Ott
Rosner

Mathematatik im Berufskolleg

Prüfungsaufgaben zur Fachhochschulreife 2021 Baden-Württemberg

Merkur Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser

Roland Ott
Oberstudienrat

Stefan Rosner
Studienrat an der Kaufmännischen Schule in Schwäbisch Hall

* * * * *

19. Auflage 2020

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0459-19
ISBN 978-3-8120-1056-6

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung dient zur Vorbereitung auf die **Prüfung zur Fachhochschulreife 2021** an Berufskollegs und ist auf die neue Prüfungsordnung abgestimmt.

Dem neuen Prüfungsmodus wird durch eine Vielzahl von Aufgaben für Teil 1, der ohne Hilfsmittel bearbeitet werden muss, und für den Teil 2, bei welchem Hilfsmittel zugelassen sind, Rechnung getragen.

Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.

Da die Aufgabensammlung allen Schülern/Schülerinnen bei der **selbstständigen** Vorbereitung auf das FHSR-Prüfung helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.

An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Prüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik

Zu Beginn: SchülerIn erhält beide Aufgabenteile, jedoch keine Hilfsmittel

Phase 1: Bearbeitung des hilfsmittelfreien Teils

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
1	Analysis	keine	ca. 60 min	30

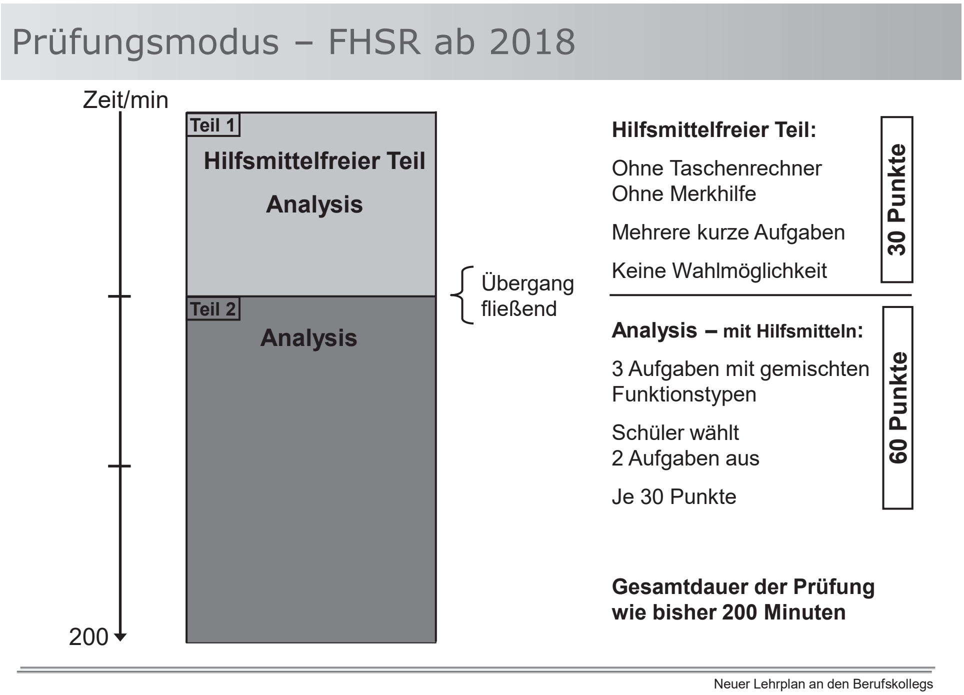
Nach endgültiger Abgabe von Teil 1 erhält SchülerIn die Hilfsmittel

Phase 2: Bearbeitung der Teile mit Hilfsmitteln (WTR + Merkhilfe)

Teil	Thema	Auswahl	Richtzeit	Punkte
2	Analysis	SchülerIn wählt **zwei aus drei** Aufgaben	ca. 140 min	60

Hinweise

- Die Prüfung dauert insgesamt maximal 200 Minuten.
  Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 90 Punkte.



Pandemiebedingte Abweichungen für die Prüfung zur Fachhochschulreife in Mathematik im Schuljahr 2020/2021

Abweichend von den Prüfungen in den vergangenen Jahren werden der **Fachlehrkraft** vorgelegt:

- zwei Aufgaben zum hilfsmittelfreien Pflichtteil (je 30 Punkte) mit Aufgaben aus der Analysis, aus denen die Fachlehrkraft eine für die Bearbeitung durch die Schülerinnen und Schüler auswählt und
- ein hilfsmittelgestützter Prüfungsteil mit 3 Aufgaben aus der Analysis mit jeweils 30 Punkten (Schülerwahl 2 aus 3 wie bisher auch)

Die Analysisaufgaben werden auch im Schuljahr 2020/2021 in gemischter Form angeboten. Dabei wird die Durchmischung der Funktionstypen in den Aufgaben des Wahlteils im Schuljahr 2020/2021 in den einzelnen Aufgaben wie folgt festgelegt:
Erste Aufgabe des Wahlteils: Polynomfunktionen ca. 70 %, Exponentialfunktionen ca. 30 %
Zweite Aufgabe des Wahlteils: Exponentialfunktionen ca. 50 %, Trigonometrische Funktionen ca. 50 %
Dritte Aufgabe des Wahlteils: Polynomfunktionen ca. 70 %, Trigonometrische Funktionen ca. 30 %

Änderungen im Prüfungsstoff:
Darüber hinaus ist im Schuljahr 2020/2021 die Lehrplaneinheit 2 des Bildungsplans **nur eingeschränkt prüfungsrelevant**:
Die **Lösung Linearer Gleichungssysteme** beschränkt sich auf LGS mit **maximal zwei** Unbekannten.

I Teil 1 der Fachhochschulreife-Prüfung ohne Hilfsmittel

1 Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Lösungen Seite 21**

1.1 Lösen Sie die Gleichung: $-2x^3 + 6x = 2x$.

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$ in $x = 2$.

1.3 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten.

1.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ x - y &= 3. \end{aligned}$$

1.5 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx$.

1.6 Bestimmen Sie die Art und Lage der Nullstellen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x-2)(x+1)$.

1.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$, wird um 3 nach links verschoben und um 1 nach unten verschoben. Wie lautet die Gleichung der entstandenen Kurve?

1.8 Bilden Sie die erste Ableitung von f mit $f(x) = e^{2x-3} - 2x + 1$.

1.9 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^4 + 3$ und $g(x) = 2x^2$. Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Schaubilder von f und g.

Aufgabe 2 **Lösungen Seite 22/23**

2.1 Bestimmen Sie zwei Lösungen der Gleichung: $4\sin(2x) = 0$.

2.2 Welche Gerade schneidet das Schaubild der Funktion f mit
$f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, in $x = 2\pi$ senkrecht?

2.3 Zeigen Sie: Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1$ besitzt keinen Wendepunkt.
Ist K_f eine Linkskurve? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.4 Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x - y &= -2 \end{aligned}$$

2.5 Bestimmen Sie $u \neq 0$, so dass $\int_u^0 (x + 2)\,dx = 0$

2.6 Bestimmen Sie die Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente an das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$; $x \in \mathbb{R}$.

