2021

Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Gymnasium ... Wü...berg

Mathematik LF

+ *Offizielle Musteraufgaben*
+ *Merkhilfe*
+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2020** zum Download

STARK

Inhaltsverzeichnis

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Hilfsmittel

Aufgaben des offiziellen Aufgabenfundus

Übungsaufgabensatz 1 im Stil der Prüfung

Übungsaufgabensatz 2 im Stil der Prüfung

Offizielle Beispielaufgabe für 2021

Abiturprüfung 2019

Abiturprüfung 2020

www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Abiturprüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie diese als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen (Zugangscode vgl. Farbseiten vorne im Buch).

ActiveBook Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren
Winfried König, Dr. Jürgen Mehnert, Dr. Raimund Ordowski
(Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung, Übungsaufgabensätze im Stil der Prüfung sowie Lösungen aller Aufgaben)

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

Das Abitur 2021

Die Einführung des fünfstündigen Leistungsfaches Mathematik hat Änderungen in der schriftlichen Abiturprüfung zur Folge. Aus diesem Grund finden Sie in diesem Buch u. a. zwei vollständige Übungsmustersätze im Stil der Abiturprüfung, die die neuen Herausforderungen und Inhalte präzise abbilden.

Dennoch bleiben viele frühere Abituraufgaben als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet; dies gilt insbesondere für die Aufgaben der Jahre 2019 und 2020. In diesen beiden Abiturjahrgängen war bereits der WTR (und nicht mehr der GTR) zugelassenes Hilfsmittel. Den Jahrgang 2019 finden Sie in diesem Buch, die Abiturprüfung 2020 steht Ihnen inklusive gewohnt ausführlicher Lösungen auf der Plattform MyStark zum Download zur Verfügung.

Die Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung Mathematik

Grundlage für das Abitur im Jahr 2021 ist nach wie vor der Bildungsplan 2004 für das achtjährige Gymnasium. Die schriftliche Prüfung in Mathematik erstreckt sich über die Gebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik. Nach der Einführung des Leistungsfaches sind folgende Inhalte **neu** Gegenstand der Prüfung:

Analysis:
- Volumen von Rotationskörpern auch mithilfe der Integralrechnung

Analytische Geometrie:
- Abstand windschiefer Geraden
- Beweise mithilfe von Vektoren

Stochastik:
- Stetige Zufallsgrößen
- Standardabweichung der Binomialverteilung
- Ein- und zweiseitige Tests mithilfe der Binomialverteilung, Fehler 1. und 2. Art
- Normalverteilung (Dichtefunktion, Erwartungswert, Standardabweichung, Glockenkurve)

Sie erkennen auf einen Blick, dass in der Stochastik die meisten Änderungen vorgenommen wurden.

Nach wie vor **nicht** Gegenstand der schriftlichen Prüfung sind:
- Folgen
- Wachstumsprozesse
- Differenzialgleichungen

Die schriftliche Prüfung ist in einen **Pflichtteil** und einen **Wahlteil** unterteilt.

Pflichtteil

Seit der Prüfung 2017 umfasst der **Pflichtteil** 20 Verrechnungspunkte (VP), also ein Drittel der Gesamtprüfung. Es werden darin Grundkompetenzen in Form von kleineren Aufgaben abgeprüft. Ab 2021 wird der Pflichtteil aus **acht Aufgaben mit jeweils 2,5 VP** bestehen. Wichtig für Sie: Im Pflichtteil sind die größten Änderungen im Vergleich zu den Prüfungen der letzten Jahre zu erwarten.

Bisher übliche Fragestellungen, wie das isolierte Ableiten, Stammfunktionen bilden oder Berechnen von Integralen und das Lösen von Gleichungen, wird es so nicht mehr geben. Die dazu notwendigen inhaltlichen Kompetenzen werden zum Lösen der zukünftigen Pflichtteilaufgaben aber weiterhin unerlässlich sein, nur werden die Aufgaben in einen etwas größeren Kontext, durchaus auch mit entsprechendem Sachzusammenhang, eingekleidet sein.

