

# 2021 Training

Abschlussprüfung

**MEHR  
ERFAHREN**

Realschule Bayern

## Mathematik II/III

- + Basiswissen mit Übungen
- + Aktuelle Original-Prüfungen
- + Aufgaben im Stil der Prüfung



**STARK**

# Inhalt

Vorwort

Hinweise zur Prüfung

## Training Grundwissen

1

<b>1</b>	<b>Grundwissen 5.–8. Klasse</b>	<b>3</b>
1.1	Rechnen mit rationalen Zahlen – Grundrechenarten und Bruchrechnen .....	3
	Kürzen und Erweitern von Brüchen .....	3
	Addition und Subtraktion von Brüchen .....	4
	Multiplikation und Division von Brüchen und Bruchtermen .....	5
	Brüche und Variablen .....	6
1.2	Potenzen .....	6
	Potenzgesetze .....	8
1.3	Termumformungen .....	11
	Summen- und Produktterme .....	13
	Binomische Formeln .....	16
1.4	Extremwertbestimmung bei quadratischen Termen .....	18
1.5	Lineare Gleichungen und Ungleichungen .....	20
1.6	Bruchgleichungen .....	24
1.7	Prozentrechnung .....	25
	Begriffe und Abkürzungen .....	25
	Berechnungen .....	26
1.8	Vektoren .....	29
	Regel „Spitze minus Fuß“ .....	29
	Berechnungen mithilfe von Vektoren .....	29
	Mittelpunktsberechnung einer Strecke .....	30
	Vektoraddition – Vektorketten .....	31
1.9	Dreiecke .....	33
	Eigenschaften beliebiger Dreiecke .....	33
	Besondere Dreiecke .....	35
1.10	Vierecke .....	36
	Eigenschaften beliebiger Vierecke .....	36
	Besondere Vierecke .....	36
<b>2</b>	<b>Grundwissen 9. Klasse</b>	<b>39</b>
2.1	Lineare Funktionen .....	39
	Direkte Proportionalität .....	39
	Ursprungsgeraden: $y = m \cdot x$ .....	40
	Zeichnen von Ursprungsgeraden .....	41
	Geraden in beliebiger Lage – Die Normalform: $y = mx + t$ .....	42
	Berechnung der Geradengleichung mithilfe zweier Punkte .....	43
	Zeichnen von Geraden .....	44
	Punkt-Steigungs-Form: $y = m(x - x_P) + y_P$ .....	46

	Parallele und orthogonale Geraden .....	47
	Normalform, Punkt-Steigungs-Form und allgemeine Form .....	49
2.2	Lineare Gleichungssysteme .....	51
	Grafisches Lösungsverfahren .....	51
	Rechnerische Lösungsverfahren .....	53
2.3	Reelle Zahlen .....	57
	Die Quadratwurzel .....	57
	Irrationale Zahlen .....	57
	Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ .....	57
	Rechnen mit Wurzeltermen .....	58
2.4	Flächeninhalt ebener Figuren .....	61
	Dreiecke .....	61
	Vierecke .....	63
	Flächenberechnung mithilfe von Vektoren im Koordinatensystem .....	65
	Funktionale Abhängigkeiten – Veränderung von ebenen Figuren .....	67
2.5	Vierstreckensätze .....	73
2.6	Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck .....	77
	Der Kathetensatz .....	78
	Der Höhensatz .....	79
	Der Satz des Pythagoras .....	80
	Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras .....	82
<b>3</b>	<b>Grundwissen 10. Klasse .....</b>	<b>84</b>
3.1	Quadratische Funktionen .....	84
	Die Funktion mit der Gleichung $y=x^2$ .....	84
	Funktionen mit Gleichungen der Form $y=a \cdot x^2$ .....	85
	Die Scheitelform: $y=a \cdot (x-x_S)^2+y_S$ .....	87
	Von der Scheitelform zur allgemeinen Form .....	88
	Von der allgemeinen Form zur Scheitelform .....	88
	Berechnen von Parabelgleichungen .....	89
	Extremwerte .....	91
3.2	Weitere Funktionen .....	95
	Funktionen der indirekten Proportionalität (Hyperbeln) .....	95
	Exponentialfunktionen .....	97
3.3	Quadratische Gleichungen .....	101
	Diskriminante und Lösungsformel .....	103
	Nullstellen von Parabeln .....	105
	Schnitt von Parabel und Gerade .....	106
	Schnitt von Parabel mit Parabel – System quadratischer Gleichungen .....	108
3.4	Berechnungen am Kreis .....	113
	Flächeninhalt und Umfang eines Kreises .....	113
	Kreisteile – Kreissektor und Kreisbogen .....	114
	Das Kreissegment .....	116
3.5	Trigonometrie .....	117
	Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis .....	117
	Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck .....	117
	Sinussatz und Kosinussatz .....	124

