

2021 Training

Abschlussprüfung

**MEHR
ERFAHREN**

Realschule Bayern

Mathematik II/III

- + *Basiswissen mit Übungen*
- + *Aktuelle Original-Prüfungen*
- + *Aufgaben im Stil der Prüfung*



STARK

Inhalt

Vorwort

Hinweise zur Prüfung

Training Grundwissen	1
1 Grundwissen 5.–8. Klasse	3
1.1 Rechnen mit rationalen Zahlen – Grundrechenarten und Bruchrechnen	3
Kürzen und Erweitern von Brüchen	3
Addition und Subtraktion von Brüchen	4
Multiplikation und Division von Brüchen und Bruchtermen	5
Brüche und Variablen	6
1.2 Potenzen	6
Potenzgesetze	8
1.3 Termumformungen	11
Summen- und Produktterme	13
Binomische Formeln	16
1.4 Extremwertbestimmung bei quadratischen Termen	18
1.5 Lineare Gleichungen und Ungleichungen	20
1.6 Bruchgleichungen	24
1.7 Prozentrechnung	25
Begriffe und Abkürzungen	25
Berechnungen	26
1.8 Vektoren	29
Regel „Spitze minus Fuß“	29
Berechnungen mithilfe von Vektoren	29
Mittelpunktsberechnung einer Strecke	30
Vektoraddition – Vektorketten	31
1.9 Dreiecke	33
Eigenschaften beliebiger Dreiecke	33
Besondere Dreiecke	35
1.10 Vierecke	36
Eigenschaften beliebiger Vierecke	36
Besondere Vierecke	36
2 Grundwissen 9. Klasse	39
2.1 Lineare Funktionen	39
Direkte Proportionalität	39
Ursprungsgeraden: $y = m \cdot x$	40
Zeichnen von Ursprungsgeraden	41
Geraden in beliebiger Lage – Die Normalform: $y = mx + t$	42
Berechnung der Geradengleichung mithilfe zweier Punkte	43
Zeichnen von Geraden	44
Punkt-Steigungs-Form: $y = m(x - x_p) + y_p$	46

	Parallele und orthogonale Geraden	47
	Normalform, Punkt-Steigungs-Form und allgemeine Form	49
2.2	Lineare Gleichungssysteme	51
	Grafisches Lösungsverfahren	51
	Rechnerische Lösungsverfahren	53
2.3	Reelle Zahlen	57
	Die Quadratwurzel	57
	Irrationale Zahlen	57
	Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R}	57
	Rechnen mit Wurzeltermen	58
2.4	Flächeninhalt ebener Figuren	61
	Dreiecke	61
	Vierecke	63
	Flächenberechnung mithilfe von Vektoren im Koordinatensystem	65
	Funktionale Abhängigkeiten – Veränderung von ebenen Figuren	67
2.5	Vierstreckensätze	73
2.6	Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck	77
	Der Kathetensatz	78
	Der Höhensatz	79
	Der Satz des Pythagoras	80
	Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras	82
3	Grundwissen 10. Klasse	84
3.1	Quadratische Funktionen	84
	Die Funktion mit der Gleichung $y = x^2$	84
	Funktionen mit Gleichungen der Form $y = a \cdot x^2$	85
	Die Scheitelform: $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$	87
	Von der Scheitelform zur allgemeinen Form	88
	Von der allgemeinen Form zur Scheitelform	88
	Berechnen von Parabelgleichungen	89
	Extremwerte	91
3.2	Weitere Funktionen	95
	Funktionen der indirekten Proportionalität (Hyperbeln)	95
	Exponentialfunktionen	97
3.3	Quadratische Gleichungen	101
	Diskriminante und Lösungsformel	103
	Nullstellen von Parabeln	105
	Schnitt von Parabel und Gerade	106
	Schnitt von Parabel mit Parabel – System quadratischer Gleichungen	108
3.4	Berechnungen am Kreis	113
	Flächeninhalt und Umfang eines Kreises	113
	Kreisteile – Kreissektor und Kreisbogen	114
	Das Kreissegment	116
3.5	Trigonometrie	117
	Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis	117
	Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck	117
	Sinussatz und Kosinussatz	124

3.6	Raumgeometrie	129
	Zeichnen von Schrägbildern	129
	Prisma	131
	Pyramide	134
	Zylinder	140
	Kegel	142
	Kugel	147

Komplexe Aufgaben 151

Quadratische Funktionen	153
Ebene Geometrie	155
Raumgeometrie	158

Aufgaben im Stil der Prüfung 161

Teil A	163
Teil B	165

Original-Abschlussprüfung 167

Abschlussprüfung 2019	2019-1
Teil A	2019-1
Teil B	2019-4

Abschlussprüfung 2020 www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, kannst du sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vorne im Buch).



Dieses Buch ist in zwei Versionen erhältlich: mit und ohne ActiveBook. Hast du die Ausgabe **mit ActiveBook** (91511ML) erworben, kannst du mit dem **Interaktiven Training** online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet. Am besten gleich ausprobieren!



Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du in der Ausgabe mit ActiveBook auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autoren: Markus Hochholzer, Markus Schmidl

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die Abschlussprüfung Mathematik vorbereiten. Das Buch ist so konzipiert, dass es bereits zu Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Schulaufgaben und zur langfristigen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung verwendet werden kann.

Das Buch besteht aus sechs Teilen:

► **Grundwissen 5.–8. Klasse**

Hier kannst du nachschlagen, wenn du in einem bestimmten Bereich aus den früheren Schuljahren Probleme hast. Die prüfungsrelevanten Inhalte sind mit Beispielen erklärt.

► **Grundwissen 9. Klasse**

In diesem Kapitel wird der Stoff der 9. Jahrgangsstufe anhand von Beispielen erläutert. Die Aufgaben in diesem Kapitel eignen sich sowohl zur Vorbereitung auf Schulaufgaben in der 9. Klasse als auch zur Wiederholung prüfungsrelevanter Themenbereiche.

► **Grundwissen 10. Klasse**

In diesem Kapitel werden alle Themenbereiche der 10. Jahrgangsstufe mit Beispielen erklärt. Zu jedem Themenbereich findest du hier vielfältige Aufgaben. Diese sind so konzipiert, dass sie gezielt auf die Abschlussprüfung bzw. auf die Schulaufgaben der 10. Klasse vorbereiten.

► **Komplexe Aufgaben**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die nach den Themenbereichen der Abschlussprüfung geordnet sind. Sie greifen auch auf das Grundwissen der vorhergehenden Jahrgangsstufen zurück, das für die Abschlussprüfung relevant ist.

► **Aufgaben im Stil der Prüfung**

Dieses Kapitel enthält Aufgaben, die wie in der Abschlussprüfung zusammengestellt und bepunktet sind. So kannst du prüfen, ob du fit bist für die Abschlussprüfung in Mathematik. Der Umfang und Schwierigkeitsgrad der Aufgaben entspricht jeweils den einzelnen Prüfungsteilen der Abschlussprüfung.

► **Original-Abschlussprüfungen 2019 und 2020**

Die Abschlussprüfungen dienen dazu, unter Prüfungsbedingungen anhand einer echten Abschlussprüfung zu üben. Versuche, die jeweilige Abschlussprüfung zusammenhängend in der Prüfungszeit von 150 min zu lösen.

Zu allen Aufgaben des Trainingsteils und zu den Original-Aufgaben der Abschlussprüfung gibt es **ausführliche Lösungen** mit hilfreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese findest du in einem separaten **Buch (Bestell-Nr. 915111L)**, damit die Versuchung sofort nachzuschlagen nicht zu groß ist. Zuerst solltest du versuchen, selbst die Lösung zu finden und dann mit dem Lösungsbuch vergleichen. Aus den gemachten Fehlern wirst du am meisten lernen! Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrscht, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Wir wünschen dir viel Erfolg in der Prüfung!



Markus Hochholzer



Markus Schmidl

1 Grundwissen 5.–8. Klasse

1.1 Rechnen mit rationalen Zahlen – Grundrechenarten und Bruchrechnen

Kürzen und Erweitern von Brüchen

Merke

Die Menge der **rationalen Zahlen \mathbb{Q}** erhält man, wenn man die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} um die **Bruchzahlen (Brüche)** erweitert. Ein (gewöhnlicher) Bruch ist definiert als Quotient zweier ganzer Zahlen.

$$a : b = \frac{\overset{\text{Zähler}}{a}}{\underset{\text{Nenner}}{b}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Bruchstrich} \\ \text{Bruch} \end{array} \right\} \quad (a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Beachte: Die Division durch 0 ist verboten!

Hilfreiche Vereinfachungen beim Rechnen mit Brüchen ergeben sich oft durch das **Kürzen** und **Erweitern** der Brüche.

Merke

- Man **erweitert** einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl (ungleich null) multipliziert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \text{Erweitern mit } c \quad (a \in \mathbb{Z}; b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

- Man **kürzt** einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl (ungleich null) dividiert.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad \text{Kürzen mit } c \quad (a \in \mathbb{Z}; b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Sind Zähler und Nenner eines Bruchs teilerfremd, ist der Bruch **vollständig gekürzt**.

Durch Erweitern und Kürzen erhält man einen zum ursprünglichen Bruch **wertgleichen Bruch**.

Beispiele

$$1. \quad \frac{7}{4} = \frac{7 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{175}{100} = 1 \frac{75}{100}$$

Erweitern mit 25

$$2. \quad \frac{51}{85} = \frac{51 : 17}{85 : 17} = \frac{3}{5}$$

Kürzen mit 17

Aufgaben

1

Fülle die Lücken durch Kürzen oder Erweitern.

$$a) \quad \frac{3}{5} = \frac{24}{\square} = \frac{12}{\square}$$

$$b) \quad \frac{49}{28} = \frac{\square}{4} = 1 \frac{6}{\square}$$

$$c) \quad \frac{33ab}{121a} = \frac{3b}{\square} = \frac{\square}{88c^2}$$

$$d) \quad \frac{12x^2y}{16x} = \frac{3xy}{\square} = \frac{\square}{96x^2y}$$

2

Kürze so weit wie möglich.

a) $\frac{36}{90}$

b) $\frac{55x^3y^2}{220x^5y}$

c) $\frac{95 \cdot 26 \cdot 55}{143 \cdot 25 \cdot 76}$

d) $\frac{5(a-b)^2}{0,5(a-b)(a+b)}$

Interaktive
Aufgaben

1. Erweitern



2. Kürzen

Addition und Subtraktion von Brüchen

Brüche mit verschiedenen Nennern kann man durch Erweitern auf einen **gemeinsamen Nenner** bringen. Es entstehen **gleichnamige Brüche**.

Der kleinste gemeinsame Nenner verschiedener Brüche heißt **Hauptnenner** dieser Brüche. Der Hauptnenner entspricht dem **kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches)** der Nenner. Gleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert bzw. subtrahiert und den **Nenner beibehält**.

Merke

Ungleichnamige Brüche werden addiert bzw. subtrahiert, indem man sie durch Erweitern **in gleichnamige Brüche umwandelt** und dann wie bekannt verfährt.

Beispiel

$$\begin{aligned} & -\frac{5}{6} + \frac{3}{8} \\ &= -\frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} \\ &= -\frac{20}{24} + \frac{9}{24} \\ &= \frac{-20 + 9}{24} \\ &= \frac{-11}{24} \\ &= -\frac{11}{24} \end{aligned}$$

Bestimme den Hauptnenner und erweitere die Brüche auf ihn.

HN: 24

Addiere bzw. subtrahiere die jetzt gleichnamigen Brüche.

Aufgabe

3

Bestimme den Hauptnenner und berechne.

a) $\frac{11}{12} - \frac{2}{9} + \frac{2}{3}$

b) $\left(\frac{27}{4} - \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{11}{16} - \frac{5}{8}\right)$

c) $12\frac{4}{5} - \left(4\frac{4}{7} + 3\frac{1}{2}\right) + 17\frac{1}{5}$

d) $\frac{4}{3}b + \frac{1}{64}a^3 - \frac{1a^4}{2a} + \frac{1b}{5} - \frac{11}{13}$

Interaktive
Aufgaben

3. Addition und Subtraktion



4. Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Multiplikation und Division von Brüchen und Bruchtermen

Merke

Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert und den **Nenner beibehält**.

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b} \quad (a, c \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Beispiel

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$$

Forme im Endergebnis den unechten Bruch in eine gemischte Zahl um.

Merke

Brüche werden multipliziert, indem man **Zähler mit Zähler** und **Nenner mit Nenner** multipliziert:

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \quad (a, b \in \mathbb{Z}; c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Beispiel

$$2 \frac{1}{4} \cdot 7 \frac{2}{3}$$

Gemischte Zahlen formt man zuerst in unechte Brüche um.

$$= \frac{\cancel{9}^3}{4} \cdot \frac{23}{\cancel{3}_1}$$

Das rechtzeitige Kürzen nicht vergessen!

$$= \frac{3 \cdot 23}{4 \cdot 1}$$

$$= \frac{69}{4}$$

Den unechten Bruch gibt man im Ergebnis als gemischte Zahl an.

$$= 17 \frac{1}{4}$$

Merke

Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem **Kehrbruch** des zweiten Bruchs multipliziert:

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b} \quad (a \in \mathbb{Z}; b, c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Beispiel

$$11 \frac{3}{7} : 2 \frac{12}{35}$$

Gemischte Zahlen werden vor der Division in unechte Brüche umgeformt.

$$= \frac{80}{7} : \frac{82}{35} \downarrow$$

Multiplikation mit dem Kehrbruch

$$= \frac{80}{7} \cdot \frac{35}{82}$$

$$= \frac{\cancel{80}^{40}}{\cancel{7}_1} \cdot \frac{\cancel{35}^5}{82 \cdot \cancel{41}_1}$$

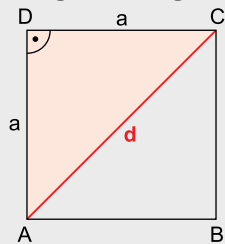
$$= \frac{200}{41}$$

$$= 4 \frac{36}{41}$$

Folgerungen aus dem Satz des Pythagoras

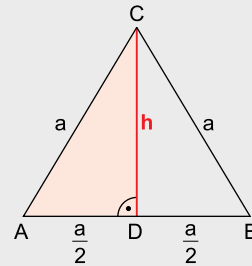
Merke

Länge der Diagonale im Quadrat



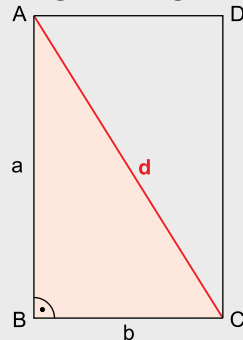
$$d = a\sqrt{2}$$

Höhe im gleichseitigen Dreieck



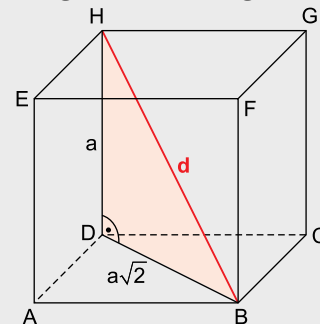
$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

Länge der Diagonale im Rechteck



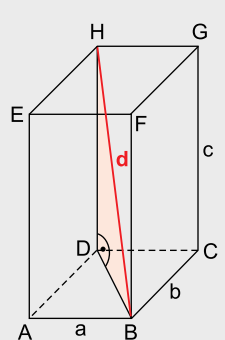
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Länge der Raumdiagonale im Würfel



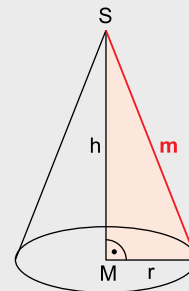
$$d = a\sqrt{3}$$

Länge der Raumdiagonale im Quader



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Länge der Mantellinie beim Kegel



$$m = \sqrt{r^2 + h^2}$$

Aufgaben

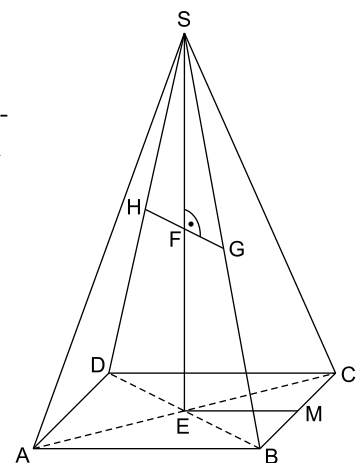
118

Ein gleichseitiges Dreieck hat die Seitenlänge $a=6$ cm. Berechne die Höhe und den Flächeninhalt.

119

Das nebenstehende Schrägbild zeigt eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Diagonalschnittpunkt E. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke [BC]. Es gilt: $\overline{AB} = 6$ cm; $\overline{ES} = 10$ cm. Berechne folgende Streckenlängen.

- \overline{AC} ; \overline{AE} ; \overline{SA} ; \overline{MS}
- \overline{GH} und \overline{GS} , wenn $\overline{FS} = 4$ cm



Merke**Länge einer Strecke im Koordinatensystem (Betrag eines Vektors)**

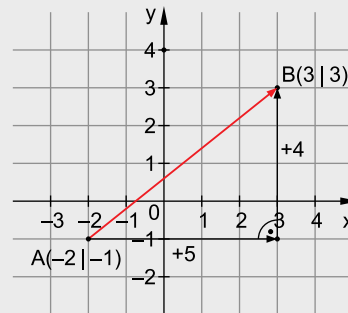
$$A(x_A | y_A); B(x_B | y_B)$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

**Beispiel**

Berechne die Länge der Strecke [AB] mit $A(-6 | 2)$ und $B(2 | 8)$.

Lösung:

Man wendet den Satz des Pythagoras auf das rechtwinklige Koordinatendreieck an.

Berechne die Koordinaten von \overrightarrow{AB} :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - (-6) \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Berechne den Betrag des Vektors \overrightarrow{AB} :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

oder:

Berechne die Länge der Strecke [AB]:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ LE}$$

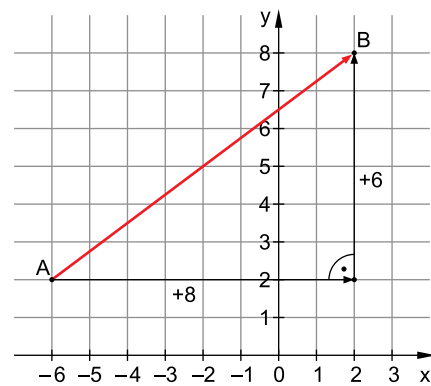
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2 - (-6))^2 + (8 - 2)^2} \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 6^2} \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64 + 36} \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{100} \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 10 \text{ LE}$$

**Aufgaben****120**

Bestimme den Betrag des Vektors.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$

121

Bestimme die Länge der Strecke [EF].

a) $E(-4 | 3); F(10 | 5)$

b) $E\left(1\frac{1}{2} \mid -6\frac{3}{4}\right); F\left(-9\frac{1}{4} \mid 2\frac{1}{8}\right)$

122

Der Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(1 | 2)$ verläuft durch den Punkt $P(5 | 5)$.

Berechne den Radius von k .

Überprüfe, ob der Punkt $Q(-4 | 2)$ auf, innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt.

123

Bestimme den Umfang des Dreiecks ABC mit $A(-3 | -2)$, $B(5 | 0)$ und $C(4 | 6)$.



**Interaktive
Aufgaben**

12. Abstand von 2 Punkten bestimmen

13. Gleichschenkliges Dreieck?

Abschlussprüfung an Realschulen 2019
Bayern – Mathematik II/III

Teil A

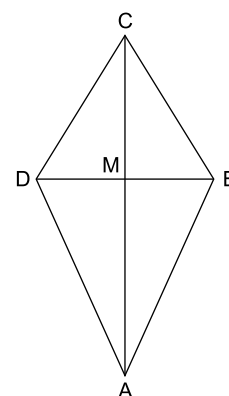
Aufgabe A 1

A 1.0 Pia möchte einen Flugdrachen bauen. Dazu erstellt sie nebenstehende Skizze eines Drachenvierecks ABCD mit der Symmetrieachse AC und dem Diagonalschnittpunkt M.

Es gilt:

$$\overline{AB} = 95 \text{ cm}; \overline{AC} = 150 \text{ cm}; \overline{BC} = 75 \text{ cm}.$$

Runden Sie im Folgenden auf Ganze.



- 2 Punkte A 1.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass für das Maß des Winkels ACB gilt:
 $\sphericalangle ACB = 32^\circ$.
- 2 Punkte A 1.2 Berechnen Sie die Länge der Diagonale [BD] und den Flächeninhalt A des Drachenvierecks ABCD.
 [Ergebnis: $\overline{BD} = 79 \text{ cm}$]
- 1 Punkt A 1.3 Da es im Baumarkt nur Holzstäbe mit einer Länge von 100 cm gibt, beschließt Pia, für die Diagonale [AC] diese Länge zu verwenden. Die Diagonale [BD] bleibt unverändert.
- Kreuzen Sie an, um wie viel Prozent sich der Flächeninhalt dadurch verringert.
- ☐ 25 %
 ☐ 33 %
 ☐ 50 %
 ☐ 67 %



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK