G9 Abitur

Abit

MEHR ERFAHREN

Mathemati

Gymnasium · Gesan

Niedersachsen

Das musst du können!

STARK

Inhalt

Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im **G9-Mathematik-Abitur** benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Steht im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im restlichen Buch ein (eA) hinter einem Thema, dann ist der zugehörige Inhalt **nur für das eA** wichtig. Alle anderen Themen sind für beide Anforderungsniveaus, also **gA und eA**, prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Hartmut Müller-Sommer

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden Bänden:

- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik eA (Bestell-Nr. 35000)
- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik gA (Bestell-Nr. 35100)

6 Integralrechnung

6.1 Der Begriff des Integrals

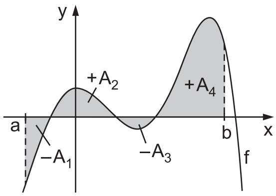
Werden die Inhalte von Flächen oberhalb der x-Achse mit einem positiven und unterhalb der x-Achse mit einem negativen Vorzeichen versehen, so spricht man von einem **orientierten Flächeninhalt**.

Geometrische Definition des Integrals
Die Funktion f sei über einem Intervall [a; b] definiert. Die Summe der orientierten Flächeninhalte der Teilflächen zwischen dem Graphen von f, der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse mit x = a und x = b nennt man das Integral der Funktion f von a bis b. Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

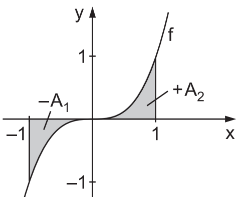
1. Für die Abbildung gilt:

   $$\int_a^b f(x)\,dx = -A_1 + A_2 - A_3 + A_4$$



2. $f(x) = x^3$, [a; b] = [–1; 1]
   Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, d. h. $A_1 = A_2$.

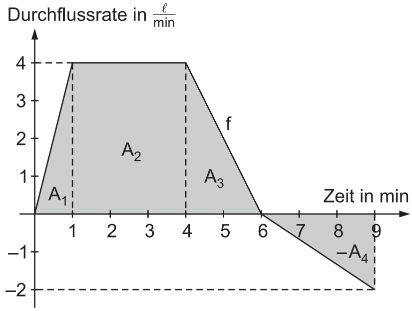
   $$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = -A_1 + A_2 = -A_1 + A_1 = 0$$



Rekonstruierter Bestand

Gibt die Funktion f die Änderungs-, Zuwachs- oder Zerfallsrate einer Größe an, so lässt sich der Bestand bzw. die Gesamtänderung dieser Größe nach einem bestimmten Zeitintervall mithilfe des Integrals berechnen: $\int_a^b f(x)\,dx$ gibt den Bestand bzw. die Gesamtänderung der Größe im Zeitraum [a; b] an.

Gibt f(t) die momentane Zufluss- bzw. Abflussrate beim Befüllen bzw. Entleeren eines Wassertanks im Zeitintervall [0; 9] an, so stellt das Integral $\int_0^9 f(t)\,dt$ einen orientierten Flächeninhalt dar, der als Gesamtänderung des Wasservolumens im Zeitintervall [0; 9] gedeutet werden kann. Der Flächeninhalt oberhalb (unterhalb) der t-Achse lässt sich als zugeflossenes (abgeflossenes) Wasservolumen deuten. Eine Flächeneinheit entspricht dabei einem Liter Wasser.



In der ersten Minute steigt der Zufluss gleichmäßig von 0 auf $4\,\frac{\ell}{\min}$ an. Die mittlere Zuflussrate beträgt $2\,\frac{\ell}{\min}$. In der ersten Minute kommen also $2\,\frac{\ell}{\min} \cdot 1\,\min = 2\,\ell$ dazu.

Im Intervall [1; 4] fließen $4\,\frac{\ell}{\min} \cdot 3\,\min = 12\,\ell$ und im Intervall [4; 6] fließen $2\,\frac{\ell}{\min} \cdot 2\,\min = 4\,\ell$ Wasser dazu.