3.6	Raumgeometrie .....	129
	Zeichnen von Schrägbildern .....	129
	Prisma .....	131
	Pyramide .....	134
	Zylinder .....	140
	Kegel .....	142
	Kugel .....	147

**Komplexe Aufgaben** **151**

Quadratische Funktionen .....	153
Ebene Geometrie .....	155
Raumgeometrie .....	158

**Aufgaben im Stil der Prüfung** **161**

Teil A .....	163
Teil B .....	165

**Original-Abschlussprüfung** **167**

Abschlussprüfung 2019 .....	2019-1
Teil A .....	2019-1
Teil B .....	2019-4

Abschlussprüfung 2020 .....

[www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark)

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, kannst du sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vorne im Buch).



Dieses Buch ist in zwei Versionen erhältlich: mit und ohne ActiveBook. Hast du die Ausgabe **mit ActiveBook (91511ML)** erworben, kannst du mit dem **Interaktiven Training** online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet. Am besten gleich ausprobieren!



Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du in der Ausgabe mit ActiveBook auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

**Autoren:** Markus Hochholzer, Markus Schmidl

# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung Mathematik vorbereiten. Das Buch ist so konzipiert, dass es bereits zu Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Schulaufgaben und zur langfristigen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung verwendet werden kann.

Das Buch besteht aus sechs Teilen:

► **Grundwissen 5.–8. Klasse**

Hier kannst du nachschlagen, wenn du in einem bestimmten Bereich aus den früheren Schuljahren Probleme hast. Die prüfungsrelevanten Inhalte sind mit Beispielen erklärt.

► **Grundwissen 9. Klasse**

In diesem Kapitel wird der Stoff der 9. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Die Aufgaben in diesem Kapitel eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. Klasse als auch zur Wiederholung prüfungsrelevanter Themenbereiche.

► **Grundwissen 10. Klasse**

In diesem Kapitel werden alle Themenbereiche der 10. Jahrgangsstufe mit Beispielen erklärt. Zu jedem Themenbereich findest du hier vielfältige Aufgaben. Diese sind so konzipiert, dass sie gezielt auf die Abschlussprüfung bzw. auf die Schulaufgaben der 10. Klasse vorbereiten.

► **Komplexe Aufgaben**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die nach den Themenbereichen der Abschlussprüfung geordnet sind. Sie greifen auch auf das Grundwissen der vorhergehenden Jahrgangsstufen zurück, das für die Abschlussprüfung relevant ist.

► **Aufgaben im Stil der Prüfung**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bepunktet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.

► **Original-Abschlussprüfungen 2019 und 2020**

Die Abschlussprüfungen dienen dazu, unter Prüfungsbedingungen anhand einer echten Abschlussprüfung zu üben. Versuche, die jeweilige Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

Zu allen Aufgaben des Trainingsteils und zu den Original-Aufgaben der Abschlussprüfung gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Buch (Bestell-Nr. 915111L)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen! Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Wir wünschen dir viel Erfolg in der Prüfung!



Markus Hochholzer



Markus Schmidl



# 1 Grundwissen 5.–8. Klasse

## 1.1 Rechnen mit rationalen Zahlen – Grundrechenarten und Bruchrechnen

### Kürzen und Erweitern von Brüchen

#### Merke

Die Menge der **rationalen Zahlen**  $\mathbb{Q}$  erhält man, wenn man die Menge der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  um die **Bruchzahlen (Brüche)** erweitert. Ein (gewöhnlicher) Bruch ist definiert als Quotient zweier ganzer Zahlen.

$$a : b = \frac{a}{b} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Zähler} \\ \text{Bruchstrich} \\ \text{Nenner} \end{array} \right\} \text{Bruch} \quad (a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Beachte: Die Division durch 0 ist verboten!

Hilfreiche Vereinfachungen beim Rechnen mit Brüchen ergeben sich oft durch das **Kürzen und Erweitern** der Brüche.

#### Merke

- Man **erweitert** einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (ungleich null) multipliziert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \text{Erweitern mit } c \quad (a \in \mathbb{Z}; b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

- Man **kürzt** einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl (ungleich null) dividiert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad \text{Kürzen mit } c \quad (a \in \mathbb{Z}; b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Sind Zähler und Nenner eines Bruchs teilerfremd, ist der Bruch **vollständig gekürzt**.

Durch Erweitern und Kürzen erhält man einen zum ursprünglichen Bruch **wertgleichen Bruch**.

#### Beispiele

$$1. \quad \frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{175}{100} = 1 \frac{75}{100} \quad \text{Erweitern mit 25}$$

$$2. \quad \frac{51}{85} = \frac{51 : 17}{85 : 17} = \frac{3}{5} \quad \text{Kürzen mit 17}$$

#### Aufgaben

1

Fülle die Lücken durch Kürzen oder Erweitern.

a)  $\frac{3}{5} = \frac{24}{\boxed{\phantom{00}}} = \frac{12}{\boxed{\phantom{00}}}$

b)  $\frac{49}{28} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{4} = 1 \frac{6}{\boxed{\phantom{00}}}$

c)  $\frac{33ab}{121a} = \frac{3b}{\boxed{\phantom{00}}} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{88c^2}$

d)  $\frac{12x^2y}{16x} = \frac{3xy}{\boxed{\phantom{00}}} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{96x^2y}$

2

Kürze so weit wie möglich.

a)  $\frac{36}{90}$

b)  $\frac{55x^3y^2}{220x^5y}$

c)  $\frac{95 \cdot 26 \cdot 55}{143 \cdot 25 \cdot 76}$

d)  $\frac{5(a-b)^2}{0,5(a-b)(a+b)}$



Interaktive Aufgaben

- 1. Erweitern
- 2. Kürzen

### Addition und Subtraktion von Brüchen

Brüche mit verschiedenen Nennern kann man durch Erweitern auf einen **gemeinsamen Nenner** bringen. Es entstehen **gleichnamige Brüche**.

Der kleinste gemeinsame Nenner verschiedener Brüche heißt **Hauptnenner** dieser Brüche. Der Hauptnenner entspricht dem **kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches)** der Nenner. Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den **Nenner beibehält**.

Merke

**Ungleichnamige Brüche** werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie durch Erweitern **in gleichnamige Brüche umwandelt** und dann wie bekannt verfährt.

Beispiel

$$\begin{aligned}
 & -\frac{5}{6} + \frac{3}{8} && \text{Bestimme den Hauptnenner und erweitere die Brüche auf ihn.} \\
 & = -\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} && \text{HN: 24} \\
 & = -\frac{20}{24} + \frac{9}{24} && \text{Addiere bzw. subtrahiere die jetzt gleichnamigen Brüche.} \\
 & = \frac{-20+9}{24} \\
 & = \frac{-11}{24} \\
 & = -\frac{11}{24}
 \end{aligned}$$

Aufgabe

3

Bestimme den Hauptnenner und berechne.

a)  $\frac{11}{12} - \frac{2}{9} + \frac{2}{3}$

b)  $\left(\frac{27}{4} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{11}{16} - \frac{5}{8}\right)$

c)  $12\frac{4}{5} - \left(4\frac{4}{7} + 3\frac{1}{2}\right) + 17\frac{1}{5}$

d)  $\frac{4}{3}b + \frac{1}{64}a^3 - \frac{1}{2a}a^4 + \frac{1}{5}b - \frac{11}{13}$

- 3. Addition und Subtraktion
- 4. Addition und Subtraktion von Bruchtermen



Interaktive Aufgaben

## Multiplikation und Division von Brüchen und Bruchtermen

### Merke

Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den **Nenner beibehält**.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \quad (a, c \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

### Beispiel

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

Forme im Endergebnis den unechten Bruch in eine gemischte Zahl um.

### Merke

Brüche werden multipliziert, indem man **Zähler mit Zähler** und **Nenner mit Nenner** multipliziert:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \quad (a, b \in \mathbb{Z}; c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

### Beispiel

$$2 \frac{1}{4} \cdot 7 \frac{2}{3}$$

Gemischte Zahlen formt man zuerst in unechte Brüche um.

$$= \frac{9^3}{4} \cdot \frac{23}{3^1}$$

Das rechtzeitige Kürzen nicht vergessen!

$$= \frac{3 \cdot 23}{4 \cdot 1}$$

$$= \frac{69}{4}$$

Den unechten Bruch gibt man im Ergebnis als gemischte Zahl an.

$$= 17 \frac{1}{4}$$

### Merke

Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem **Kehrbruch** des zweiten Bruchs multipliziert:

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} \quad (a, b \in \mathbb{Z}; c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

