstellen und lösen zur Bestimmung der Koeffizienten ganzrationaler Funktionen
- Funktionswerte aus Argumenten bestimmen und umgekehrt, auch durch Lösen von Gleichungen, und die Ergebnisse im Anwendungskontext interpretieren
- geeignetes Verfahren auswählen und anwenden zur Lösung von linearen, quadratischen und biquadratischen Gleichungen sowie einfachen Bruch- und Wurzelgleichungen
- Sekanten- und Tangentensteigung an Funktionsgraphen bestimmen sowie die Annäherung der mittleren an die lokale Änderungsrate beschreiben
- lokale Änderungsraten berechnen und im Anwendungskontext interpretieren
- Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und im Anwendungskontext interpretieren
- Ableitungsgraphen aus Funktionsgraphen entwickeln und umgekehrt

- Funktionen mithilfe von Faktor-, Potenz-, Summen- und Kettenregel ableiten
- Ableitungen als notwendige und hinreichende Bedingungen zur Bestimmung von Monotonie, Krümmungsverhalten sowie lokalen Extrem- und Wendepunkten von Funktionen anwenden und im Anwendungskontext interpretieren
- funktionale Zusammenhänge in Anwendungssituationen mit abschnittsweise definierten Funktionen modellieren und die Übergänge auf Sprung- und Knickfreiheit untersuchen
- Passung und Grenzen gewählter mathematischer Modelle in den jeweiligen Anwendungskontexten überprüfen und Modelle zielgerichtet modifizieren
- das Verhalten von Funktionen im Unendlichen beschreiben und ggf. senkrechte und waagerechte Asymptoten bestimmen
- erkennbare Symmetrie (Achsensymmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung) für Argumentationen und zur Vereinfachung von Berechnungen nutzen
- einen Plan zur Lösung von Optimierungsproblemen entwickeln und umsetzen, den Lösungsweg argumentativ darstellen und das Vorgehen reflektieren

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten
- Randextrema bestimmen
- Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte von Funktionsscharen bestimmen in Abhängigkeit von Parametern und unter Berücksichtigung von Fallunterscheidungen
- Funktionsscharen bei der Lösung von Problemen anwenden

Bestandsänderungen

- Bestandsänderungen in Anwendungskontexten als Fläche unter Funktionsgraphen beschreiben und die Flächen als Bestandsveränderungen interpretieren
- Inhalte von Flächen unter Funktionsgraphen näherungsweise durch Berechnung von Ober- und Untersummen mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge (Tabellenkalkulation, CAS) bestimmen und deren gegenseitige Annäherung bei steigender Anzahl von Teilintervallen beschreiben
- Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung begründen und geometrisch veranschaulichen
- den Zusammenhang von Integral und Ableitung nutzen, auch in Anwendungskontexten
- Stammfunktion von ganzrationalen Funktionen und Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (mit Ausnahme von –1) sowie von der Sinus- und der Kosinusfunktion bestimmen, auch mithilfe der Summen- und Faktorregel
- Integrale in Anwendungskontexten zur Berechnung von Mittelwerten von Funktionen nutzen
- Integrale mithilfe von Stammfunktionen und durch Abschätzungen bestimmen, auch zur Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Zusätzlich im erhöhten Anforderungsniveau

- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation von Funktionsgraphen um die Abszissenachse entstehen
- die Volumenformel für Körper begründen, die durch Rotation von Funktionsgraphen um die Abszissenachse entstehen
- bestimmte Integrale bei Sinus- und Kosinusfunktionen mit linearen Argumenten als Bestandsänderungen berechnen
- elementare Rechenregeln für bestimmte Integrale anwenden und Symmetriebetrachtungen nutzen

II Fluss

1. In einer Senke verläuft ein Fluss. Abbildung 1 zeigt modellhaft einen Querschnitt der Senke und der beiden horizontalen Uferzonen.

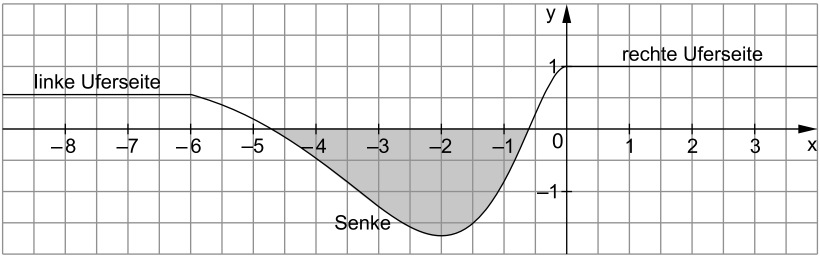


Abb. 1

Im Querschnitt kann die Profillinie der Senke modellhaft durch die Funktion f mit $f(x) = -5x^2e^x + 1$ und $x \in [-6; 0]$ beschrieben werden. Die Wasseroberfläche wird im Modell durch einen Abschnitt der x-Achse dargestellt, die Uferzonen durch zwei Strecken, die jeweils parallel zur x-Achse verlaufen und lückenlos an den Graphen von f anschließen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

Zur Funktion f sind Gleichungen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion sowie einer Stammfunktion gegeben:

- $f'(x) = -5x \cdot (2 + x) \cdot e^x$
- $f''(x) = -10e^x - 20xe^x - 5x^2e^x$
- $F(x) = x - 5 \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$

Punkte

a) **Berechnen** Sie den Höhenunterschied zwischen den beiden Uferzonen. 2

b) **Ermitteln** Sie mithilfe von Abbildung 1, wie breit die Senke einen Meter unterhalb der Wasseroberfläche ist. 2

c) **Deuten** Sie die Gleichung $f(x + 3) = f(x)$ im Sachzusammenhang und **bestimmen** Sie mithilfe von Abbildung 1 eine Lösung der Gleichung. 3

d) **Leiten** Sie aus der Funktionsgleichung von f die angegebene Funktionsgleichung von f' **her**. 3

e) **Berechnen** Sie die Tiefe des Wassers an der tiefsten Stelle der Senke. 4

Über die Senke soll eine Brücke gebaut werden. Das eine Ende der Brücke soll auf der linken Uferzone aufliegen, das andere Ende auf einem Sockel am rechten Ufer. Die Profillinie der Brücke wird im Modell durch eine Strecke dargestellt, der Auflagepunkt am rechten Ufer durch den Punkt $B(0\,|\,1{,}1)$.

f) **Berechnen** Sie die Länge der Brücke sowie deren Steigung in Prozent, wenn der linke Auflagepunkt im Modell durch den Punkt $A(-6\,|\,f(-6))$ dargestellt würde. 4

g) **Ermitteln** Sie, wie weit das linke Ende der Brücke vom Rand der Senke entfernt läge, wenn die Brücke eine Steigung von 6 % hätte. 3

h) Zwischen dem tiefsten Punkt der Senke und ihrem rechten Rand gibt es einen Punkt, in dem die Profillinie ihren größten Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen hat.
Berechnen Sie diesen Neigungswinkel. 5

i) Das Produkt aus dem Flächeninhalt des Flussquerschnitts (in m^2) und der Fließgeschwindigkeit des Wassers (in $\frac{m}{s}$) wird als Durchflussrate bezeichnet. Die Fließgeschwindigkeit des Wassers beträgt $0{,}5\,\frac{m}{s}$. Der Abschnitt der x-Achse, der die Wasseroberfläche im Modell darstellt, wird näherungsweise durch $x \approx -4{,}7$ und $x \approx -0{,}6$ begrenzt.
Berechnen Sie die Durchflussrate. 5

2. Abbildung 2 zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion g vierten Grades.

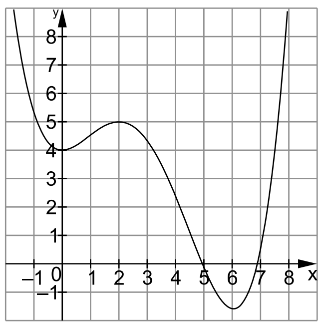


Abb. 2

a) **Begründen** Sie, dass der Graph von g außerhalb des abgebildeten Bereichs keine Extrempunkte besitzt. 3

b) Betrachtet wird die Gleichung $g(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Geben Sie alle Werte von a **an**, für die die Gleichung genau drei Lösungen hat. 2

c) **Untersuchen** Sie, ob der Wert des Terms $g'(3) \cdot g''(3)$ positiv ist. 4

40

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1 a

Höhenunterschied der Uferzonen

- Die Uferzonen beginnen bei $x = -6$ und $x = 0$.
- Der Höhenunterschied der beiden Uferzonen ergibt sich als Differenz der Funktionswerte an diesen Stellen.

Teilaufgabe 1 b

Breite der Senke 1 m unterhalb der Wasseroberfläche

- Die Breite der Senke in 1 m Tiefe entspricht der Differenz der x-Werte bei $y = -1$.
- Lesen Sie diese beiden x-Werte aus Abb. 1 ab.

Teilaufgabe 1 c

Bedeutung der Gleichung

- Die Funktionswerte für zwei x-Werte sollen gleich sein. Was bedeutet das?
- Gehen Sie auf die Bedeutung des Summanden 3 ein.

Lösung der Gleichung

- Die grafisch ermittelte Lösung kann rechnerisch überprüft werden.

Teilaufgabe 1 d

Ableitung von f(x)

- Bilden Sie die Ableitungsfunktion mithilfe der Summen- und Produktregel.

Teilaufgabe 1 e

Tiefpunkt der Senke

- Notwendige Bedingung für einen Extremwert ist, dass $f'(x) = 0$ ist.
- Auf der linken Seite der Gleichung erhalten Sie ein „Nullprodukt“.
- Ein Produkt ist null, wenn wenigstens ein Faktor null ist.
- Sie erhalten zwei Lösungen. Mit Blick auf Abb. 1 können Sie entscheiden, bei welcher es sich um das Minimum handelt.
- Vergessen Sie nicht, die Tiefe des Wassers an dieser Stelle zu berechnen.

Teilaufgabe 1 f

Länge und Steigung der Brücke

- Fertigen Sie eine Skizze an.
- Definieren Sie ein rechtwinkliges Hilfsdreieck, dessen Hypotenuse die Brückenlänge darstellt.

- Die Längen der beiden Katheten sind bekannt, verwenden Sie also den Satz des Pythagoras.
- Die Steigung der Brücke ergibt sich aus dem Verhältnis der Katheten.

Teilaufgabe 1 g

Entfernung zwischen Brückenaufleger und Rand der Senke

- Verwenden Sie die Skizze in Teilaufgabe f.
- Berechnen Sie zunächst den x-Wert des Punktes, an dem die Brücke auf der linken Uferseite aufliegen würde, und damit den Abstand des Punktes vom Rand der Senke.

Teilaufgabe 1 h

Neigungswinkel der Senke gegenüber der Horizontalen

- Die Steigung wird durch f' angegeben, welche notwendige Bedingung gilt dann für das Maximum der Steigung?
- Der Funktionsterm für $f''(x)$ ist in der Aufgabenstellung angegeben.
- Sie erhalten zwei Lösungen. Prüfen Sie, welche davon im betrachteten Bereich liegt.
- Für den Neigungswinkel α von $f(x)$ an einer Stelle x gilt: $\tan\alpha = f'(x)$

Teilaufgabe 1 i

Durchflussrate

- Die Durchflussrate ist das Produkt aus der Fließgeschwindigkeit des Wassers und dem Flächeninhalt des Flussquerschnitts.
- Für die Berechnung der Fläche verwenden Sie das Integral über $f(x)$ in den Grenzen von $-4{,}7$ bis $-0{,}6$.
- Eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ ist in der Aufgabenstellung gegeben.

Teilaufgabe 2 a

Begründen, dass der Graph keine weiteren Extrema hat

- Überlegen Sie, wie viele Extrema eine Funktion n-ten Grades maximal haben kann.
- *Oder:* Welchen Grad hat die Ableitung?

Teilaufgabe 2 b

Werte von a

- Betrachten Sie eine zur x-Achse parallele Gerade (welche dem Graphen einer Funktion $h(x) = a$ entspricht) und verschieben Sie sie in y-Richtung.
- Wann haben die Gerade und der Graph von g genau drei Schnitt- bzw. Berührpunkte?

Teilaufgabe 2 c

Untersuchen, ob $g'(3) \cdot g''(3) > 0$ ist

- Betrachten Sie Steigung und Krümmung des Graphen g an der Stelle $x = 3$.

Lösung

1. $f(x) = -5x^2e^x + 1$ mit $x \in [-6; 0]$

   a) Für den Höhenunterschied der Uferzonen gilt:
   $\Delta h = f(0) - f(-6)$
   $$\begin{aligned}\Delta h &= -5 \cdot 0^2 \cdot e^0 + 1 - (-5 \cdot (-6)^2 \cdot e^{-6} + 1)\\ &= 1 + 180 \cdot e^{-6} - 1\\ &\approx 0{,}446\end{aligned}$$
   Der Höhenunterschied der beiden Uferzonen beträgt etwa 0,45 m.

   b) In Abb. 1 liest man bei einer Tiefe von 1 m für die Breite der Senke ab:
   $$\begin{aligned}\Delta x &\approx |-3{,}3 - (-1{,}1)|\\ &= 2{,}2\end{aligned}$$
   In einer Tiefe von 1 m hat die Senke eine Breite von etwa 2,2 m.

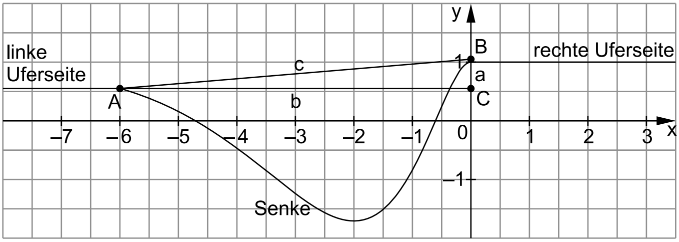
   c) $f(x+3) = f(x)$ bedeutet im Sachzusammenhang, dass die Senke an der Stelle x sowie 3 m weiter rechts die gleiche Tiefe hat.
   Mithilfe von Abb. 1 findet man:
   $f(-3{,}9) \approx -0{,}6$
   $f(-0{,}9) \approx -0{,}6$
   Eine Lösung der Gleichung ist $x \approx -3{,}9$.

   Bemerkung: Um die grafisch ermittelte Lösung zu überprüfen, können die x-Werte in die Funktion eingesetzt werden.

   d) Produktregel für den ersten Summanden anwenden, Ableitung von 1 (zweiter Summand) ist null:
   $$\begin{aligned}f'(x) &= -10x \cdot e^x - 5x^2 \cdot e^x \qquad \Big| -5x \cdot e^x \text{ ausklammern}\\ &= -5x \cdot e^x \cdot (2 + x)\\ &= -5x \cdot (2 + x) \cdot e^x \qquad \text{(w. z. z. w.)}\end{aligned}$$

   e) Notwendige Bedingung für einen Extremwert ist $f'(x) = 0$:
   $-5x \cdot (2 + x) \cdot e^x = 0$
   Dies ist ein „Nullprodukt“. Ein Produkt ist null, wenn wenigstens ein Faktor null ist:
   $$\begin{aligned}e^x &\neq 0\\ -5x = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 0\\ 2 + x = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = -2\end{aligned}$$
   Entsprechend Abb. 1 liegt das Minimum der Senke bei $x = -2$.
   $f(-2) \approx -1{,}71 \quad \Rightarrow \quad$ Die maximale Tiefe des Wassers beträgt etwa 1,7 m.

f) Skizze:



Es wird das rechtwinklige Dreieck ACB betrachtet. Mit $B(0|1{,}1)$ und $A(-6|f(-6)) \approx A(-6|0{,}554)$ ergibt sich $C(0|0{,}554)$.

Länge der Brücke

Aus den Koordinaten folgt $a \approx 1{,}1 - 0{,}554 = 0{,}546$ und $b = 6$. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\approx \sqrt{0{,}546^2 + 6^2} \approx 6{,}02$$

Die Brücke hat eine Länge von etwa 6 m.

Steigung in Prozent

$$m = \frac{a}{b}$$
$$\approx \frac{0{,}546}{6} \approx 0{,}091$$

Die Brücke hat eine Steigung von etwa 9 %.

g) Es wird weiterhin das rechtwinklige Dreieck (siehe Teilaufgabe f) betrachtet. Eine neue Seitenlänge b muss so bestimmt werden, dass gilt:

$$\frac{0{,}546}{b} = 0{,}06 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{0{,}546}{0{,}06} \approx 9{,}1$$

Für die Entfernung des linken Brückenauflegers zum Rand der Senke erhält man $9{,}1\text{ m} - 6{,}0\text{ m} = 3{,}1\text{ m}$.

h) Die Steigung wird durch f' angegeben. Notwendige Bedingung für ein Maximum von f' ist, dass $f''(x) = 0$ ist:

$$-10e^x - 20xe^x - 5x^2e^x = 0 \qquad |:e^x$$
$$-5x^2 - 20x - 10 = 0 \qquad |:(-5)$$
$$x^2 + 4x + 2 = 0$$
$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-2}$$
$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$$
$$x_1 \approx -0{,}59; \ x_2 \approx -3{,}41$$