2.7 Wie entsteht das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1$; $x \in \mathbb{R}$, aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$.

2.8 Bestimmen Sie die Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x)$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse in 3 schneidet.

2.9 Zeigen Sie, die Gleichung $e^{2x} + e^x = 2$ hat genau eine Lösung.

2.10 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x$; $x \in \mathbb{R}$ an.

Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p.

Lösungen der Übungsaufgaben Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 **Aufgabe Seite 9**

1.1 Gleichung in Nullform: $-2x^3 + 6x = 2x \Leftrightarrow -2x^3 + 4x = 0$

Auslammern: $2x(-x^2 + 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $x = 0 \vee -x^2 + 2 = 0$

$-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Lösungen: $x_1 = 0;\ x_{2|3} = \pm\sqrt{2}$

1.2 $f(x) = 2 - \frac{1}{4}x^2$; $f'(x) = -\frac{1}{2}x$

$f(2) = 1$; $f'(2) = -1$ einsetzen in $y = mx + b$: $1 = -1 \cdot 2 + b$ ergibt $b = 3$

Gleichung der Tangente: $y = -x + 3$

1.3 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1$; $f'(x) = -x^2 + 6x$; $f''(x) = -2x + 6$; $f'''(x) = -2 \neq 0$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$f(3) = 17$ ergibt $W(3 \mid 17)$

1.4 Additionsverfahren:
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \quad \cdot(-2) \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$
ergibt $7y = -5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7}$

Einsetzen in $x - y = 3$ ergibt $x - (-\frac{5}{7}) = 3 \Leftrightarrow x = 3 - \frac{5}{7} = \frac{16}{7}$

Lösung: $(\frac{16}{7}; -\frac{5}{7})$

1.5 $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x\right]_{-1}^{0} = 0 - (\frac{1}{4} - 2) = \frac{7}{4}$

1.6 $f(x) = \frac{1}{5}x^2(x - 2)(x + 1)$ Art und Lage der Nullstellen:

$x = 0$ doppelte Nullstelle (K_f berührt die x-Achse)

$x = 2$; $x = -1$ einfache Nullstelle (K_f schneidet die x-Achse)

1.7 $f(x) = 2\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$

K_f wird um 3 nach links verschoben: $y = 2\sin(x + 3)$ (Ersetze x durch $(x + 3)$)

und um 1 nach unten verschoben: $y = 2\sin(x + 3) - 1$

1.8 Mit der Kettenregel: $f'(x) = 2 \cdot e^{2x-3} - 2$

1.9 Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ $-x^4 + 3 = 2x^2$

Nullform: $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Substitution: $x^2 = u$ $u^2 + 2u - 3 = 0$

Mit Formel oder $u^2 + 2u - 3 = (u - 1)(u + 3)$: $u_1 = -3$; $u_2 = 1$

Rücksubstitution: $u_2 = x^2 = 1 \Rightarrow x_{1|2} = \pm 1$

($u_1 = x^2 = -3$ hat keine Lösung)

Schnittpunkte der Schaubilder $S_1(-1 \mid 2)$; $S_2(1 \mid 2)$ (vgl. Symmetrie)

Aufgabe 2 **Aufgabe Seite 10**

2.1 $4\sin(2x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2x) = 0$ für $2x = 0; \pi; 2\pi; \ldots$

Lösungen: $x_1 = 0; \; x_2 = \frac{\pi}{2}$ (oder auch $x = \pi; x = -\frac{\pi}{2}; \ldots$)

2.2 $f(x) = \cos(\frac{1}{4}x) - 1; x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4}x)$

Senkrecht schneiden bedeutet negativer Kehrwert der Steigung:

$f'(2\pi) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{1}{4} \cdot 2\pi) = -\frac{1}{4}\sin(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{4}$

Steigung der Geraden: $m = \frac{-1}{-\frac{1}{4}} = 4$

$f(2\pi) = -1; y = 4x + b$: $\quad -1 = 4 \cdot 2\pi + b \Rightarrow b = -1 - 8\pi$

Gerade durch $P(2\pi \mid -1)$ mit Steigung 4: $\quad y = 4x - 1 - 8\pi$

2.3 $f(x) = e^{-\frac{1}{3}x} - x + 1; \; f'(x) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} - 1; f''(x) = \frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}x}$

K_f hat keinen Wendepunkt, da $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$f''(0) = \frac{1}{9} > 0$ $\quad K_f$ ist eine Linkskurve, da $f''(x) > 0$

2.4 $x + 2y = 1$ (I) $\wedge$ $x - y = -2$ (II) $\quad$ (I) − (II) ergibt $\quad 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

einsetzen von $y = 1$ in $x + 2y = 1$ ergibt $x = -1$

Lösung: $(-1; 1)$

2.5 $\int_u^0 (x + 2)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_u^0 = 0 - (\frac{1}{2}u^2 + 2u) = 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{2}u^2 - 2u = 0$

Ausklammern: $\quad u \cdot (-\frac{1}{2}u - 2) = 0$

Satz vom Nullprodukt: $\quad u = 0; u = -4$

$u \neq 0$ nach Aufgabe, also einzige Lösung $u = -4$.

2.6 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2; \; f'(x) = x^3 + 3x^2; \; f''(x) = 3x^2 + 6x; \; f'''(x) = 6x + 6;$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ $\quad 3x^2 + 6x = 0$

$3x(x + 2) = 0$ für $x_1 = 0; x_2 = -2$

$f'(0) = 0$ (Tangente ist waagrecht); $f'(-2) = 4$

Mit $f(-2) = -6$ und dem Ansatz: $y = mx + b$: $-6 = 4 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 2$

Gleichung der nicht waagrechten Wendetangente: $y = 4x + 2$

2.7 Das Schaubild von f mit $f(x) = 2\cos(3x) - 1; x \in \mathbb{R}$, entsteht aus dem Schaubild mit der Gleichung $y = \cos(x)$ durch Streckung in y-Richtung mit Faktor 2, Streckung in x-Richtung mit Faktor $\frac{1}{3}$ und Verschiebung um 1 nach unten.

2.8 Stammfunktion von f mit $f(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}x); x \in \mathbb{R}$: $F(x) = -\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}x) + c$

durch $(0 \mid 3)$: $F(0) = -\frac{3}{2\pi} + c = 3 \Rightarrow c = 3 + \frac{3}{2\pi}$

Stammfunktion: $F(x) = -\frac{3}{2\pi}\cos(\frac{\pi}{3}x) + 3 + \frac{3}{2\pi}$

III Musteraufgabensätze zur Fachhochschulreife-Prüfung

Musteraufgabensatz 1 — Lösung Seite 114 - 121

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel — Punkte

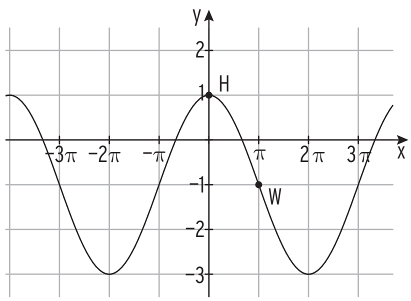
1.1 Geben Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktion f mit
$f(x) = -3 \cdot (x-2) \cdot x^2; \quad x \in \mathbb{R}$ an. — 3