### Beispiel

$$11 \frac{3}{7} : 2 \frac{12}{35}$$

Gemischte Zahlen werden vor der Division in unechte Brüche umgeformt.

$$= \frac{80}{7} : \frac{82}{35} \uparrow$$

Multiplikation mit dem Kehrbruch

$$= \frac{80}{7} \cdot \frac{35}{82}$$

$$= \frac{80^40}{7^1} \cdot \frac{35^5}{82^41}$$

$$= \frac{200}{41}$$

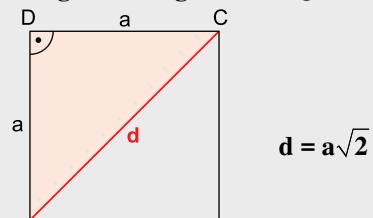
$$= 4 \frac{36}{41}$$



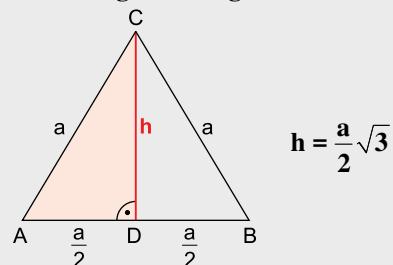
## Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras

## Merke

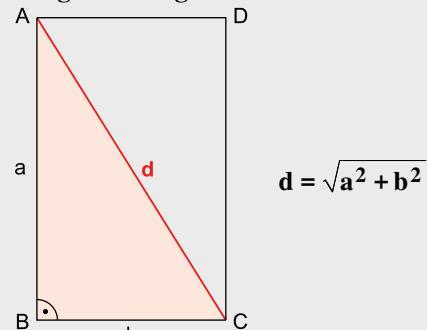
## Länge der Diagonale im Quadrat



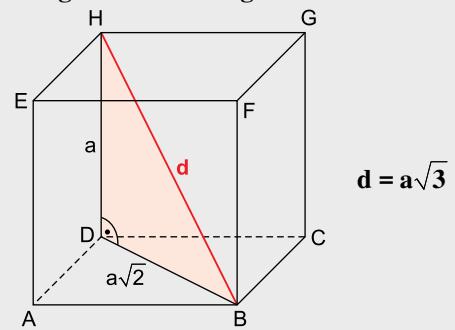
## Höhe im gleichseitigen Dreieck



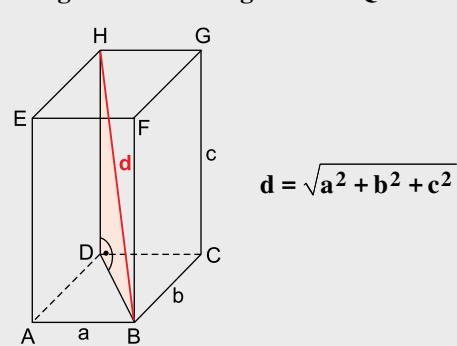
## Länge der Diagonale im Rechteck



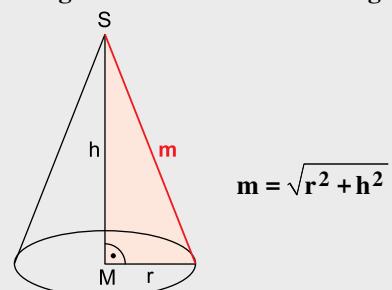
## Länge der Raumdiagonale im Würfel



## Länge der Raumdiagonale im Quader



## Länge der Mantellinie beim Kegel



## Aufgaben

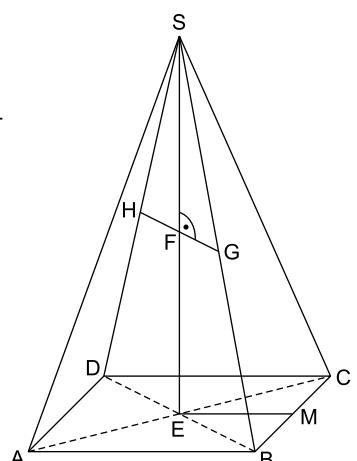
118

Ein gleichseitiges Dreieck hat die Seitenlänge  $a=6$  cm.  
Berechne die Höhe und den Flächeninhalt.

119

Das nebenstehende Schrägbild zeigt eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalenschnittpunkt E. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke [BC]. Es gilt:  $\overline{AB} = 6$  cm;  $\overline{ES} = 10$  cm  
Berechne folgende Streckenlängen.

- $\overline{AC}$ ;  $\overline{AE}$ ;  $\overline{SA}$ ;  $\overline{MS}$
- $\overline{GH}$  und  $\overline{GS}$ , wenn  $\overline{FS} = 4$  cm



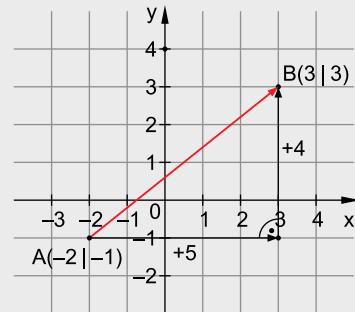
**Merke****Länge einer Strecke im Koordinatensystem (Betrag eines Vektors)** $A(x_A | y_A); B(x_B | y_B)$ 

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

**Beispiel**Berechne die Länge der Strecke [AB] mit  $A(-6 | 2)$  und  $B(2 | 8)$ .*Lösung:*

Man wendet den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Koordinatendreieck an.

Berechne die Koordinaten von  $\overrightarrow{AB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - (-6) \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berechne den Betrag des Vektors  $\overrightarrow{AB}$ :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

oder:

Berechne die Länge der Strecke [AB]:

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ LE}$$

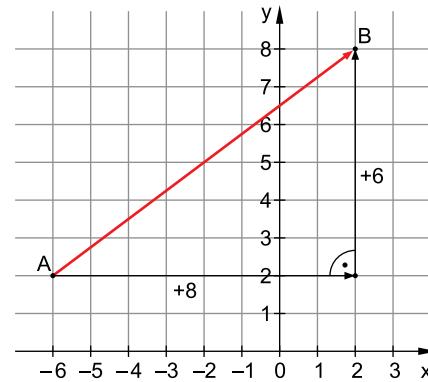
$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(2 - (-6))^2 + (8 - 2)^2} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{8^2 + 6^2} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{64 + 36} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{100} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{AB} = 10 \text{ LE}$$

**Aufgaben****120**

Bestimme den Betrag des Vektors.

a)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b)  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

**121**

Bestimme die Länge der Strecke [EF].

a)  $E(-4 | 3); F(10 | 5)$

b)  $E\left(1\frac{1}{2} \mid -6\frac{3}{4}\right); F\left(-9\frac{1}{4} \mid 2\frac{1}{8}\right)$

**122**Der Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M(1 | 2)$  verläuft durch den Punkt  $P(5 | 5)$ .Berechne den Radius von  $k$ .Überprüfe, ob der Punkt  $Q(-4 | 2)$  auf, innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt.**123**Bestimme den Umfang des Dreiecks ABC mit  $A(-3 | -2)$ ,  $B(5 | 0)$  und  $C(4 | 6)$ .

12. Abstand von 2 Punkten bestimmen

13. Gleichschenkliges Dreieck?

**Interaktive Aufgaben**



**Abschlussprüfung an Realschulen 2019**  
**Bayern – Mathematik II/III**

## Teil A

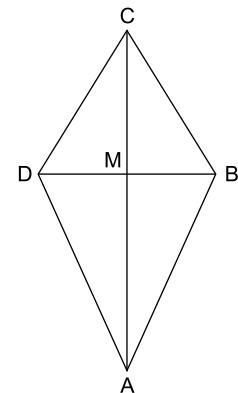
### Aufgabe A 1

A 1.0 Pia möchte einen Flugdrachen bauen. Dazu erstellt sie nebenstehende Skizze eines Drachenvierecks ABCD mit der Symmetriechse AC und dem Diagonalenschnittpunkt M.

Es gilt:

$$\overline{AB} = 95 \text{ cm}; \overline{AC} = 150 \text{ cm}; \overline{BC} = 75 \text{ cm}.$$

Runden Sie im Folgenden auf Ganze.



2 Punkte

A 1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass für das Maß des Winkels  $ACB$  gilt:  
 $\angle ACB = 32^\circ$ .

2 Punkte

A 1.2 Berechnen Sie die Länge der Diagonale  $[BD]$  und den Flächeninhalt A des Drachenvierecks ABCD.  
[Ergebnis:  $\overline{BD} = 79 \text{ cm}$ ]

1 Punkt

A 1.3 Da es im Baumarkt nur Holzstäbe mit einer Länge von 100 cm gibt, beschließt Pia, für die Diagonale  $[AC]$  diese Länge zu verwenden. Die Diagonale  $[BD]$  bleibt unverändert.

Kreuzen Sie an, um wie viel Prozent sich der Flächeninhalt dadurch verringert.

25 %

33 %

50 %

67 %

© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)

[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**