

2021

Lehrplan **PLUS**

# FOS · BOS 12

Fachabitur-Paket  
mit Lösungen

**MEHR  
ERFAHREN**

Bayern

Mathematik Tech

- + Aufgaben im Stil der Fachabitur
- + CAS-Abitur

ActiveBook  
Interaktives  
Training

Original-Prüfungsaufgaben  
**2020** zum Download



**STARK**

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

### Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1	Aufgabe der Beruflichen Oberschule .....	I
2	Schulversuch: Fachabiturprüfung mit Computer-Algebra-System (CAS) ..	II
3	Die schriftliche Fachabiturprüfung in Mathematik .....	III
4	Arbeit mit diesem Buch .....	V
5	Inhalte und Schwerpunktthemen .....	VI
6	Operatoren .....	IX
7	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung .....	X
8	Hinweise zum Bearbeiten der Aufgaben, bei denen CAS als Hilfsmittel zugelassen ist .....	XIV

### Übungsaufgaben zur Analysis

Aufgabe 1:	Krümmungsverhalten .....	Ü-1
Aufgabe 2:	Ableitung gegeben .....	Ü-3
Aufgabe 3:	Steckbrief .....	Ü-9
Aufgabe 4:	Steckbrief/Kurvendiskussion .....	Ü-12
Aufgabe 5:	Funktionenschar .....	Ü-21
Aufgabe 6:	Funktionenschar .....	Ü-23
Aufgabe 7:	Begründen/Widerlegen .....	Ü-27
Aufgabe 8:	Kurvendiskussion mit $f(x) \cdot e^{g(x)}$ .....	Ü-28
Aufgabe 9:	CO <sub>2</sub> -Emission .....	Ü-33

Aufgabe 10: Mehlwürmer .....	Ü-38
Aufgabe 11: Medikamentenkonzentration .....	Ü-41
Aufgabe 12: Körpertemperatur .....	Ü-45

### **Übungsaufgaben zur Geometrie**

---

Aufgabe 1: Punkte- und Geradenscharen .....	Ü-48
Aufgabe 2: Meeresgebiet .....	Ü-54
Aufgabe 3: Basis/Linearkombination .....	Ü-60
Aufgabe 4: Geradenschar .....	Ü-62
Aufgabe 5: Drohne .....	Ü-65
Aufgabe 6: Wintergarten .....	Ü-67
Aufgabe 7: Begründen / Widerlegen .....	Ü-73
Aufgabe 8: Speichenreflektor .....	Ü-75
Aufgabe 9: Hotel in Pyramidenform .....	Ü-80

### **Übungsaufgaben zur Analysis mit CAS**

---

Aufgabe 1: CO <sub>2</sub> -Emission .....	Ü-87
Aufgabe 2: Mehlwürmer .....	Ü-91
Aufgabe 3: Medikamentenkonzentration .....	Ü-94
Aufgabe 4: Körpertemperatur .....	Ü-96

### **Übungsaufgaben zur Geometrie mit CAS**

---

Aufgabe 1: Punkte- und Geradenscharen .....	Ü-98
Aufgabe 2: Meeresgebiet .....	Ü-104
Aufgabe 3: Basis/Linearkombination .....	Ü-110
Aufgabe 4: Geradenschar .....	Ü-112
Aufgabe 5: Drohne .....	Ü-114
Aufgabe 6: Wintergarten .....	Ü-115
Aufgabe 7: Speichenreflektor .....	Ü-118
Aufgabe 8: Hotel in Pyramidenform .....	Ü-121

## Musterprüfungen zum Fachabitur ab 2019

---

### Musterprüfung I

Teil 1, Analysis I (ohne Hilfsmittel) .....	M-1
Teil 1, Geometrie I (ohne Hilfsmittel) .....	M-7
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) .....	M-10
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) .....	M-20

### Musterprüfung II

Teil 1, Analysis II (ohne Hilfsmittel) .....	M-26
Teil 1, Geometrie II (ohne Hilfsmittel) .....	M-32
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) .....	M-36
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) .....	M-44

## Original-Fachabituraufgaben

---

### Fachabitur 2019 (Technik)

Teil 1, Analysis (ohne Hilfsmittel) .....	2019-1
Teil 1, Geometrie (ohne Hilfsmittel) .....	2019-8
Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) .....	2019-14
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) .....	2019-25
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) .....	2019-36
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) .....	2019-43

### Fachabitur 2019 mit CAS (Technik)

Teil 2, Analysis I (mit Hilfsmitteln) .....	2019-51
Teil 2, Analysis II (mit Hilfsmitteln) .....	2019-60
Teil 2, Geometrie I (mit Hilfsmitteln) .....	2019-68
Teil 2, Geometrie II (mit Hilfsmitteln) .....	2019-71

### Fachabitur 2020 (Technik)

[www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark)

### Fachabitur 2020 mit CAS (Technik)

[www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark)

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können sie als PDF auf der Plattform MyStark heruntergeladen werden (Zugangscode vgl. Farbs Seiten vorne im Buch).

## Digitales Übungsmaterial zu diesem Buch

---



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Fachabiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter [www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/](http://www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/) finden Sie ein **kostenloses Glossar** zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen im Fachabitur 2021 vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu unter [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark) (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

### Autoren

Lösungen zu den Original-Fachabituraufgaben (Technik):

OStR Winfried Stark (ohne CAS: ab 2019)

OStR Wolfgang Hager (ohne CAS: von 2016 bis 2018, mit CAS: ab 2015)

Lösungen zu den Original-Fachabituraufgaben (Nichttechnik):

StD Georg Ott und StD Friedrich Schmidt (ab 2014)

StD Eberhard Lehmann und StD Friedrich Schmidt (bis 2013)

Lösungen zu den Original-Abituraufgaben (Nichttechnik):

StD Dieter Pratsch

Musterprüfungen:

OStR Winfried Stark

## Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie haben zwei lehrreiche Jahre an der FOS bzw. ein Jahr an der BOS absolviert und werden eine schriftliche Prüfung im Fach Mathematik ablegen. Bei der Vorbereitung auf die Abschlussprüfungen wird Ihnen dieses Buch eine gute Hilfe sein.

Mit dem Fachabitur 2019 haben sich die Struktur und die Inhalte der Prüfung geändert. Die Fachabiturprüfungen bis 2018 eignen sich daher nur noch bedingt zur Vorbereitung.

Zur Einübung der Prüfungsinhalte bietet Ihnen dieses Buch daher neben den **offiziellen Fachabituraufgaben seit 2019** einen Übungsteil, der sich aus inhaltlich **relevanten offiziellen schriftlichen Prüfungsaufgaben bis 2018** zusammensetzt. Neben den Fachabiturprüfungen für die Ausbildungsrichtung Technik wurden bei der Zusammenstellung auch die für Sie relevanten Fachabitur- und Abiturprüfungsaufgaben für die nichttechnischen Ausbildungsrichtungen berücksichtigt. Außerdem erhalten Sie mit diesem Buch die entsprechenden Aufgaben aus den offiziellen Prüfungen, die mit einem Computer-Algebra-System (CAS) zu bearbeiten sind.

Um Ihnen eine weitere Übungsmöglichkeit zu geben, enthält das Buch zudem zwei **Musterprüfungen** im Stil der neuen Fachabiturprüfung.

Zu jeder Aufgabe folgen **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie zusätzliche **Lösungshinweise**, die Ihnen das eigenständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Die angeführten Lösungen sind dabei als **möglicher, aber keineswegs einziger Weg** zum Erreichen des Ergebnisses zu sehen.

Das Ziel der Arbeit mit dem Buch besteht darin, dass Sie die Problemstellungen weitgehend selbstständig bearbeiten können und die beschriebenen Lösungswege nur noch zur Kontrolle Ihrer eigenen Ergebnisse nutzen. Wenn Sie dieses Ziel erreicht haben, sind Sie gut auf die bevorstehende Prüfung vorbereitet.

Darüber hinaus können Sie dieses Buch **unterrichtsbegleitend** bei der systematischen Vorbereitung auf Schulaufgaben einsetzen, da Ihr Fachlehrer oder Ihre Fachlehrerin hier auch immer die Fachabiturprüfung im Blick haben wird.

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen für Ihre Prüfungen viel Erfolg!



## 3 Die schriftliche Fachabiturprüfung in Mathematik

---

### 3.1 Aufbau und Auswahl der Prüfungsaufgaben

Die Aufgaben werden einheitlich vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus gestellt. Die Prüfung ist in zwei Teile gegliedert:

- Teil 1 wird ohne Hilfsmittel bearbeitet, d. h. ohne Merkhilfe und ohne Taschenrechner. Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- Teil 2 wird mit Hilfsmittel bearbeitet (siehe Abschnitte 3.3 und 3.4). Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Jeder Teil setzt sich aus den beiden Aufgabengruppen A (Analysis) und G (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) zusammen.

In Teil 2 gibt es für jede Aufgabengruppe zwei Varianten (AI und AII bzw. GI und GII). Die Auswahl jeweils einer Variante trifft die Schule; die Schülerinnen und Schüler haben keine Wahlmöglichkeit.

In Teil 1 wird zentral nur eine Variante gestellt.<sup>1</sup>

Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit mit abzugeben.

Sämtliche Entwürfe und Aufzeichnungen dürfen nur auf Papier, das den Stempel der Schule trägt, angefertigt werden.

### 3.2 Bewertung der Prüfungsaufgaben

Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten (BE) angegeben. Es sind maximal 100 BE zu erreichen. Diese werden wie folgt verteilt:

	Aufgaben-gruppe	Bewertungs-einheiten
Teil 1	A	22 BE
	G	12 BE
Teil 2	A	43 BE
	G	23 BE

---

<sup>1</sup> Der Musterprüfungssatz in diesem Buch besteht in Teil 1 dennoch aus zwei Varianten pro Aufgabengruppe, um Ihnen zwei vollständige Prüfungen zum Üben zur Verfügung zu stellen.

Die erreichten Bewertungseinheiten werden nach dem folgenden Schlüssel den Punkten und Notenstufen zugeordnet:

Note	sehr gut			gut			befriedigend			ausreichend			mangelhaft			ungenügend
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Bewertungseinheiten	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	33	26	19
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
	96	91	86	81	76	71	66	61	56	51	46	41	34	27	20	0

### 3.3 Zugelassene Hilfsmittel (Prüfung ohne CAS)

Zugelassen ist die Merkhilfe Mathematik/Technik für Berufliche Oberschulen bzw. eine diese enthaltende zugelassene Formelsammlung. Außerdem ist die Verwendung von elektronischen Taschenrechnern gestattet, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind.

Die Merkhilfe Mathematik/Technik wurde von den Fachmitarbeitern der Dienststellen der Ministerialbeauftragten für die Beruflichen Oberschulen des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus erarbeitet. Sie ist auf der Website des Staatinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung ([www.isb.bayern.de](http://www.isb.bayern.de)) zu finden.

### 3.4 Zugelassene Hilfsmittel (Prüfung mit CAS)

Zusätzlich zu den Hilfsmitteln für die Prüfung ohne CAS sind folgende Computer-Algebra-Systeme zugelassen:

- ClassPad 330 und ClassPad II von Casio
- TI-Nspire CAS und TI-Nspire CX CAS von Texas Instruments
- Voyage 200 von Texas Instruments
- MathCAD
- GeoGebra

Vor der Verwendung bei der Abschlussprüfung sind die CAS-Rechner jeweils einheitlich in einen Ausgangszustand zu versetzen, der den Prüfungsanforderungen gerecht wird. In diesem Ausgangszustand muss ein Zugriff auf möglicherweise gespeicherte Dateien, Programme oder Ergänzungspakete mit zusätzlichen Funktionen unterbunden sein.



## Bayern • FOS • BOS 12 • Übungsaufgaben

### Prüfungsrelevante Aufgaben zur Geometrie\*

#### Aufgabe 1: Punkte- und Geradenscharen

FOS/BOS 12 Technik, 2016, Bl. 1

- 1.0** In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $A(8|5|6)$ ,  $B(4|1|-1)$ ,  $P_a(2|a|-1)$  und  $Q_b(-2b|b|b+1)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  sowie die Geraden  $h_1$  und  $h_2$  gegeben:

$$h_1: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad h_2: \bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Geraden  $h_1$  und  $h_2$  spannen die Ebene E auf.

- 1.1** Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
- 1.2** Die Ebene E:  $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 13 = 0$  schneidet die  $x_1-x_3$ -Ebene in der Geraden s. Ermitteln Sie eine Gleichung von s.
- 1.3** Die Gerade g geht durch den Punkt A und schneidet die Ebene E im Punkt  $P_a$ . Ermitteln Sie eine Gleichung von g.
- 1.4** Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E sowie die Koordinaten des Spiegelpunktes A', der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene E entsteht.
- 1.5** Prüfen Sie, ob es einen Wert für den Parameter b gibt, sodass die Vektoren  $\overline{BA}$  und  $\overline{BQ_b}$  orthogonal sind.
- 1.6** Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide  $ABQ_2P_3$ .
- 1.7** Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar  $f_c$ :  
$$f_c: \bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c-1,5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \kappa, c \in \mathbb{R}.$$
Untersuchen Sie, für welche Werte von c sich die Gerade  
$$g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ mit } v \in \mathbb{R}$$
mit einer Geraden aus der Geradenschar  $f_c$  schneidet.

**Teilaufgabe 1.1**

Zwei Geraden legen eine Ebene E fest, falls sie zueinander echt parallel sind oder einen Schnittpunkt haben.

Prüfen Sie die beiden Geraden auf Parallelität, indem Sie die beiden Richtungsvektoren auf Kollinearität untersuchen, d. h., prüfen Sie, ob der eine Richtungsvektor ein Vielfaches des anderen Richtungsvektors ist.

Bestimmen Sie zur Berechnung des Normalenvektors der Ebene E geeignete Richtungsvektoren und verwenden Sie das Vektorprodukt.

**Teilaufgabe 1.2**

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die  $x_1$ - $x_3$ -Ebene.

Setzen Sie die Koordinatengleichung für die  $x_1$ - $x_3$ -Ebene in die Gleichung von E ein.

**Teilaufgabe 1.3**

Bestimmen Sie den Schnittpunkt von g und E, indem Sie den Punkt  $P_a$  in die Ebene einsetzen.

Stellen Sie mithilfe des berechneten Schnittpunktes und des Punktes A eine Geradengleichung für g auf.

**Teilaufgabe 1.4**

Der Abstand eines Punktes zu einer Ebene entspricht dem Abstand dieses Punktes zum Lotfußpunkt des Punktes auf der Ebene.

Den Spiegelpunkt eines Punktes bei Spiegelung an einer Ebene berechnet man ebenfalls mit der Lotfußpunktmethode.

Bestimmen Sie die Gleichung der Hilfsgeraden, welche senkrecht zur Ebene E ist und als Aufpunkt den zu spiegelnden Punkt A enthält.

Berechnen Sie den Lotfußpunkt, indem Sie den Schnittpunkt der Hilfsgeraden mit der Ebene E bestimmen.

Der Abstand zweier Punkte entspricht dem Betrag des Verbindungsvektors.

Der gesuchte Spiegelpunkt ergibt sich, indem Sie vom zu spiegelnden Punkt zweimal den Verbindungsvektor von ebendiesem Punkt zum Lotfußpunkt addieren.

**Teilaufgabe 1.5**

Zwei Vektoren sind genau dann zueinander orthogonal (senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.

**Teilaufgabe 1.6**

Entnehmen Sie die Formel für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide der Merkhilfe.

**Teilaufgabe 1.7**

Bestimmen Sie die Schnittmenge der beiden Geraden durch Gleichsetzen und prüfen Sie, für welche Werte von c sich eine eindeutige Lösung ergibt.

**Lösungsvorschlag**

- 1.1** Wenn zwei Geraden eine Ebene aufspannen, sind diese entweder echt parallel oder schneiden sich in einem Schnittpunkt.

Prüfen, ob parallel: Ist der Richtungsvektor von  $h_1$  ein Vielfaches von  $h_2$ ?

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RV(h_1)} = k \cdot \overrightarrow{RV(h_2)} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k = -1 \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 \parallel h_2\end{aligned}$$

Der Normalenvektor der Ebene E kann also mit dem Vektorprodukt aus dem Verbindungsvektor der Aufpunkte von  $h_1$  und  $h_2$  mit einem der beiden Richtungsvektoren gebildet werden:

$$\begin{aligned}\vec{n}_E &= (\overrightarrow{AP(h_1)} - \overrightarrow{AP(h_2)}) \times \overrightarrow{RV(h_2)} \\ \vec{n}_E &= \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \circ \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = 0\end{aligned}$$

- 1.2** Die  $x_1-x_3$ -Ebene kann beispielsweise durch die Gleichung  $x_2=0$  dargestellt

werden. Ein möglicher Normalenvektor dieser Ebene ist:  $\vec{n}_{x_1-x_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden s ist sowohl zur Ebene E als auch zur  $x_1-x_3$ -Ebene parallel, also senkrecht zu den beiden Normalenvektoren dieser Ebenen. Er kann mit dem Vektorprodukt ermittelt werden:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$



## Bayern • FOS • BOS 12 • Musterprüfung

Mathematik (Technik) – Teil 1, Analysis I (ohne Hilfsmittel)

### Aufgabenstellung

BE

- 1 Entscheiden Sie, welche Funktionsterme einen Graphen besitzen, der punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft. Geben Sie für Ihre Entscheidung auch eine kurze Begründung an.

Für alle Funktionen gilt  $D_f = \mathbb{R}$ .

5

Punktsymmetrie		Funktionsterm $f(x)$	Begründung
ja	nein		
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$x \cdot (x - 4) \cdot (x + 2)$	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$x \cdot (x - 4)^2 \cdot (x + 4)$	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$2 - x \cdot (x^2 - 1)$	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$x \cdot e^{1-x^2}$	

## TIPP ➤ Lösungshinweise – Teil 1, Analysis I

---

### Teilaufgabe 1

Achten Sie auf die Nullstellen und deren Vielfachheiten.

Achten Sie auf die Exponenten.

Verwenden Sie unter Umständen das (Punkt-)Symmetriekriterium:

$$f(-x) = -f(x)$$

### Teilaufgabe 2.1

Bestimmen Sie die Steigung des Graphen der Funktion  $g$  in seinem linken Wendepunkt.

Nutzen Sie diese Steigung, um die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen  $G_g$  anzugeben.

Untersuchen Sie das Steigungsverhalten des Graphen der Funktion  $g$  für  $x \rightarrow -\infty$ .

Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaften des Graphen  $G_g$ .

Entscheiden Sie, an welcher Stelle der Graph  $G_g$  die x-Achse schneidet.

Zeichnen Sie den Graphen  $G_g$  ein.

### Teilaufgabe 2.2

Schätzen Sie die eingeschlossene Fläche durch „Kästchen-Zählen“ ab.

### Teilaufgabe 2.3

Berechnen Sie die Koordinaten des relativen Hochpunktes.

Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion  $g$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Treffen Sie eine Aussage für die Wertemenge  $W$  und achten Sie dabei auf die richtigen Intervallgrenzen.

### Teilaufgabe 3.1

Geben Sie die Nullstellen der Funktion  $h_a$  an.

Führen Sie eine Fallunterscheidung durch und argumentieren Sie dabei mit der geometrischen Deutung der Vielfachheit der Nullstellen.

Beachten Sie, dass sich zwischen zwei Nullstellen stets ein relativer Extrempunkt befindet.

### Teilaufgabe 3.2

Lösen Sie die entsprechende Ungleichung mithilfe einer Vorzeichen-tabelle und beachten Sie, dass  $a > 0$  gilt.

## Lösungsvorschlag – Teil 1, Analysis I

1

Punktsymmetrie			
ja	nein	Funktionsterm $f(x)$	Begründung
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$x \cdot (x - 4) \cdot (x + 2)$	Die Nullstellen sind nicht symmetrisch zu $x = 0$ .
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$x \cdot (x - 4)^2 \cdot (x + 4)$	Die Nullstellen sind zwar symmetrisch zu $x = 0$ , aber sie haben unterschiedliche Vielfachheiten.
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	$2 - x \cdot (x^2 - 1)$	Der Term enthält einen Summanden mit <b>geradzahligem</b> Exponenten: $\begin{aligned} f(x) &= 2 - x(x^2 - 1) = 2 - x^3 + x \\ &= -x^3 + x - 2 \end{aligned}$
<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$x \cdot e^{1-x^2}$	Das Produkt einer zum Koordinatenursprung symmetrischen Funktion ( $f(x) = x$ ) und einer zur $y$ -Achse symmetrischen Funktion ( $g(x) = e^{1-x^2}$ ) ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. <i>Alternativ:</i> $\begin{aligned} f(-x) &= -x \cdot e^{1-(-x)^2} \\ &= -x \cdot e^{1-x^2} = -f(x) \end{aligned}$ Da zudem $D_f = \mathbb{R}$ symmetrisch zu $x = 0$ ist, ist der Graph der Funktion $f$ symmetrisch zum Koordinatenursprung.

2.1

Im Punkt W (linker Wendepunkt des Graphen) hat der Graph der Funktion  $g$  seine maximale Steigung. Der Wendepunkt liegt ungefähr bei  $W(-0,7 | 0,25)$ . Zeichnet man im Punkt W die Tangente an den Graphen  $G_g$  und entnimmt dieser den Wert der Steigung mithilfe eines Steigungsdreiecks, so erhält man:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,8}{1} = 0,8$$

Weil  $g'(-0,7) = m = 0,8$  ist, gilt für den Hochpunkt des Graphen der Ableitungsfunktion  $g'$ :

$$H(-0,7 | 0,8)$$

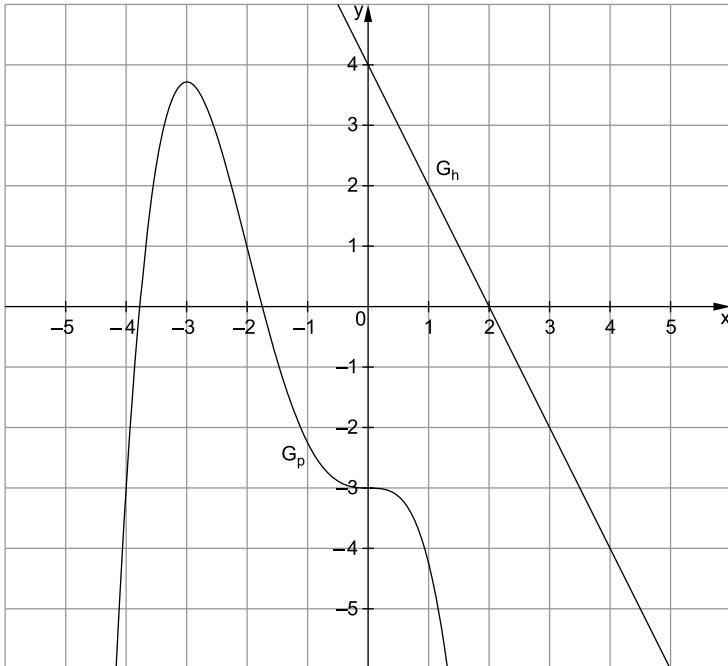
$$\text{Für } x \rightarrow -\infty \text{ folgt: } g(x) = -\frac{1}{e} + e^{1-x^2} \rightarrow -\frac{1}{e}$$



## Aufgabenstellung

BE

- 1 Die Funktion  $f'_a: x \mapsto (x-a)^2 \cdot (x+3)$  mit der Definitionsmenge  $D_{f'_a} = \mathbb{R}$  ist die erste Ableitungsfunktion der Funktion  $f_a$  mit  $D_{f_a} = \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}$ .  
Bestimmen Sie sämtliche Werte für  $a$ , sodass der Graph der zugehörigen Funktion  $f_a$  mehr als einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt.  
Begründen Sie, von welcher Art diese Punkte dann jeweils sind. 5
- 2.0 Die ganzrationale Funktion 4. Grades  $p$  und die lineare Funktion  $h$  sind auf  $D_p = D_h = \mathbb{R}$  definiert.  
In der nachfolgenden Abbildung sind Ausschnitte der Graphen von  $p$  und  $h$  dargestellt.  
Hinweis: Ganzzahlige Werte können der Abbildung entnommen werden.



## TIPP ➤ Lösungshinweise – Teil 1, Analysis

### Teilaufgabe 1

Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung  $f'_a(x) = 0$  und entscheiden Sie, für welche Werte von  $a$  man zwei unterschiedliche Lösungen erhält.

Untersuchen Sie das Vorzeichenverhalten der Funktionswerte von  $f'_a$  in der Umgebung der Nullstellen (z. B. mit einer Vorzeichentabelle) und schließen Sie daraus auf die Art der Punkte mit waagrechter Tangente.

### Teilaufgabe 2.1

Entnehmen Sie der Grafik den ganzzahligen Funktionswert  $h(3)$ .

### Teilaufgabe 2.2

Entnehmen Sie der Grafik die Nullstelle  $x_0$  der Funktion  $h$ .

Entscheiden Sie anhand der Grafik, wie viele Lösungen die Gleichung  $p(x) = x_0$  besitzt.

### Teilaufgabe 3

Der Funktionsterm besteht aus zwei Summanden: einer Konstanten und einem von  $t$  abhängigen Term.

Der von  $t$  abhängige Term beschreibt die Temperaturdifferenz zum Zeitpunkt  $t$  und strebt mit zunehmender Zeit gegen null.

### Teilaufgabe 4.1

- Die erste Ableitung liefert eine Aussage über das Steigungsverhalten des Graphen.
- Die zweite Ableitung liefert eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen.
- Das bestimmte Integral liefert den Wert einer eingeschlossenen Fläche (bzw. Flächenbilanz). Treffen Sie davon ausgehend eine Entscheidung darüber, wo der überwiegende Teil der Fläche bezüglich der  $x$ -Achse liegt.

### Teilaufgabe 4.2

Nutzen Sie die Bedeutung der in 4.1 festgelegten Aussagen.

### Teilaufgabe 5.1

Untersuchen Sie für jeden Funktionsterm das Verhalten der Funktionswerte für  $x \rightarrow +\infty$  und  $x \rightarrow -\infty$ .

Bringen Sie den Funktionsterm  $t(x)$  in Produktform.

### Teilaufgabe 5.2

Lösen Sie die Gleichung  $s(x) = u(x)$ .

## Lösungsvorschlag – Teil 1, Analysis

- 1 Stellen mit waagrechter Tangente:

$$f'_a(x) = 0$$

$$(x - a)^2(x + 3) = 0$$

$$x_1 = -3; \quad x_2 = a$$

**TIPP** Falls  $a = -3$  ist, besitzt  $f'_a$  eine einzige Nullstelle (und zwar die dreifache Nullstelle  $x_1 = -3$ ).

Zwei unterschiedliche Nullstellen der Ableitungsfunktion  $f'_a$  und somit zwei unterschiedliche Stellen mit waagrechter Tangente an den Graphen der Funktion  $f_a$  hat man für alle  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .

### 1. Fall: $a > -3$

VZT	-3	a	x
$(x-a)^2$	+	+	0
$(x+3)$	-	0	+
$f'_a(x)$	-	0	+
$G_{f_a}$	↓	→	↑ TeP
	TP		

### 2. Fall: $a < -3$

VZT	a	-3	x
$(x-a)^2$	+	0	+
$(x+3)$	-	-	0
$f'_a(x)$	-	0	+
$G_{f_a}$	↓	→	↑ TP
	TeP	↓	TP

In beiden Fällen hat der Graph der Funktion  $f_a$  einen relativen Tiefpunkt an der Stelle  $x_1 = -3$  und einen Terrassenpunkt an der Stelle  $x_2 = a$ .

*Alternative Begründung:*

$x_1 = -3$  ist eine einfache Nullstelle der Ableitungsfunktion  $f'_a$ , d. h.,  $f'_a$  hat an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel von – nach +.

⇒ Der Graph der Funktion  $f_a$  hat an der Stelle  $x_1 = -3$  einen relativen Tiefpunkt.

$x_2 = a$  ist eine doppelte Nullstelle der Ableitungsfunktion  $f'_a$ , d. h.,  $f'_a$  hat an dieser Stelle keinen Vorzeichenwechsel.

⇒ Der Graph der Funktion  $f'_a$  hat an der Stelle  $x_2 = a$  einen Terrassenpunkt.

- 2.1 Der Grafik kann entnommen werden, dass gilt:

$$h(3) = -2 \text{ und } p(-2) = 1$$

Somit folgt:

$$p(h(3)) = p(-2) = 1$$



## Aufgabenstellung

BE

- 1.0** Der Graph  $G_f$  einer auf  $D_f = \mathbb{R}$  definierten Funktion  $f: x \mapsto ax^4 + bx^3 + c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  besitzt die beiden Wendepunkte  $W_1(0|1)$  und  $W_2(2|-3)$ .
- 1.1** Ermitteln Sie den Funktionsterm von  $f$ .  
[Teilergebnis:  $a = \frac{1}{4}$ ;  $b = -1$ ;  $c = 1$ ] 3
- 1.2** Bestimmen Sie die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes von  $G_f$ . 3
- 1.3** Zeichnen Sie unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse sowie weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen  $G_f$  im Bereich  $-1,5 \leq x \leq 4,25$  in ein kartesisches Koordinatensystem ein.  
Maßstab: x-Achse: 1 LE = 2 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm 3
- 1.4** Gegeben ist weiterhin die Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung  $g(x) = 2x - 7$  auf  $D_g = \mathbb{R}$ . Der Graph  $G_g$  dieser Funktion schließt mit dem Graphen  $G_f$  ein endliches Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graphen von  $g$  in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 ein, kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. 4
- 2.0** Gegeben ist die reelle Funktion  $h_k: x \mapsto 2x^3 + 4kx^2 + 8x$  mit  $k \in \mathbb{R}$  und  $D_{h_k} = \mathbb{R}$ .
- 2.1** Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist.  
„Der Graph der Funktion  $h_k$  ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.“ 2
- 2.2** Ermitteln Sie, für welche Werte für  $k$  die Funktion  $h_k$  genau eine Nullstelle besitzt. 5
- 2.3** Bestimmen Sie den Wert für  $k$ , für den die Funktion  $h_k$  an der Stelle  $x = 2$  einen relativen Tiefpunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. 4

**Teilaufgabe 1.1**

Stellen Sie mithilfe der Informationen aus der Aufgabenstellung ein Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses mit dem CAS.

Die Wendepunkte liegen auf  $G_f$  und erfüllen die Funktionsgleichung.

An den Wendestellen ist der Wert der 2. Ableitung der Funktion  $f$  gleich null.

**Teilaufgabe 1.2**

Besitzt die Funktion  $f'$  eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach –, dann hat die Funktion  $f$  dort ein lokales Maximum. Bei einem Vorzeichenwechsel von – nach + liegt dagegen ein lokales Minimum vor.

Bestimmen Sie den Funktionswert von  $f$  an der Stelle des Extremums.

**Teilaufgabe 1.3**

Erstellen Sie mit dem CAS eine Wertetabelle.

Beachten Sie den Maßstab.

**Teilaufgabe 1.4**

Bestimmen Sie mit dem CAS die beiden Schnittstellen  $x_1$  und  $x_2$  der Graphen von  $f$  und  $g$  und damit die Integralgrenzen.

Verwenden Sie für die Flächenberechnung das Integral von „oberer Graph minus unterer Graph“.

**Teilaufgabe 2.1**

Untersuchen Sie mit dem CAS, ob  $h_k(-x) = h_k(x)$  (Achsensymmetrie zur y-Achse) oder  $h_k(-x) = -h_k(x)$  (Punktsymmetrie zum Ursprung).

**Teilaufgabe 2.2**

Bestimmen Sie mit dem CAS alle möglichen Nullstellen in Abhängigkeit von  $k$ .

Untersuchen Sie, ob es Parameterwerte für  $k$  gibt, für die genau eine Nullstelle vorliegt.

**Teilaufgabe 2.3**

Einen relativen Tiefpunkt bei  $x = 2$  kann es nur geben, wenn die 1. Ableitung von  $h_k$  an dieser Stelle null ist.

Setzen Sie in die 1. Ableitung den Wert  $x = 2$  ein und bestimmen Sie mit dem CAS, für welche Parameterwerte für  $k$  die 1. Ableitung null ist.

Prüfen Sie mit der 2. Ableitung von  $h_k$ , ob bei  $x = 2$  tatsächlich ein Tiefpunkt vorliegt.

## Lösungsvorschlag – Teil 2, Analysis I

- 1.1** Die Funktion  $f$  hat laut Angabe folgende Form:  $f(x) = ax^4 + bx^3 + c$

**TIPP** Es empfiehlt sich, im ersten Schritt die Funktion  $f$  in Abhängigkeit der Parameter zu definieren und dann die 2. Ableitungsfunktion zu berechnen.

Mit den Informationen aus der Aufgabenstellung erhält man ein Gleichungssystem, das man mit dem CAS löst:

$$\left. \begin{array}{l} f(0)=1 \\ f(2)=-3 \\ f''(0)=0 \\ f''(2)=0 \end{array} \right\} \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} a=\frac{1}{4}; \quad b=-1; \quad c=1$$

$f(x):=a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c$	Fertig
$f_{aa}(x):=\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	Fertig
solve $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(2)=-3 \\ f_{aa}(0)=0 \\ f_{aa}(2)=0 \end{cases}, \{a,b,c\}$	
$a=\frac{1}{4} \text{ and } b=-1 \text{ and } c=1$	

- 1.2** Stellen mit waagrechter Tangente:

$$f'(x)=0 \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} x=0 \vee x=3$$

Vorzeichenverhalten von  $f'(x)$ :

$$f'(x)<0 \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} x<3 \wedge x \neq 0$$

$$f'(x)>0 \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} x>3$$

$f(x):=\frac{1}{4} \cdot x^4 - x^3 + 1$	Fertig
$f_{,a}(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	Fertig
solve $f_{,a}(x)=0, x$	$x=0 \text{ or } x=3$
solve $f_{,a}(x)<0, x$	$x \neq 0 \text{ and } x < 3$
solve $f_{,a}(x)>0, x$	$x > 3$
$f(3)$	$\frac{-23}{4}$

Da  $f'(x)$  an der Stelle  $x=3$  einen Vorzeichenwechsel von  $-$  nach  $+$  besitzt, besitzt  $f$  dort ein relatives Minimum.

$$f(3) \stackrel{\text{CAS}}{=} -\frac{23}{4} \Rightarrow \text{Relativer Tiefpunkt } T\left(3 \left| -\frac{23}{4}\right.\right)$$

- 1.3** Vgl. Teilaufgabe 1.3 der Prüfung ohne CAS.

Eine Kontrolle mit dem CAS ist möglich.

- 1.4** Einzeichnen des Graphen von  $g$  in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.3 und Kennzeichnen des beschriebenen Flächenstücks.

Bestimmung der Schnittstellen der beiden Graphen (Integralgrenzen):

$$f(x)=g(x) \stackrel{\text{CAS}}{\Rightarrow} x=2 \vee x=4$$

Bestimmung der Flächenmaßzahl:

$$A = \int_2^4 (g(x) - f(x)) dx \stackrel{\text{CAS}}{=} \frac{32}{5}$$

$g(x):=2 \cdot x - 7$	Fertig
solve $f(x)=g(x), x$	$x=2 \text{ or } x=4$
$\int_2^4 (g(x)-f(x)) dx$	$\frac{32}{5}$



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**