1.2 Vervollständigen Sie folgende Aussagen:
a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat mindestens ________ Nullstelle(n). — 1
b) Eine Polynomfunktion 4. Grades hat höchstens ______ Extremstelle(n), denn ihre Ableitung ist vom Grad ______ . — 2

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x)$ mit $x \in [-6; 6]$.
Das Schaubild von h ist K_h.
Bestimmen Sie die Periode von h.
Geben Sie die Koordinaten eines Schnittpunktes von K_h mit der x-Achse sowie die Koordinaten eines Extrempunktes an. — 5

1.4 Gegeben ist f mit $f(x) = x^3 - 3x; \ x \in \mathbb{R}$ mit dem Schaubild K_f.
Untersuchen Sie das Schaubild auf Wendepunkte. — 4

1.5 Der Funktionsterm einer Funktion h hat die Form $h(x) = a \cdot \cos(bx) + c$.
Ihr Schaubild ist K_h.
In der Abbildung ist K_h mit einem Hochpunkt H und einem Wendepunkt W von K_h eingezeichnet.



Geben Sie die passenden Werte für a, b und c an. — 3

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Punkte**

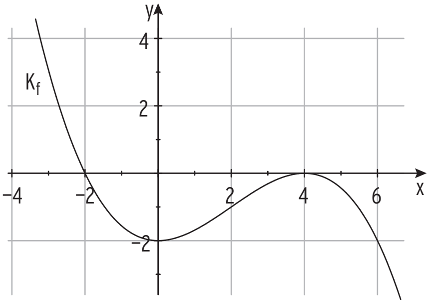
Fortsetzung

1.6 Die Abbildung zeigt das Schaubild K_f einer Polynomfunktion f.
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) $f(-2) < 0$

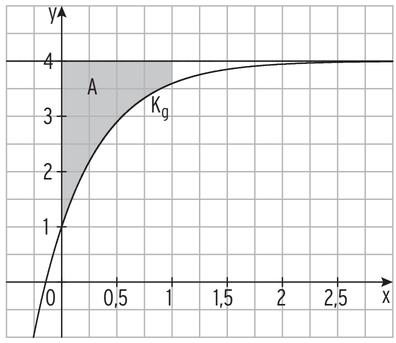
b) $f'(-2) < 0$

c) $f''(-2) < 0$ 6



1.7 Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = -5x^3 + 1 - e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$. 2

1.8 Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = 4 - 3e^{-2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Das zugehörige Schaubild K_g ist dargestellt.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A. 4



30

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

2.1 Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 3. Grades berührt die x-Achse bei $x = -3$ und verläuft durch den Ursprung.
Weiterhin liegt der Punkt $A(1 \mid \frac{16}{3})$ auf dem Schaubild der Funktion.
Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, mit dessen Hilfe sich der Term dieser Funktion bestimmen lässt. 6

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x;\ x \in \mathbb{R}$.
Ihr Schaubild ist K_f.

2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem. 9

2.3 Berechnen Sie $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. 5

Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}$ und $h(x) = e^{\frac{1}{2}x};\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von g ist K_g und das Schaubild von h ist K_h.

2.4 K_h soll in y-Richtung so verschoben werden, dass K_g den verschobenen Graphen auf der y-Achse schneidet.
Bestimmen Sie den neuen Funktionsterm. 3

2.5 Die Kurve K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = -8$ begrenzen eine Fläche. In diese Fläche soll ein zur y-Achse symmetrisches Dreieck mit den Eckpunkten $S(0 \mid -8)$ und $P(u \mid g(u))$ mit $0 \leq u \leq 3$ einbeschrieben werden.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für $u = 2$.
Weisen Sie nach, dass für $u \approx 1{,}73$ der Inhalt des Dreiecks maximal wird. 7

30

Musteraufgabensatz 1

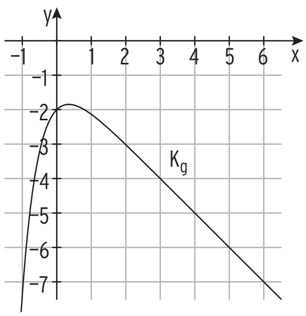
Aufgabe 3 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(\pi x) + 2$: $x \in [-1; 4]$.
Ihr Schaubild ist K_f.

3.1 Zeichnen Sie K_f. Geben Sie die Koordinaten von drei gemeinsamen Punkten mit der x-Achse an. 5

3.2 Der Punkt W(1 | 2) ist ein Wendepunkt von K_f.
Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -2\pi \cdot x + 2 + 2\pi$ Tangente an K_f im Punkt W ist.
Die Tangente, die y-Achse und K_f schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 10

3.3 Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g einer Funktion g.



Begründen Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Die Ableitungsfunktion von g hat im Intervall [0; 1] eine Nullstelle. 2

b) Das Schaubild einer Stammfunktion von g hat im Intervall [0; 1] einen Hochpunkt. 2

c) Die Gerade mit der Gleichung $y = -3x - 4$ ist Tangente an K_g an der Stelle $x = -0{,}5$. 2

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -e^{-2x} - x - 1$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_h.

3.4 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_h. 3

3.5 Anton hat die folgende Rechnung notiert:
$d(u) = f(u) - h(u) = 2\sin(\pi u) + 2 - (-e^{-2u} - u - 1) = 2\sin(\pi u) + e^{-2u} + u + 3$
für $0 < u < 1$
Untersuchung ergibt ein relatives Maximum in $u \approx 0{,}51$ mit $d(0{,}51) = 5{,}87$
Randwerte: $d(0) = 4$; $d(1) = 4{,}14$

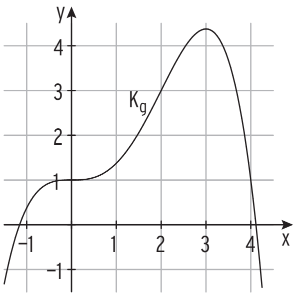
Formulieren Sie eine hierzu passende Aufgabenstellung. 6

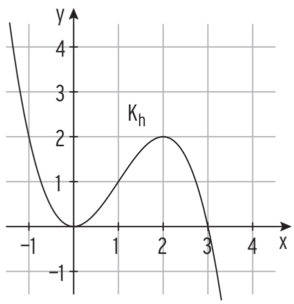
30

Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 4 - Teil 2 mit Hilfsmittel **Punkte**

Die Abbildungen zeigen die Schaubilder K_g und K_h der Funktionen g und h.





4.1 Begründen Sie mit Hilfe von vier Eigenschaften, dass K_h das Schaubild der Ableitungsfunktion von g ist. 4

Zum Schaubild K_h gehört der Funktionsterm $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$; $x \in \mathbb{R}$.

4.2 Berechnen Sie alle Stammfunktionen der Funktion h.

Welche dieser Stammfunktionen gehört zu K_g? 3

4.3 Die Gerade t mit $t(x) = -4{,}5x + 13{,}5$ ist Tangente an K_h. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührpunktes. 6

Gegeben sind die Funktionen u und v mit $u(x) = 2\cos(x) + 3$ und

$v(x) = -2\cos(x) + 1$; $x \in [0; 2\pi]$. Ihre Schaubilder heißen K_u und K_v.

4.4 Geben Sie den Wertebereich sowie die exakte Periodenlänge der Funktion u an.
Zeigen Sie, dass die Wendepunkte von K_u auf der Geraden y = 3 liegen. 5

4.5 Zeichnen Sie die Schaubilder K_u und K_v in ein gemeinsames Koordinatensystem. Beschreiben Sie, wie K_v aus K_u hervorgeht. 7

4.6 Lena bereitet sich auf die anstehende Mathematikprüfung vor.
In ihrem Heft findet sie folgenden Aufschrieb:

$$u(x) = v(x) \qquad 2\cos(x) + 3 = -2\cos(x) + 1$$
$$4\cos(x) = -2$$
$$\cos(x) = -\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{2}{3}\pi$$

$$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} ((2\cos(x) + 3) - (-2\cos(x) + 1)dx = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung. 5

30

Musteraufgabensätze zur Fachhochschulreife-Prüfung

Lösungen

Lösungen Musteraufgabensatz 1 **Aufgaben Seite 75 - 79**

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel **Seite 1/2**

1.1 $f(x) = -3 \cdot (x-2) \cdot x^2; \quad x \in \mathbb{R}$

Einfache Nullstelle in x = 2, Schaubild schneidet hier die x-Achse

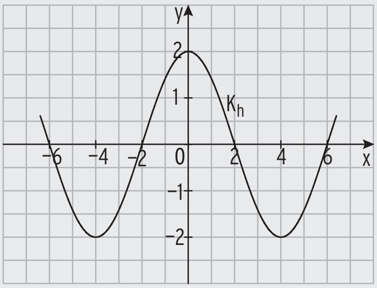
Doppelte Nullstelle in x = 0, Schaubild berührt hier die x-Achse

1.2 Vervollständigen Sie folgende Aussagen:

a) Eine Polynomfunktion 3. Grades hat mindestens 1 Nullstelle(n).

b) Eine Polynomfunktion 4. Grades hat höchstens 3 Extremstelle(n), denn ihre Ableitung ist vom Grad 3.

1.3 K_h: $h(x) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{4}x)$ mit $x \in [-6; 6]$



Periode von h: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$

Schnittpunkte von K_h mit der x-Achse:

$N_1(-6 \mid 0)$; $N_2(-2 \mid 0)$; $N_3(2 \mid 0)$; $N_4(6 \mid 0)$

Extrempunkte:

$H(0 \mid 2)$; $T_1(-4 \mid -2)$; $T_2(4 \mid -2)$

Hinweis: Nur ein Schnittpunkt bzw. Extrempunkt ist verlangt.

1.4 K_f: $f(x) = x^3 - 3x$

Wendepunkt

Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$; $f'''(x) = 6$

Bedingung: $f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x = 0$

Lösung: x = 0

Da $f'''(0) = 6 \neq 0$ liegt bei x = 0 ein Wendepunkt vor.

Aus f(0) = 0 folgt $W(0 \mid 0)$

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 1 - Teil 1 ohne Hilfsmittel Seite 2/2

1.5 Amplitude $a = 2$ $(y_H - y_T = 1 - (-3) = 4)$

Periode $p = 4\pi$; (halbe Periode: $x_H - x_T = 0 - (-2\pi) = 2\pi$)

Aus $p = \frac{2\pi}{b}$ folgt $b = 0{,}5$

Verschiebung von $y = a\cos(bx)$ um 1 nach unten $\Rightarrow c = -1$

($W(\pi \mid -1)$ liegt auf der „Mittellinie".)

1.6 a) $f(-2) < 0$ ist falsch, da $f(-2) = 0$; $(-2 \mid 0)$ ist Kurvenpunkt

b) $f'(-2) < 0$ ist wahr, da die Steigung von K_f bei $x = -2$ negativ ist; K_f ist bei $x = -2$ fallend.

c) $f''(-2) < 0$ ist falsch, da K_f bei $x = -2$ linksgekrümmt ist, also ist $f''(-2) > 0$.

1.7 $f(x) = -5x^3 + 1 - e^{2x}$

Ableitung mit der Kettenregel: $f'(x) = -15x^2 - 2e^{2x}$

1.8 $g(x) = 4 - 3e^{-2x}$

Fläche zwischen der Geraden mit der Gleichung $y = 4$, K_g und den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$:

$$A = \int_0^1 (4 - g(x))\,dx = \int_0^1 3e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{3}{2}e^{-2} + \frac{3}{2}$$

Alternative:

$$A_{\text{Rechteck}} = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 (4 - 3e^{-2x})\,dx = \left[4x + \frac{3}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = 4 + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{3}{2}$$

$$A = A_{\text{Rechteck}} - \left(4 + \frac{3}{2}e^{-2} - \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}e^{-2} + \frac{3}{2}$$

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 1/2

2.1 Ansatz: $v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Benötigte Ableitung: $v'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen und LGS für a, b, c und d:

$v(-3) = 0$ $\quad -27a + 9b - 3c + d = 0$

$v'(-3) = 0$ $\quad 27a - 6b + c = 0$

$v(0) = 0$ $\quad d = 0$

$v(1) = \frac{16}{3}$ $\quad a + b + c + d = \frac{16}{3}$

2.2 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$

Ableitungen: $f'(x) = -x^2 - 4x - 3$; $f''(x) = -2x - 4$; $f'''(x) = -2$

Extrempunkte

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad -x^2 - 4x - 3 = 0$

Anwenden der Lösungsformel: $x_{1|2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 \pm 2}{-2}$

Lösungen: $x_1 = -1$; $x_2 = -3$

$f''(-1) = -2 < 0$; $f(-1) = \frac{4}{3}$: $H(-1 \mid \frac{4}{3})$

$f''(-3) = 2 > 0$; $f(-3) = 0$: $T(-3 \mid 0)$

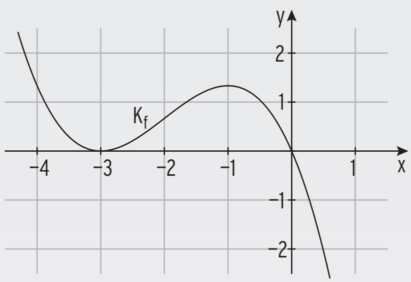
Wendepunkt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0$

Lösung: $x_1 = -2$

$f'''(-2) = -2 \neq 0$

$f(-2) = \frac{2}{3}$: $W(-2 \mid \frac{2}{3})$

Zeichnung



Alternative Berechnung der Extremstellen

Bedingung: $f'(x) = 0$ $\quad -x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

Zerlegung: $(x + 3)(x + 1) = 0$

Lösungen: $x_1 = -1$; $x_2 = -3$

Lösungen Musteraufgabensatz 1

Aufgabe 2 - Teil 2 mit Hilfsmittel Seite 2/2

2.3 $\int_{-3}^{1} (-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x)\,dx = \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{1}$

$= -\frac{1}{12}\cdot 1^4 - \frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{3}{2}\cdot 1^2 - \left(-\frac{1}{12}\cdot(-3)^4 - \frac{2}{3}\cdot(-3)^3 - \frac{3}{2}\cdot(-3)^2\right) = 0$

Die Inhalte der Flächen zwischen Schaubild und x-Achse im Intervall [− 3; 1] ober- (auf [− 3; 0]) und unterhalb (auf [0; 1]) der x-Achse sind gleich groß und gleichen sich bei der Berechnung des Integrals aus.

2.4 K_g: $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}$ K_h: $h(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

$g(0) = -\frac{7}{2}$

Bedingung für c aus $h^*(x) = e^{\frac{1}{2}x} + c$:

$h^*(0) = 1 + c = -\frac{7}{2} \Rightarrow c = -\frac{9}{2}$

Das Schaubild von h^* mit $h^*(x) = e^{\frac{1}{2}x} - \frac{9}{2}$ schneidet K_g auf der y-Achse.

2.5 Flächeninhalt des Dreiecks

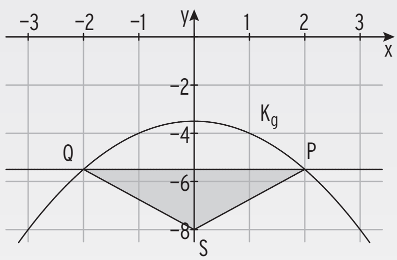
Grundseite: $u - (-u) = 2u$;

Höhe: $g(u) - (-8) = g(u) + 8$ oberer Wert − unterer Wert > 0

$A(u) = \frac{1}{2}\cdot 2u\cdot(g(u) + 8) = u\cdot(g(u) + 8)$

g(u) eingesetzt: $A(u) = u\cdot(-\frac{1}{2}u^2 + \frac{9}{2}) = -\frac{1}{2}u^3 + \frac{9}{2}u$

Nachweis für ein Maximum in $u \approx 1{,}73$:



Ableitungen: $A'(u) = -\frac{3}{2}u^2 + \frac{9}{2}$

$A''(u) = -3u$

Bedingungen:

$A'(1{,}73) = -\frac{3}{2}\cdot 1{,}73^2 + \frac{9}{2} \approx 0$

$A''(1{,}73) = -3\cdot 1{,}73 < 0$

Randwerte: $A(0) = A(3) = 0 < A(1{,}73)$

Maximaler Flächeninhalt (nicht verlangt und nicht notwendig)

$A_{max} = A(1{,}73) = 5{,}20$

Für $u \approx 1{,}73$ wird der Inhalt des Dreiecks maximal.

IV Prüfungen zur Fachhochschulreife

Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Prüfung der Fachhochschulreife
an Berufskollegs zum Erwerb der Fachhochschulreife u.a.

Hauptprüfung 2019

Prüfungsfach	**Mathematik (FHSR1031) - Pflichtteil (Teil 1)**

Arbeitszeit	**8.30 Uhr bis ca. 9.30 Uhr** (ca. 60 Minuten)
Bearbeitungshinweise	Der **hilfsmittelfreie Prüfungsteil** ist von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten **(Pflichtteil).** Der Prüfling ist verpflichtet, die Vollständigkeit des Aufgabensatzes umgehend zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen.
Hilfsmittel	**keine**
Hinweise für die Fachlehrkraft	• Die Prüflinge werden nach ca. 60 Minuten informiert, dass die **anteilige Prüfungszeit** verstrichen ist. • Wenn der **hilfsmittelfreie Teil** der Prüfung in Form der Schülerlösung und des Aufgabenteils unwiderruflich abgegeben wurde, erhalten die Schüler die zugelassenen Hilfsmittel für den **hilfsmittelgestützten Prüfungsteil (Teil 2).**

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018

Lösungen Seite 176 - 184

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Punkte**

1.1 Gegeben ist folgende Wertetabelle einer Polynomfunktion f, ihrer ersten Ableitungsfunktion f′ und ihrer zweiten Ableitungsfunktion f″.
Das Schaubild von f ist K_f.

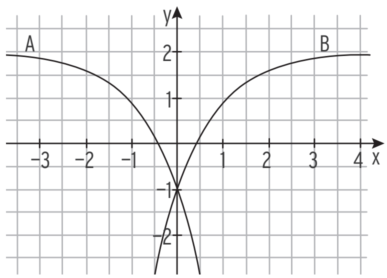
x	− 2	− 1	0	1	2	3	4
f(x)	30	22	2	− 24	− 50	− 70	− 78
f′(x)	0	− 15	− 24	− 27	− 24	− 15	0
f″(x)	− 18	− 12	− 6	0	6	12	18

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse, eines Hoch- und eines Tiefpunktes von K_f an.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt $P(-1 \mid f(-1))$. 6

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = -\frac{1}{24}x^2 \cdot (x-5) \cdot (x+3)$; $x \in \mathbb{R}$.
Geben Sie Art und Lage der Nullstellen an und skizzieren Sie davon ausgehend das Schaubild von g. 5

1.3 Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} - 3e^x = 0$. 4

1.4 Gegeben ist die Funktion h mit
$h(x) = a \cdot e^{-x} + b$; $x \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$.
Begründen Sie, welches der Schaubilder A bzw. B zur Funktion h gehört.
Bestimmen Sie a und b. 5



1.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\,dx$. 4

1.6 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x$; $x \in \mathbb{R}$ an. 3

1.7 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen:
$g'(3) = 2$ $g''(3) = 0$ $g'''(3) \neq 0$
Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen? 3

30

Hinweis: 1.6 und 1.7 neu aufgrund der Prüfungsvorgaben 2021.

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f mit der x-Achse und die Extrempunkte von K_f.
Zeichnen Sie K_f für $-1 \leq x \leq 3{,}5$. 9

2.2 Berechnen Sie $\int_0^3 -f(x)dx$.
Markieren Sie die Fläche, deren Inhalt mit diesem Ausdruck berechnet wird, in Ihrem Schaubild aus Aufgabe 2.1. 5

2.3 Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen falsch oder wahr sind:
a) Jede Polynomfunktion vierten Grades besitzt eine Nullstelle.
b) Jede Nullstelle einer Funktion ist Extremstelle ihrer Stammfunktion.
c) Das Schaubild jeder Polynomfunktion dritten Grades besitzt sowohl einen Hoch- als auch einen Tiefpunkt. 6

Die Einwohnerzahl eines Landes wächst entsprechend der Funktion g mit
$g(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}$; $a, b \neq 0$.
Dabei ist t die Zeit in Jahren, t = 0 ist das Jahr 2016 und g(t) gibt die Einwohnerzahl des Landes in Millionen zum Zeitpunkt t an.
Im Jahr 2016 lebten 120 Millionen Menschen in dem Land, im Jahr 2018 sind es 126 Millionen Menschen.

2.4 Bestimmen Sie die Werte für a und b. 3

Im Folgenden sei a = 120 und b = 0,025.

2.5 Bestimmen Sie die Bevölkerungszahl im Jahr 2033.
In welchem Jahr war unter diesen Vorgaben die Bevölkerungszahl halb so groß wie im Jahr 2016? 4

2.6 Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Einwohnerzahl jährlich zunimmt. 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 3** **Punkte**

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$f(x) = -2 \cdot e^{-0{,}5x} + 3$, $g(x) = -2 \cdot \sin(0{,}5 \cdot x) + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f, das Schaubild von g ist K_g.

3.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_f.
Zeigen Sie, dass K_f keine Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt.
Zeichnen Sie K_f für $-2 \le x \le 6$. 9

3.2 Begründen Sie, dass K_f und K_g unendlich viele Schnittpunkte haben.
Das Schaubild K_f wird so verschoben, dass es keine gemeinsamen Punkte mit K_g hat.
Geben Sie einen passenden Funktionsterm an.
Kann K_f so verschoben werden, dass es K_g in einem Tiefpunkt berührt?
Begründen Sie. 6

3.3 Zeigen Sie, dass der Punkt $W(2\pi\,|\,3)$ Wendepunkt von K_g ist.
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in W. 7

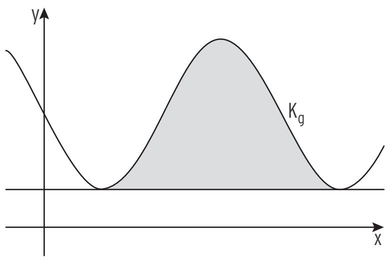
3.4 Johanna soll den Inhalt der in der Zeichnung schraffierten Fläche berechnen. Nur einer der Ansätze a) bis c) liefert das richtige Ergebnis.

Nennen Sie je ein Argument, warum die anderen beiden Ansätze falsch sind.

a) $A = \int_{\pi}^{5\pi} (-2 \cdot \sin(0{,}5x) + 3)\,dx$

b) $A = \int_{\pi}^{5\pi} (-2 \cdot \sin(0{,}5x) + 2)\,dx$

c) $A = \int_{\pi}^{3\pi} (-2 \cdot \sin(0{,}5x) + 3 - 1)\,dx$



Berechnen Sie den gesuchten Flächeninhalt. 8

30

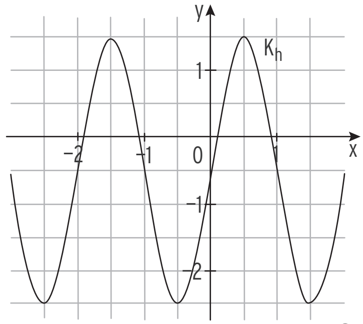
Prüfung zur Fachhochschulreife 2017/2018

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 4** **Punkte**

4.1 Gegeben ist das Schaubild K_h einer trigonometrischen Funktion h.

Untersuchen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.



a) $h(-2{,}25) < 0$

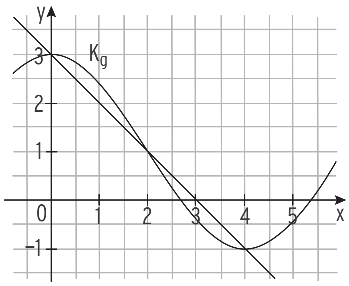
b) $h'(-2{,}25) < 0$

c) $h''(-2{,}25) < 0$

d) $\int\limits_{-2{,}25}^{0} h(x)dx < 0$ 8

4.2 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer trigonometrischen Funktion g mit dem Hochpunkt $H(0 \mid 3)$ und dem Tiefpunkt $T(4 \mid -1)$.

Geben Sie einen möglichen Funktionsterm von g an.



Die Gerade mit der Gleichung $y = -x + 3$ verläuft durch die Punkte H und T.

Begründen Sie, dass Folgendes gilt: $\int\limits_{0}^{4} (g(x) - (-x + 3))dx = 0.$ 6

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f.

4.3 Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.

Berechnen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f und der x-Achse. Zeichnen Sie K_f für $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$.

Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von K_f. 13

4.4 Ermitteln Sie die Gleichung der Stammfunktion von f, deren Schaubild durch den Punkt $P(1 \mid 1)$ geht. 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2019/2020

Lösungen Seite 202 - 208

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1** **Punkte**

1.1 Berechnen Sie die zweite Ableitung der Funktion h mit 6

$h(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2,\ x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Nullstellen der zweiten Ableitung h''.

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi x) + 2;\ -2 \leq x \leq 2$. 5

Geben Sie die Periode und die Amplitude von f an.

Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion.

1.3 Lösen Sie die Gleichung $2e^{-3x} - 7 = 0$. 3

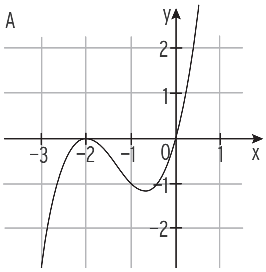
1.4 Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem 6

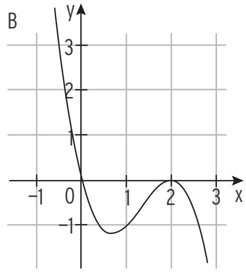
$2x_1 + 1{,}5\,x_2 = 1$

$3x_1 - 4x_2 = 3$

1.5 Begründen Sie jeweils, warum keines der beiden Schaubilder 4

zur Funktion f mit $f(x) = x \cdot (x-2)^2,\ x \in \mathbb{R}$ gehören kann.





1.6 Gegeben sind eine Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 4$ und 6

eine Gerade mit der Gleichung $y = 8$.

Skizzieren Sie die Parabel und die Gerade.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Parabel und der Gerade eingeschlossen wird.

30

Hinweis: 1.4 abgeändert aufgrund der Prüfungsvorgaben 2021

Prüfung zur Fachhochschulreife 2019/2020

Teil 2 mit Hilfsmittel **Aufgabe 2** **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild ist K_f.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K_f. 9

Zeichnen Sie K_f für $-3 \leq x \leq 2$.

2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt $P(2 \mid f(2))$ und 4

die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Tangente mit der x-Achse.

Gegeben ist das Schaubild K_g einer Funktion g.

2.3 Markieren Sie im Schaubild **(siehe Lösungsblatt)** zwei Werte für u 4

mit $u \geq -1$, welche die Gleichung $\int_{-1}^{u} g(x)\,dx = 11$ näherungsweise lösen.

Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Ein Unternehmen produziert Betriebssysteme für Smartphones. Alle Smartphone-Besitzer können diese Betriebssysteme nutzen. Im September 2019 veröffentlichte das Unternehmen das Betriebssystem 4.0 als Nachfolger des Betriebssystems 3.0. Weitere Betriebssysteme sind ebenfalls am Markt und werden genutzt.

Die Funktion g mit $g(t) = -80 \cdot e^{-0{,}023 \cdot t} + 80$, $t \geq 0$,

beschreibt durch g(t) den Anteil der 4.0-Nutzer in Prozent zum Zeitpunkt t.

Dabei ist t die Zeit in Tagen, t = 0 entspricht dem 1. September 2019.

2.4 Skizzieren Sie das Schaubild von g. 8

Wie viel Prozent der Smartphone-Besitzer werden niemals 4.0 nutzen?

Ermitteln Sie den Anteil der 4.0-Nutzer nach 60 Tagen.

Zu welchem Zeitpunkt hat die Hälfte der Smartphone-Besitzer 4.0 installiert?

2.5 Die Funktion h mit $h(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 15$, $t \geq 0$, $a, b \neq 0$, 5

beschreibt durch h(t) den Anteil der 3.0-Nutzer in Prozent zum Zeitpunkt t.

Dabei ist t die Zeit in Tagen, t = 0 entspricht dem 1. September 2019.

- 75 % der Smartphone-Besitzer verwendeten 3.0 zum Zeitpunkt t = 0.
- 30 Tage nach der Einführung von 4.0 war der Nutzeranteil beider Betriebssysteme gleich.

Bestimmen Sie die Werte für a und b.

30

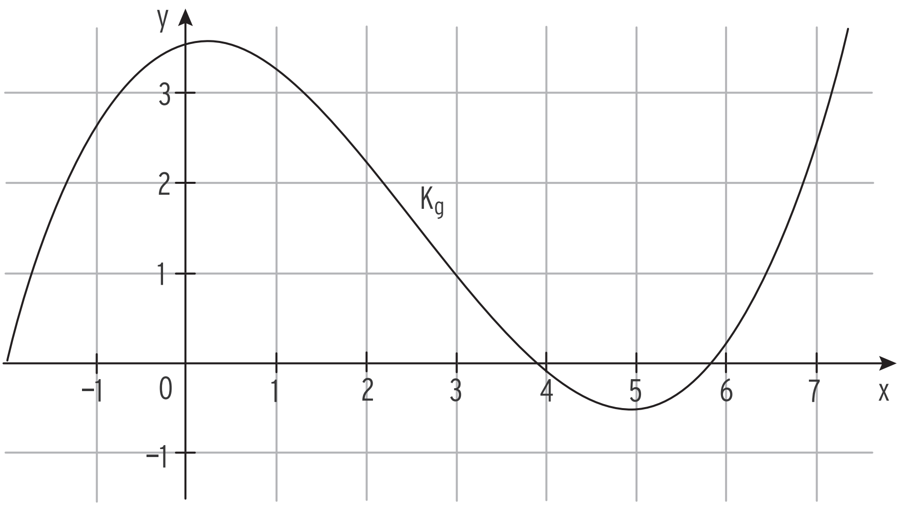
Prüfung zur Fachhochschulreife 2019/2020

Name: ____________________________________

Bitte legen Sie dieses Blatt Ihrer Prüfungsarbeit bei.

Lösungsblatt zu Aufgabe 2.3:

Gegeben ist das Schaubild K_g einer Funktion g. Markieren Sie im Schaubild zwei Werte für u mit $u \geq -1$, welche die Gleichung $\int_{-1}^{u} g(x)\,dx = 11$ näherungsweise lösen.



Erläuterung des Vorgehens:

Prüfung zur Fachhochschulreife 2019/2020

Aufgabe 3 | **Punkte**

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 0{,}5e^{0{,}5x} - x + 1{,}5$; $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_h.

3.1 Zeichnen Sie K_h für $-2 \leq x \leq 5$. — 3

3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von K_h. — 8

Das Schaubild von K_h soll verschoben werden:

a) in y-Richtung, so dass das Schaubild durch den Ursprung verläuft,

b) so, dass der Extrempunkt im Ursprung liegt.

Geben Sie jeweils einen neuen Funktionsterm an.

3.3 Prüfen Sie, ob die Tangente an K_h in $x = 3$ einen positiven y-Achsenabschnitt hat. — 4

Vom Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = 2\cos(bx) + d$, $x \in \mathbb{R}$, ist bekannt, dass der Punkt $P(3 \mid 3)$ auf K_f liegt.

3.4 Bestimmen Sie jeweils b und d so, — 4

a) dass K_f in P einen Hochpunkt hat.

b) dass K_f in P einen Tiefpunkt hat.

Sei ab jetzt $b = \frac{\pi}{2}$ und $d = -1$.

3.5 Bestimmen Sie die ersten beiden positiven Nullstellen von f. — 8

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die K_f mit der x-Achse zwischen diesen beiden Nullstellen einschließt.

3.6 Bestimmen Sie einen x-Wert so, dass der Funktionswert der Funktion d mit $d(x) = h(x) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kleiner als 0,2 ist. — 3

30

Prüfung zur Fachhochschulreife 2019/2020

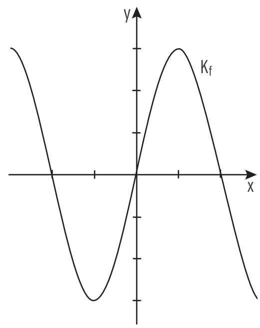
Name: ________________________________

Bitte legen Sie dieses Blatt Ihrer Prüfungsarbeit bei.

Aufgabe 4 **Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3\sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K_f.

4.1 Beschriften Sie die Achsen so, dass das nebenstehende Schaubild K_f zeigt. 3



4.2 Geben Sie die Koordinaten eines Wendepunktes von K_f mit negativer Steigung im Intervall $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ an. 7

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt.

4.3 Das Schaubild K_g der Funktion g mit $g(x) = 3\cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$ schließt mit K_f und der y-Achse im ersten Quadranten eine Fläche ein. 7

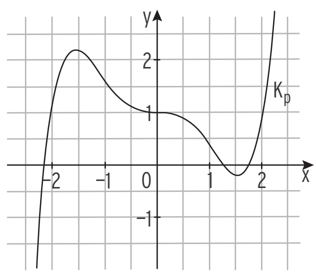
Zeigen Sie, dass sich K_f und K_g bei $x = \frac{\pi}{8}$ schneiden.

Berechnen Sie den Inhalt der beschriebenen Fläche.

4.4 Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 3. Ordnung schneidet die x-Achse in $x = \frac{1}{2}$ und hat im Ursprung dieselbe Steigung wie K_f. 5

Bestimmen Sie einen Funktionsterm.

4.5 Gegeben ist das Schaubild K_p einer Polynomfunktion p. Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. 8



a) K_p gehört zu einer Polynomfunktion, welche mindestens 5. Grades ist.

b) K_p hat genau zwei Wendepunkte im gekennzeichneten Abschnitt.

c) $p'(0) > p'(1)$

d) Die Gleichung $p(x) = 2$ hat im gekennzeichneten Abschnitt genau drei Lösungen.

30

Lösungen zur Prüfung zur Fachschulreife 2019/2020

Prüfung zur Fachschulreife 2020 Seite 197 - 201

Teil 1 ohne Hilfsmittel **Aufgabe 1**

1.1 $h(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$, $h'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$; $h''(x) = x^2 - 3x - 4$

Bedingung: $h''(x) = 0$ $x^2 - 3x - 4 = 0$

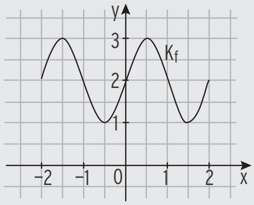
Formel: $x_{1|2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$

Lösungen: $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$; $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$

1.2 Amplitude: 1

Periode: $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Skizze:



1.3 $2e^{-3x} - 7 = 0 \Leftrightarrow e^{-3x} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Logarihmieren: $-3x = \ln(3{,}5)$

Lösung: $x = -\frac{1}{3} \cdot \ln(3{,}5)$

1.4 I: $2x_1 + 1{,}5\,x_2 = 1$ und II: $3x_1 - 4x_2 = 3$

$\text{I} \cdot (-3) + \text{II} \cdot 2$ ergibt $-12{,}5\,x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = -\frac{6}{25}$

Einsetzen in z.B Gleichung II: $3x_1 - 4 \cdot (-\frac{6}{25}) = 3 \Rightarrow 3x_1 = \frac{51}{25} \Rightarrow x_1 = \frac{17}{25}$

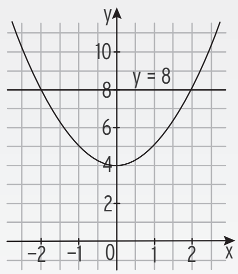
Lösung $(\frac{17}{25}; -\frac{6}{25})$

1.5 Das Schaubild K von f berührt die x-Achse in x = 2 und schneidet die x-Achse im Ursprung. K verläuft vom 3. in den 1. Quadranten.

A: Die doppelte Nullstelle von f liegt bei 2, Schaubild A berührt die x-Achse in x = − 2.

B: Bei Schaubild B liegt ein Verlauf vom 2. in den 4. Quadranten vor.

1.6 Skizze:



Bedingung für Schnittstellen: $x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$

Schnittstellen: $x_1 = -2$; $x_2 = 2$

Berechnung des Flächeninhaltes:

$$A = \int_{-2}^{2} (8 - (x^2 + 4))dx = \int_{-2}^{2} (8 - x^2 - 4)dx$$

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2}$$

$$= 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \left(4 \cdot (-2) - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3\right) = \frac{32}{3}$$

Lösungen zur Prüfung zur Fachschulreife 2019/2020

Teil 2 mit Hilfsmittel Aufgabe 2

2.1 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$

Ableitungen: $f'(x) = x^3 + x^2 - 2x$; $f''(x) = 3x^2 + 2x - 2$

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$ $\qquad x^3 + x^2 - 2x = 0$

Ausklammern: $\qquad x \cdot (x^2 + x - 2) = 0$

Nullprodukt: $\qquad x = 0 \quad \vee \quad x^2 + x - 2 = 0$

Lösungen: $x_1 = 0$ und $\qquad x_{2|3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

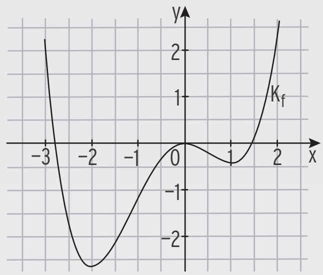
$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$; $x_3 = \frac{-1+3}{2} = 1$

Wegen $f''(0) = -2 < 0$ und $f(0) = 0$ liegt der Hochpunkt $H(0 \mid 0)$ vor.

Wegen $f''(-2) = 6 > 0$ und $f(-2) = -\frac{8}{3}$ liegt der Tiefpunkt $T_1(-2 \mid -\frac{8}{3})$ vor.

Wegen $f''(1) = 3 > 0$ und $f(1) = -\frac{5}{12}$ liegt der Tiefpunkt $T_2(1 \mid -\frac{5}{12})$ vor.

Zeichnung:



2.2 Tangente in $P(2 \mid f(2))$

$f(2) = \frac{8}{3}$ somit $P(2 \mid \frac{8}{3})$

Tangentensteigung: $f'(2) = 8$ $(= m)$

Einsetzen in $y = m \cdot x + b$ führt auf $\frac{8}{3} = 8 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -\frac{40}{3}$

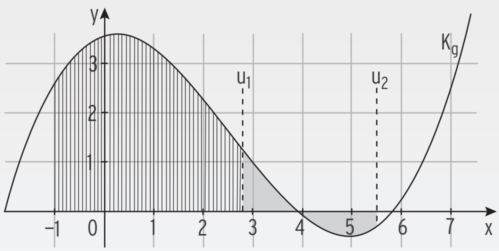
Tangentengleichung: $y = 8x - \frac{40}{3}$

Bedingung für Schnittpunkt mit x-Achse: $y = 8x - \frac{40}{3} = 0$

$$8x = \frac{40}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

Somit Schnittpunkt $S(\frac{5}{3} \mid 0)$

2.3 Für $u_1 \approx 2{,}8$ erhält man eine Fläche von ca. 11 Kästchen, also 11 FE.



$u_2 \approx 5{,}5$ ist eine weitere Lösung von $\int_{-1}^{u} g(x)\,dx = 11$.

Die beiden grauen Flächenstücke oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse sind etwa gleich groß und die Flächeninhalte werden durch den Ansatz "verrechnet".

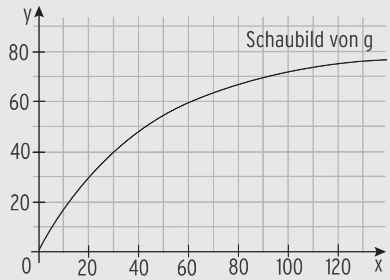
Lösungen zur Prüfung zur Fachschulreife 2019/2020

$g(t) = -80 \cdot e^{-0{,}023 \cdot t} + 80,\ t \geq 0,$

2.4 Skizze: g(t) in %

y = 80 stellt die Gleichung der Asymptote dar. Somit erlangt das Betriebssystem langfristig einen Nutzeranteil von 80 %.

20 % werden 4.0 also nicht nutzen.



4.0-Nutzer nach 60 Tagen: $g(60) = -80 \cdot e^{-0{,}023 \cdot 60} + 80 \approx 59{,}87$

Nach 60 Tagen beträgt der Anteil der Nutzer von Version 4.0 ca. 60 %.

Berechnung des Zeitpunktes zu welchem die Hälfte der Nutzer die Version 4.0 installiert hat:

Bedingung: $g(x) = 50$ $\qquad -80 \cdot e^{-0{,}023 \cdot t} + 80 = 50$

$e^{-0{,}023 \cdot t} = \frac{3}{8}$

Logarithmieren: $\qquad -0{,}023t = \ln\left(\frac{3}{8}\right)$

Lösung: $\qquad t \approx 42{,}64$

Da der Monat September 30 Tage hat, entspricht $t \approx 42{,}64$ einem Zeitpunkt im Laufe des 13. Oktober.

2.5 Ansatz: $h(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 15$

75 % zum Zeitpunkt t = 0: $h(0) = 75$ $\qquad a \cdot e^0 + 15 = 75$

$a + 15 = 75 \Rightarrow a = 60$

Man erhält a = 60 und somit $h(t) = 60 \cdot e^{b \cdot t} + 15$

Nutzeranteil von Betriebssystem 4.0 nach 30 Tagen: $g(30) \approx 39{,}87$

Gleicher Nutzeranteil

Bedingung: $h(30) = g(30) = 39{,}87$ $\qquad 60 \cdot e^{b \cdot 30} + 15 = 39{,}87$

$e^{30b} = 0{,}4145$

Logarihmieren: $\qquad 30b = \ln(0{,}4145)$

Lösung für b: $\qquad b \approx -0{,}029$