Im Intervall [6; 9] ist die Durchflussrate negativ; die Abflussrate steigt gleichmäßig von 0 auf $2\,\frac{\ell}{\min}$. Es fließen $1\,\frac{\ell}{\min} \cdot 3\,\min = 3\,\ell$ ab.

Im Intervall [0; 9] beträgt die Gesamtänderung des Wasservolumens:

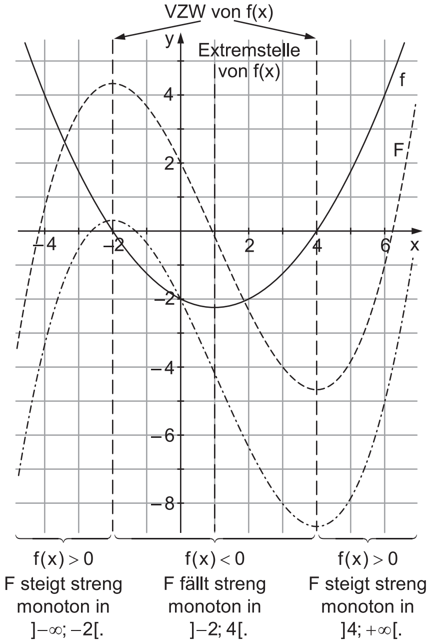
$$\int_0^9 f(t)\,dt = A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = 2 + 12 + 4 - 3 = 15\,[\ell]$$

Bemerkung: War der Tank zu Beginn leer, so beträgt der Bestand nach 9 Minuten 15 Liter.

6.2 Stammfunktion

Eine Funktion F ist Stammfunktion der Funktion f, wenn gilt:
$F'(x) = f(x)$

Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt den Graphen der Funktion f und den Graphen einer Stammfunktion F von f.



Es bestehen folgende Zusammenhänge:

- Vorzeichen von f
  $\Rightarrow$ Steigung von F
- Nullstellen von f mit VZW
  $\Rightarrow$ Extrema von F
- Extremstellen von f
  $\Rightarrow$ Wendestellen von F

Bemerkung: Eine Verschiebung des Graphen der Funktion F nach oben oder unten hat keinen Einfluss auf den Verlauf des Graphen der Funktion f (konstantes Glied fällt beim Ableiten weg). Es sind also unendlich viele Stammfunktionen möglich.

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist auch jede Funktion G mit $G(x) = F(x) + c$ ($c \in \mathbb{R}$) eine Stammfunktion von f.

Stammfunktionen der Grundfunktionen

Es gelten folgende Regeln:

$f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c$ (Potenzregel)

$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + H(x) + c$ (Summenregel)

$f(x) = k \cdot g(x)$ mit $k \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = k \cdot G(x) + c$ (Faktorregel)

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der Funktion.

1. $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2+1} \cdot x^{2+1} = \frac{1}{3} \cdot x^3$
2. $f(x) = x^2 + 4 \cdot x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{4}{3+1} \cdot x^{3+1} = \frac{1}{3} \cdot x^3 + x^4$
3. $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{-2+1} \cdot x^{-2+1} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}$

Weitere Grundfunktionen:

$f(x) = k \text{ mit } k \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad F(x) = k \cdot x + c$

$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad F(x) = e^x + c$

$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln(|x|) + c$

$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -x + x \cdot \ln(x) + c$

$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -\cos(x) + c$

$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = \sin(x) + c$

6.3 Integralfunktion und Hauptsatz

Eine Funktion I_a mit der Gleichung $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, der festen unteren Grenze $a \in \mathbb{D}_f$ und der variablen oberen Grenze x heißt Integralfunktion von f.

Eigenschaften der Integralfunktion

1. Die Integralfunktion I_a hat mindestens eine Nullstelle, nämlich bei $x = a$: $I_a(a) = 0$
2. Die Integralfunktionen I_a und I_b zur selben Integrandenfunktion f unterscheiden sich nur um eine Konstante c: $I_a(x) = I_b(x) + c$.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (Teil 1)

Ist die Funktion f stetig, so ist die Integralfunktion I_a differenzierbar und es gilt $I'_a(x) = f(x)$.

Mit anderen Worten: Jede Integralfunktion I_a ist eine Stammfunktion von f. Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so muss gelten: $I_a(x) = F(x) + c$. Die Konstante $c \in \mathbb{R}$ hängt von der unteren Grenze a ab. Aus $I_a(a) = 0$ folgt $c = -F(a)$.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (Teil 2)

Ist die Funktion f stetig und F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt für die Integralfunktion I_a:

$$I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Für den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall [a; b] gilt:

$$I_a(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Bemerkung: Für $F(b) - F(a)$ schreibt man auch kurz $[F(x)]_a^b$.

Integrationsregeln

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (Vertauschung der Integrationsgrenzen)

3. $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx;\ k \in \mathbb{R}$ (Faktorregel)

4. $\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ (Summenregel)

5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;\ a < c < b$ (Intervalladditivität)

6.4 Flächenberechnung

Berechnung des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse

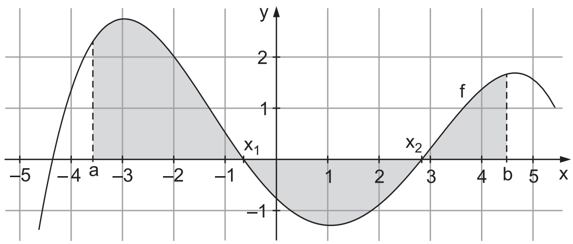
Zur Berechnung des Inhalts der vom Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall [a; b] eingeschlossenen Fläche muss in diesem Bereich über f(x) integriert werden. Dabei müssen die Teilflächen ober- und unterhalb der x-Achse getrennt betrachtet werden.

Vorgehensweise

Schritt 1: Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von f im Intervall [a; b] berechnen:
$f(x) = 0$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse $\hat{=}$ Summe der Beträge der Einzelintegrale über f(x)

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx \right|$$



Bestimmen Sie die Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2$ im Intervall [–1; 3] eingeschlossen wird.

Schritt 1: Bestimmung der Nullstellen

$$x^3 - 2x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2(x-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \;\text{ (doppelte Nullstelle) oder }\; x = 2$$

Schritt 2: Berechnung der Fläche

$$A = \left|\int_{-1}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{2}^{3} f(x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2}\right| + \left|\left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3\right]_{2}^{3}\right|$$

$$= \left|0 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3}\right)\right| + \left|\left(4 - \tfrac{16}{3}\right) - 0\right| + \left|\left(\tfrac{81}{4} - 18\right) - \left(4 - \tfrac{16}{3}\right)\right|$$

$$= \tfrac{11}{12} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{43}{12} = \tfrac{35}{6}\,[\text{FE}]$$

Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei Graphen

Zur Berechnung des Inhalts der von den Graphen zweier Funktionen f und g im Intervall [a; b] eingeschlossenen Fläche muss über die Differenz von f(x) und g(x) integriert werden. Dabei ist es egal, ob die eingeschlossene Fläche ober- bzw. unterhalb der x-Achse liegt, allerdings müssen hier die Teilflächen zwischen den Schnittstellen der beiden Graphen getrennt betrachtet werden.

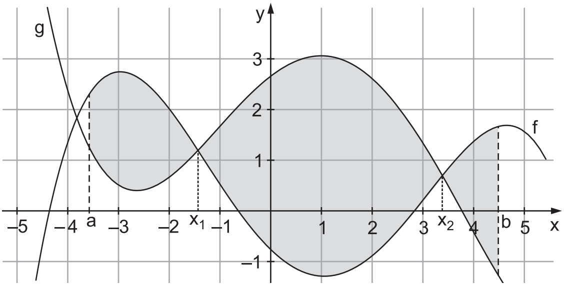
Vorgehensweise

Schritt 1: Schnittstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Graphen von f und g im Intervall [a; b] berechnen: $f(x) = g(x)$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen den Graphen von f und g
$\hat{=}$ Summe der Beträge der Einzelintegrale über die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$

$$A = \left|\int_{a}^{x_1} d(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} d(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} d(x)\,dx\right|$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob der Graph von f oberhalb des Graphen von g liegt oder umgekehrt.



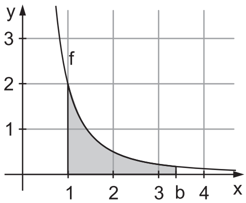
6.5 Uneigentliches Integral (eA)

Mithilfe der Integralrechnung können auch Flächen untersucht werden, die ins „Unendliche“ reichen. Man spricht dann von „uneigentlichen Integralen“ und unterscheidet zwei Fälle.

1. Eine Integrationsgrenze ist „unendlich“:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Der Graph von f schließt zusammen mit der x-Achse über dem Intervall $[1; \infty[$ eine unendlich ausgedehnte Fläche ein. Um diesen Flächeninhalt zu untersuchen, berechnet man zunächst den Inhalt A(b) der Fläche über dem Intervall [1; b]. Es gilt:

$$A(b) = \int_1^b \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^b = -\frac{2}{b} + 2$$

$$\Rightarrow \lim_{b \to \infty} A(b) = 2$$



Die unbegrenzte Fläche hat somit den endlichen Inhalt A = 2 [FE]. Man schreibt

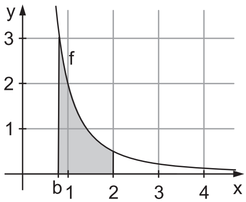
$$\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{2}{x^2}\,dx$$

und nennt dieses Integral uneigentliches Integral.

2. Die Funktionswerte sind im Integrationsintervall unbeschränkt:
Der Graph von f schließt zusammen mit der x-Achse über dem Intervall [0; 2] eine unendlich ausgedehnte Fläche ein. An der linken Integrationsgrenze ist die Funktion nicht definiert.
Man berechnet zunächst den Inhalt A(b) über [b; 2]:

$$A(b) = \int_b^2 \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_b^2 = -1 + \frac{2}{b}$$

$$\Rightarrow \lim_{b \to 0} A(b) = \infty$$



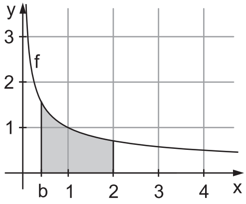
Die unbegrenzte Fläche hat also keinen endlichen Inhalt. Man sagt auch, dass das uneigentliche Integral $\int_0^2 \frac{2}{x^2}\,dx$ nicht existiert.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Untersuchen Sie, ob die unbeschränkte Fläche, die der Graph von f über dem Intervall [0; 2] mit der x-Achse einschließt, einen endlichen Flächeninhalt hat.

$$A(b)=\int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\left[2\sqrt{x}\right]_b^2=2\sqrt{2}-2\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow \lim_{b\to 0}\int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\lim_{b\to 0}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{b}\right)$$

$$=2\sqrt{2}\approx 2{,}83$$



Die Fläche hat einen endlichen Inhalt von ca. 2,83 [FE].

6.6 Volumenberechnung (eA)

Volumen von Rotationskörpern

Rotiert der Graph einer Funktion f über dem Intervall [a; b] um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper mit folgendem Volumen:

$$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Der Graph der Funktion $f(x)=x^{\frac{2}{3}},\ x\in[0;8]$ rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.

$$V=\pi\cdot\int_0^8 \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2 dx=\pi\cdot\int_0^8 x^{\frac{4}{3}}\,dx=\pi\cdot\left[\frac{3}{7}\cdot x^{\frac{7}{3}}\right]_0^8=\pi\cdot\frac{3}{7}\cdot 128$$

$$\approx 172{,}3\,[\text{VE}]$$