Für den Pflichtteil sind **keinerlei Hilfsmittel** zugelassen.

Wahlteil

Der **Wahlteil** umfasst zwei Drittel der Gesamtprüfung. Er beinhaltet größere Aufgaben zu den drei Teilgebieten mit zusammenhängenden Fragestellungen, wobei verstärkt Transfer, Modellieren von realen Situationen und Entwickeln von Lösungsstrategien gefragt sind.

Beim Wahlteil sind als **Hilfsmittel** – neben einem Nachschlagewerk zur deutschen Rechtschreibung – die **Merkhilfe** sowie ein wissenschaftlicher Taschenrechner (**WTR**) mit dem mitgelieferten Handbuch zugelassen.

Anforderungen an eine Schülerlösung

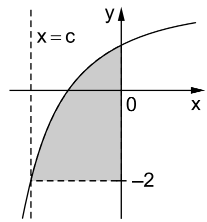
Erwartet wird eine saubere und nachvollziehbare Dokumentation in einer korrekten Fachsprache.
Die Darstellung sollte durch Ergebnissätze und gegebenenfalls durch verbale Beschreibung des Vorgehens übersichtlich strukturiert sein.
Neu eingeführte Bezeichnungen sind zu definieren, dies gilt insbesondere für Zufallsgrößen in der Stochastik.
Die Lösung sollte keine Angabe über Tastenfolgen von WTR-Eingaben enthalten.

Pflichtteil

Aufgabe 1

Abgebildet ist der Graph der Funktion f mit:

$f(x) = -\frac{4}{(x+2)^2} + 2;\ \ x > -2$



a) Begründen Sie, dass c den Wert –1 hat.

b) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

2,5 VP

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 \cdot e^{1-x}$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f'(x) = (4x^3 - x^4) \cdot e^{1-x}$ ein Term der ersten Ableitung von f ist.

Für a, b, $c \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion g durch $g(x) = ax^2 + bx + c$ gegeben.

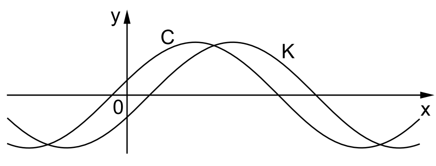
b) Berechnen Sie die Werte für a, b und c so, dass die Nullstelle von f auch Nullstelle von g ist und sich die Graphen von f und g im Punkt $B(1\,|\,f(1))$ berühren.

2,5 VP

Aufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = \sin(x-a)$ und g mit $g(x) = \cos(2-x)$.

Die Abbildung zeigt die Graphen von f_6 und g.



a) Bestimmen Sie eine Nullstelle von g.

b) Ordnen Sie die Graphen C und K den Funktionen f_6 und g zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

c) Begründen Sie, dass der Graph von $f_{2-\frac{\pi}{2}}$ mit dem Graphen der Funktion g übereinstimmt.

2,5 VP

TIPP **Lösungshinweise zum Pflichtteil**

Aufgabe 1

Teilaufgabe a

Welche Gerade schneidet der Graph von f bei $x = c$ in der Abbildung?

Was muss damit für f(c) gelten?

Beachten Sie, wie viele Schnittpunkte es im sichtbaren Bereich gibt.

Teilaufgabe b

Wodurch ist die markierte Fläche begrenzt?

Wie berechnet man den Inhalt einer Fläche, die zwischen zwei Graphen liegt?

Ist die Lage der Fläche relevant, d. h., spielt es eine Rolle, ob Teile ober- bzw. unterhalb der x-Achse liegen?

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

Sie benötigen die Produkt- und die Kettenregel.

Vergessen Sie nicht, den e-Term auszuklammern.

Teilaufgabe b

Berechnen Sie die Nullstelle von f. Kann e^{1-x} den Wert null annehmen?

Welche Bedingungen sind erfüllt, wenn sich zwei Graphen berühren?

Insgesamt entsteht ein LGS mit drei Gleichungen und drei Unbekannten, das sich rasch vereinfachen lässt, da Sie den Wert eines Parameters direkt ablesen können.

Aufgabe 3

Teilaufgabe a

Überlegen Sie, wo z. B. die „erste“ Nullstelle (im positiven Bereich) von cos(x) liegt.

Was bedeutet das für die Nullstelle(n) von g?

Teilaufgabe b

Welches Vorzeichen hat g(0)? Skizzieren Sie ggf. den Graphen von cos(x).

Mit diesem Vorzeichen können Sie die Zuordnung bereits vornehmen.

Teilaufgabe c

Wie geht der Graph von sin(x) aus dem Graphen von cos(x) hervor?

Den Term $\cos(2-x)$ können Sie umformen, wenn Sie die Symmetrie des Graphen von cos(x) beachten.

Lösungsvorschlag – Pflichtteil

Aufgabe 1

a) Da der Graph von f und die Parallele zur x-Achse $y=-2$ im sichtbaren Bereich genau einen gemeinsamen Punkt besitzen, genügt es zu zeigen, dass $f(-1)=-2$ gilt. Durch Einsetzen erhält man:

$$f(-1)=-\frac{4}{(-1+2)^2}+2=-4+2=-2$$

Damit hat c den Wert –1.

b) Die markierte Fläche wird begrenzt durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x)=-\frac{4}{(x+2)^2}+2,$$

die Parallele zur x-Achse $y=-2$ bzw. $g(x)=-2$ und die y-Achse.

Da es bei Flächen, die von den Graphen zweier Funktionen begrenzt werden, keine Rolle spielt, ob Teile der Fläche unter- oder oberhalb der x-Achse liegen, erhält man für $c=-1$ für den gesuchten Flächeninhalt A:

$$\begin{aligned} A=\int_{-1}^{0}(f(x)-g(x))\,dx &= \int_{-1}^{0}\left(-\frac{4}{(x+2)^2}+2-(-2)\right)dx \\ &= \left[\frac{4}{x+2}+4x\right]_{-1}^{0} \\ &= 2-(4-4)=2 \end{aligned}$$

Die markierte Fläche hat den **Inhalt 2**.

Aufgabe 2

a) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^4\cdot e^{1-x}$. Für die Ableitung der Funktion f erhält man unter Verwendung der Produkt- und der Kettenregel:

$$f'(x)=4x^3\cdot e^{1-x}+x^4\cdot e^{1-x}\cdot(-1)=(4x^3-x^4)\cdot e^{1-x}$$

b) Eine Funktion g ist gegeben durch $g(x)=ax^2+bx+c$.

Zunächst ist die Nullstelle von f zu berechnen. Der Ansatz $f(x)=0$ führt auf $x^4\cdot e^{1-x}=0$; wegen $e^{1-x}\neq 0$ ist $x=0$ einzige Lösung (Satz vom Nullprodukt).

Für die Funktion g gilt:

- Die Nullstelle von f ist auch Nullstelle von g, d. h.:
  (1) $g(0)=f(0)=0$
- Die Graphen von f und g berühren sich im Punkt $B(1\,|\,f(1))$, d. h.:
  (2) $g(1)=f(1)$
  (3) $g'(1)=f'(1)$

Mit $g'(x) = 2ax + b$ ergeben diese drei Bedingungen das LGS:

$$\begin{array}{lrl|l} (1) & & c = 0 & [f(0) = 0] \\ (2) & a + b + c &= 1 & [f(1) = 1 \cdot e^0 = 1] \\ (3) & 2a + b &= 3 & [f'(1) = (4-1) \cdot e^0 = 3] \end{array}$$

Einsetzen von $c = 0$ liefert:

$$\begin{array}{lrl|l} (2') & a + b &= 1 & \cdot(-1) \\ (3') & 2a + b &= 3 & \hookleftarrow \end{array} ; \quad \begin{array}{rl|} a + b &= 1 \\ a &= 2 \end{array} ; \quad \begin{array}{rl|} a &= 2 \\ b &= -1 \end{array}$$

Man erhält $\mathbf{a = 2}$, $\mathbf{b = -1}$ und $\mathbf{c = 0}$ bzw. $g(x) = 2x^2 - x$.

Aufgabe 3

a) Eine Nullstelle von g:

$$g(x) = 0$$
$$\cos(2 - x) = 0$$

Von den unendlich vielen Nullstellen der Kosinusfunktion wählt man z. B.:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Damit folgt:

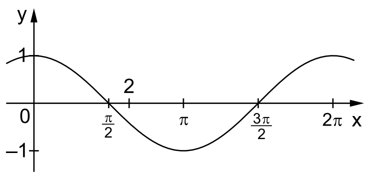
$$2 - x = \frac{\pi}{2}$$
$$\mathbf{x = 2 - \frac{\pi}{2}}$$

b) Es gilt:

$g(0) = \cos(2) < 0,$ da $\dfrac{\pi}{2} < 2 < \dfrac{3\pi}{2}$

und $\cos(u) < 0$ für alle u mit

$\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{3\pi}{2}$ (siehe Skizze).



Daher gehört **K zu g und C zu f_6**.

c) Wegen der Achsensymmetrie des Graphen von cos(x) und mit dem allgemeinen Zusammenhang zwischen sin(x) und cos(x) gilt:

$$\cos(2 - x) = \cos(x - 2) = \sin\left(x - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \underbrace{\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)}_{a}\right)$$

Damit stimmen die Graphen von g und $f_{2-\frac{\pi}{2}}$ überein.

Wahlteil: Stochastik C 2

Ein Glücksspielautomat enthält drei gleiche Glücksräder, die jeweils wie dargestellt in fünf gleich große Kreissektoren eingeteilt sind. Bei jedem Spiel werden die Räder in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau ein Symbol im jeweiligen Rahmen angezeigt wird. Ein Spieler gewinnt nur dann, wenn alle drei Räder einen Stern zeigen.

a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit bei einem Spiel 6,4 % beträgt.
Ein Spieler spielt 20 Spiele.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: „Der Spieler gewinnt mehr als einmal."
B: „Der Spieler gewinnt in genau zwei Spielen und diese folgen direkt aufeinander." 3 VP

b) Eine Spielerin spielt 9 Spiele.
Für ein Ereignis C gilt dabei $P(C) = 0{,}064^a + 9 \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936^b$.
Geben Sie geeignete Werte für a und b an und beschreiben Sie das Ereignis C im Sachzusammenhang. 2 VP

c) Es wird vermutet, dass das mittlere Rad zu selten ein Sternsymbol zeigt. Deshalb wird die Nullhypothese „Das mittlere Rad zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens zwei Fünfteln ein Sternsymbol." getestet. Man vereinbart ein Signifikanzniveau von 3 % und einen Stichprobenumfang von 300 Drehungen.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 2,5 VP

d) Die Glücksräder des Automaten werden durch drei neue ersetzt, die sich nicht voneinander unterscheiden. Die Glücksräder sind in mehrere gleich große Sektoren unterteilt. Jedes Glücksrad trägt in genau einem Sektor ein Sternsymbol. Man gewinnt bei 50 Spielen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % höchstens einmal.
Bestimmen Sie die minimale Anzahl der Sektoren pro Glücksrad. 2,5 VP

TIPP Lösungshinweise zum Wahlteil Stochastik – Aufgabe C 2

Aufgabe C 2 – Teilaufgabe a

Gewinnwahrscheinlichkeit

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Stern bei einem Glücksrad?

Was folgt daraus für die Wahrscheinlichkeit, bei allen drei Glücksrädern das Sternsymbol zu erhalten?

Ereignis A

Führen Sie eine Zufallsgröße X ein, die die Anzahl der gewonnenen Spiele bei 20 Spielen beschreibt. Geben Sie die Verteilung dieser Zufallsgröße an.

Mit Ihrem WTR können Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit wegen des „>“ nicht direkt berechnen.

„Mehr als einmal“ weist in diesem Zusammenhang darauf hin, wie Sie vorgehen können. Was ist das Gegenereignis zu „gewinnt mehr als einmal“? Wie berechnen Sie damit $P(X > 1)$?

Zur Bedienung des WTR können Sie bei WTR 5 nachschlagen.

Ereignis B

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Spiel zu verlieren?

Überlegen Sie, wie Sie die Wahrscheinlichkeit für „der Spieler gewinnt das erste und zweite Spiel, danach verliert er alle“ berechnen würden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, dass die beiden gewonnenen Spiele direkt aufeinander folgen? Sind diese alle gleich wahrscheinlich?

Aufgabe C 1 – Teilaufgabe b

Ereignis im Sachzusammenhang

Welche Wahrscheinlichkeit hat den Wert 0,064?

Die Spielerin spielt 9 Spiele. Was bedeutet das für a bzw. die Summe aus 8 und b?

Welche Wahrscheinlichkeit wird durch den ersten Summanden berechnet, welche durch den zweiten?

Aufgabe C 1 – Teilaufgabe c

Entscheidungsregel

Führen Sie für die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad ein Sternsymbol zeigt, den Parameter p ein.

Wie lautet dann die Nullhypothese, wie die Alternative?

Handelt es sich um einen rechts- oder linksseitigen Test? Sprechen kleine oder große Werte gegen die Nullhypothese?

Führen Sie die Zufallsgröße Y ein, die die Anzahl der Drehungen beschreibt, bei denen ein Stern erscheint.

a) **Gewinnwahrscheinlichkeit:**
Da die Wahrscheinlichkeit für ein Sternsymbol bei allen drei Glücksrädern $\frac{2}{5}$ beträgt, gilt für die Gewinnwahrscheinlichkeit:

$$\mathbf{p_G} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0{,}064 = \mathbf{6{,}4\ \%}$$

Ein Spieler spielt 20 Spiele.

A: „Der Spieler gewinnt mehr als einmal."
Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der gewonnenen Spiele bei 20 Spielen. X ist $B_{20;\,0{,}064}$-verteilt.

$\mathbf{P(A)} = P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}369 = \mathbf{36{,}9\ \%}$ (WTR 5)

B: „Der Spieler gewinnt in genau zwei Spielen und diese folgen direkt aufeinander."
Der Spieler gewinnt in zwei Spielen, in 18 Spielen verliert er. Die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Spiel zu verlieren, ist $1 - 0{,}064 = 0{,}936$.
Es gibt 19 Möglichkeiten dafür, dass die beiden gewonnenen Spiele unmittelbar aufeinander folgen (Spiel 1 und 2, Spiel 2 und 3, …, Spiel 19 und 20). Jede dieser Möglichkeiten hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $0{,}064^2 \cdot 0{,}936^{18}$. Somit gilt:

$\mathbf{P(B)} = 19 \cdot 0{,}064^2 \cdot 0{,}936^{18} \approx 0{,}024 = \mathbf{2{,}4\ \%}$

b) **Ereignis im Sachzusammenhang:**
Eine Spielerin spielt 9 Spiele.
Für $\mathbf{a = 9}$ und $\mathbf{b = 1}$ erhält man den Term:

$P(C) = 0{,}064^9 + 9 \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936^1$

Die Spielerin gewinnt alle 9 Spiele oder genau 8 Spiele, wobei es für den letzten Fall 9 Möglichkeiten gibt (vgl. Erläuterung zu Ereignis B in Teilaufgabe a).

C: „Die Spielerin gewinnt mindestens achtmal."

Alternative:
Da eine Bernoulli-Kette vorliegt, kann der Term mithilfe der Bernoulli-Formel umgeformt werden. Beschreibt X_1 die Anzahl der gewonnenen Spiele, so gilt:

$$\begin{aligned}P(C) &= 0{,}064^9 + 9 \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936^1 \\ &= \binom{9}{9} \cdot 0{,}064^9 \cdot 0{,}936^0 + \binom{9}{8} \cdot 0{,}064^8 \cdot 0{,}936^1 \\ &= P(X_1 \geq 8)\end{aligned}$$

© **STARK Verlag**
www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK