

2021 Mittelschule M10

Original-Prüfungsaufgaben mit Lösungen

ActiveBook
Interaktives
Training

**MEHR
ERFAHREN**

Bayern

Mathematik 10. Klasse

+ *Basiswissen mit Übungen*

Original-Prüfungsaufgaben

2020 zum Download



STARK

Inhalt

Vorwort
Hinweise und Tipps

Training Grundwissen

1	Bruchgleichungen	1
2	Lineare Funktionen	2
3	Lineare Gleichungssysteme	11
4	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	14
5	Exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse	18
6	Binomische Formeln	22
7	Quadratische Gleichungen	23
8	Quadratische Funktionen	26
9	Wahrscheinlichkeit	32
10	Kugel	37
11	Zentrische Streckung	39
12	Strahlensätze	42
13	Satzgruppe des Pythagoras	44
14	Winkelsätze	47
	Lösungen mit vielen Hinweisen und Tipps	49

Schriftliche Abschlussprüfungsaufgaben der 10. Klasse

Abschlussprüfung 2014	2014-1
Aufgabengruppe I	2014-1
Lösungen	2014-4
Aufgabengruppe II	2014-13
Lösungen	2014-15
Abschlussprüfung 2015	2015-1
Aufgabengruppe I	2015-1
Lösungen	2015-4
Aufgabengruppe II	2015-13
Lösungen	2015-16
Abschlussprüfung 2016	2016-1
Aufgabengruppe I	2016-1
Lösungen	2016-4
Aufgabengruppe II	2016-13
Lösungen	2016-16
Abschlussprüfung 2017	2017-1
Aufgabengruppe I	2017-1
Lösungen	2017-5
Aufgabengruppe II	2017-15
Lösungen	2017-19
Abschlussprüfung 2018	2018-1
Aufgabengruppe I	2018-1
Lösungen	2018-5
Aufgabengruppe II	2018-15
Lösungen	2018-19

Fortsetzung nächste Seite

Abschlussprüfung 2019	2019-1
Aufgabengruppe I	2019-1
Lösungen	2019-5
Aufgabengruppe II	2019-17
Lösungen	2019-21
Abschlussprüfung 2020	www.stark-verlag.de/mystark
Aufgabengruppe I mit Lösungen, Aufgabengruppe II mit Lösungen	

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, kannst du sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.



Dieses Buch ist in zwei Versionen erhältlich: mit und ohne ActiveBook. Hast du die Ausgabe **mit ActiveBook** (93501ML) erworben, kannst du mit dem **interaktiven Training** online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet.

Am besten gleich ausprobieren!



Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du in der Ausgabe mit ActiveBook auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autorin und Autoren:

Training Grundwissen, Lösungen der Abschlussprüfung bis 2019:
Walter Modschiedler und Walter Modschiedler jun.

Lösung der Abschlussprüfung 2020:
Eva Dreher

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Buch kannst du dich effektiv auf den **Mittleren Schulabschluss** nach der 10. Klasse an bayrischen **Mittelschulen** im Fach **Mathematik** vorbereiten.

- Im Kapitel **Training Grundwissen** wird der **Prüfungsstoff** klar strukturiert **zusammengefasst**. Die wichtigsten Begriffe, Formeln und Lösungswege werden übersichtlich hervorgehoben und anhand von anschaulichen **Beispielen** verdeutlicht. Die vielen abwechslungsreichen **Übungsaufgaben** bieten dir die Möglichkeit, den Stoff selbst zu vertiefen. Unter „**Fit für die Prüfung?**“ findest du zu einzelnen Teilbereichen jeweils mehrere Aufgaben, anhand derer du deine Fähigkeiten ganz gezielt auf Prüfungsniveau trainieren kannst.
- Mit dem Vorwissen aus dem Trainingsteil kannst du dich nun an die **Original-Prüfungsaufgaben** wagen. Sie sollen dir einen Eindruck vermitteln, welche Bedingungen dich in der Abschlussprüfung erwarten.
- Zu den Trainings- und Prüfungsaufgaben gibt es ausführlich **kommentierte Lösungen** mit zahlreichen **Hinweisen und Tipps**. Diese erklären den Lösungsansatz und die Hauptschwierigkeit der jeweiligen Aufgabe genau, sodass du die Ergebnisse selbstständig verstehen und nachvollziehen kannst.

Viel Erfolg bei deinen Vorbereitungen und in der Prüfung!

Hinweise und Tipps

Lies dir die folgenden Hinweise und Tipps genau durch, damit du über die Besonderheiten der Prüfung gut Bescheid weißt. Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch **wichtige Änderungen** für die Abschlussprüfung 2021 vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, erhältst du **aktuelle Informationen** dazu auf der Plattform MyStark (Zugangscode vgl. vorne im Buch).

Wie ist die Prüfung aufgebaut?

Die Abschlussprüfung zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses ist im Fach Mathematik eine **schriftliche Prüfung**. In dieser Prüfung musst du **eine Aufgabengruppe** bearbeiten, die von der Prüfungskommission an deiner Schule aus ursprünglich zwei zentral gestellten Aufgabengruppen ausgewählt wird. Ein Austausch einzelner Aufgaben zwischen den verschiedenen Aufgabengruppen ist dabei nicht zulässig. Die Bearbeitungszeit beträgt **150 Minuten**. Die Verwendung eines genehmigten elektronischen **Taschenrechners** und einer für den Gebrauch an der Mittelschule zugelassenen **Formelsammlung** ist erlaubt. Die Bewertung deiner schriftlichen Prüfung erfolgt durch die Vergabe von **Punkten**.

Wie wird die Prüfung benotet?

Für das Fach Mathematik wird folgende Zuordnung von erreichter **Punktzahl** und **Note** landeseinheitlich festgesetzt:

Note	Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
Punkte	45–38	37,5–31	30,5–23	22,5–15	14,5–7	6,5–0

Was musst du beim Bearbeiten der Aufgaben beachten?

Für die Bearbeitung der Prüfungsaufgaben ist es hilfreich, sich eine **Lösungsstrategie** anzueignen:

- **Lies** die Aufgabenstellung **genau** durch und **markiere** alle wichtigen Angaben oder Informationen (z. B. gegebene Größen, Lösungshinweise) farbig.
- Eine **Skizze**, in der du die gegebenen und gesuchten Größen einträgst, kann dir oft den Einstieg in eine komplexe Aufgabe erleichtern.
- Überlege, auf welches **Themengebiet** der Mathematik sich die Aufgabe bezieht. Welche Regeln, Sätze oder Formeln sind dir aus diesem Bereich bekannt? Nutze, wenn möglich, auch die Formelsammlung.
- Wenn du mit der Lösung einer schwierigen Aufgabe nicht weiterkommst, so halte dich zunächst nicht zu lange damit auf. Versuche, mit der nächsten Teilaufgabe oder Aufgabe weiterzumachen. Wenn die anderen Aufgaben bearbeitet sind, kommst du nochmals auf die angefangene Aufgabe zurück. **Bleib ruhig** und überlege, dann wirst du Zusammenhänge erkennen und auch die schwierigen Aufgaben lösen können.
- Wichtig ist die genaue **Darstellung des Lösungsweges**, denn Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist und auch die **Teilergebnisse** festgehalten sind. Achte zudem auf richtige **Maßeinheiten** und **saubere Zeichnungen**. Vergiss auch nicht, einen **Antwortsatz** zu formulieren.

- Orientiere dich bei der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben an der angegebenen **Punktzahl**: Je mehr Punkte eine Aufgabe ergibt, desto mehr Zeit solltest du dir für die Bearbeitung nehmen.
- Plane zum Schluss aber auch einen nicht zu knappen Zeitraum für die **Überprüfung** deiner Rechnungen ein. Versuche, das **Ergebnis abzuschätzen**: Stimmt die errechnete Größe in etwa? Ist die Einheit richtig?
- Achte zudem auf eine **saubere äußere Form** und vergiss nicht, alle Blätter mit deiner **Platzziffer** und evtl. mit deinem Namen zu versehen.

Wie kannst du dich auf die Prüfung vorbereiten?

Besonders gut kannst du dich auf die Abschlussprüfung vorbereiten, indem du wie folgt vorgehst:

- Bereite dich **langfristig** auf die Abschlussprüfung vor. Arbeite parallel zum Thema, das gerade im Unterricht behandelt wird, gezielt mit den Trainingsaufgaben aus diesem Buch.
- Wenn du das „Training Grundwissen“ erfolgreich bearbeitet hast, gehst du zu den **Original-Prüfungsaufgaben** über. Übe unter echten **Prüfungsbedingungen** und löse die Aufgaben nur mit den zugelassenen **Hilfsmitteln**. Präge dir wichtige Seiten in deiner Formelsammlung ein und nutze deinen Taschenrechner sinnvoll. Grundlegende Formeln solltest du auswendig kennen, um in der Prüfung keine wertvolle Zeit zu verlieren.
- Versuche, die Aufgaben in der dafür **vorgegebenen Zeit von 150 Minuten** zu schaffen. Wenn du die Aufgaben zunächst nicht in dieser Zeit lösen kannst, solltest du die Prüfungsaufgaben in regelmäßigen Abständen wiederholen, bis du beim Rechnen sicherer und schneller wirst.
- Versuche stets, alle Aufgaben **selbstständig** zu lösen. Nur wenn du dich selbst anstrengst, bleibt der Stoff auch im Gedächtnis und du lernst dazu! Solltest du jedoch allein nicht weiterkommen, kann ein Blick in die Lösung hilfreich sein, da dort wichtige **Hinweise und Tipps** zur Bearbeitung der Aufgabe gegeben werden. Vergleiche zum Schluss deine Lösung mit der Musterlösung und suche gegebenenfalls nach Rechenfehlern oder Verbesserungsmöglichkeiten deines Ansatzes.
- Gehe optimistisch in die Prüfung. Wenn du dich gut vorbereitet hast, brauchst du dir keine Sorgen zu machen. Übung macht die Meisterin und den Meister!

10 Kugel

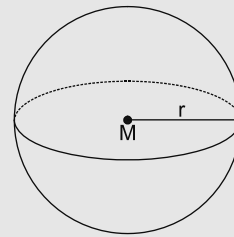
Das musst du wissen!

Volumen einer Kugel:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Oberfläche einer Kugel:

$$O = 4 r^2 \pi$$



Beispiel

Das Volumen einer Kugel beträgt 14 cm^3 .

Berechne die Oberfläche der Kugel.

Lösung:

$$14 \text{ cm}^3 = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Setze für $V = 14 \text{ cm}^3$ in die Volumenformel der Kugel ein und löse nach r auf.

$$r^3 = \frac{3 \cdot 14 \text{ cm}^3}{4 \cdot \pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 14 \text{ cm}^3}{4 \cdot \pi}}$$

$$r \approx 1,5 \text{ cm}$$

$$O = 4 r^2 \pi$$

$$O = 4 \cdot (1,5 \text{ cm})^2 \cdot \pi$$

$$O \approx 28,27 \text{ cm}^2$$

Setze dann $r = 1,5 \text{ cm}$ in die Oberflächenformel der Kugel ein und berechne O .

Hinweis

Wenn nicht anders angegeben, wird im Folgenden der genaue Wert (Taschenrechnerwert!) von π verwendet. Rechnest du mit $\pi = 3,14$, können kleine Abweichungen im Ergebnis auftreten.

Aufgaben

119. Berechne den Rauminhalt und die Oberfläche der kugelförmigen Körper.

a) Fußball: $r = 11 \text{ cm}$

b) Sonne: $d = 2,8 \cdot 10^7 \text{ km}$

120. Ein kugelförmiger Gasbehälter ($d = 28 \text{ m}$) benötigt einen neuen Schutzanstrich. Ein Fass Farbe reicht für 350 m^2 . Wie viele Fässer Farbe werden benötigt?

121. Berechne die Oberfläche und das Volumen einer Kugel mit dem Radius $r = 10 \text{ cm}$.

a) Welchen Radius hat eine Kugel, deren Oberfläche nur halb so groß ist? Berechne ihr Volumen.

b) Welchen Radius hat eine Kugel, deren Oberfläche doppelt so groß ist? Berechne das Kugelvolumen.

122. Ein Bleibarren mit einer Masse von $7,345 \text{ kg}$ wird eingeschmolzen. Aus der Schmelzmasse werden 50 kleinere Kugeln gegossen. 1 dm^3 Blei wiegt $11,3 \text{ kg}$. Welchen Durchmesser hat eine kleine Kugel?



Interaktive Aufgaben

1. Bowlingkugel
2. Restkörper
3. Zusammengesetzter Körper
4. Knetkugel

Fit für die Prüfung?

123. Berechne den Rauminhalt der Körper.

Zylinder: $r=5\text{ cm}$; $h_Z=10\text{ cm}$

Kugel: $r=5\text{ cm}$

Kegel: $r=5\text{ cm}$; $h_{Ke}=10\text{ cm}$

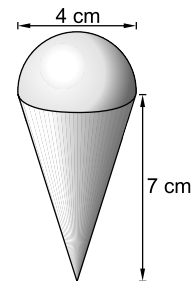
Welchen Bruchteil des Rauminhalts des Zylinders besitzen die Kugel und der Kegel?

124. Ein Maurerlot (Senkblei) setzt sich aus einer Halbkugel und einem Kegel zusammen.

a) Berechne das Gewicht des Maurerlotes.

1 cm^3 Edelstahllegierung wiegt $7,8\text{ g}$.

b) Wie groß ist die Oberfläche des Maurerlotes?



125. Ein kugelförmiger Gastank fasst $904\,320$ Liter Gas.

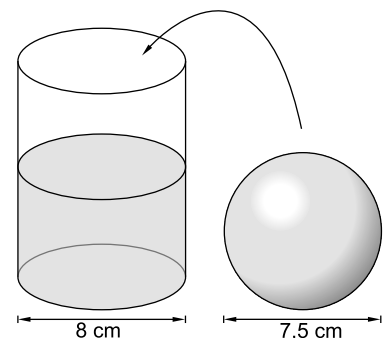
a) Wie hoch müsste ein zylinderförmiger Tank mit dem gleichen Durchmesser wie der kugelförmige Gastank sein, wenn er die gleiche Gasmenge fassen soll? Gib die Höhe in Meter an.

b) Um wie viel Prozent ist die Zylinderoberfläche größer als die Kugeloberfläche?

126. In einem zylinderförmigen Gefäß befindet sich ein Liter Wasser.

a) Wie hoch steht das Wasser im Gefäß?

b) Nun wird eine Metallkugel in das zylinderförmige Gefäß gelegt. Um wie viele cm steigt das Wasser an?



127. Aus einem Seifenwassertropfen mit einem Durchmesser von 6 mm wird eine Seifenblase aufgeblasen. Der äußere Durchmesser der Seifenblase beträgt 6 cm . Berechne die Wandstärke der Seifenblasenhaut.

128. Aus einem Granitwürfel ($a=1,2\text{ m}$) wird ein halbkugelförmiges Brunnenbecken geschlagen. Das fertige Brunnenteil wiegt $4,463\text{ t}$.

Die Dichte von Granit beträgt $2,8\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.

a) Wie viele Liter Wasser fasst das Brunnenbecken, wenn es bis zu Rand gefüllt wird?

b) Berechne den Durchmesser des halbkugelförmigen Brunnenbeckens.

 Hinweise und Tipps

- 114.** a) mögliche Zahlenkombinationen:
 $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$
 Es gibt 9 000 verschiedene Zahlenkombinationen.
- b) $10 \cdot 10 - 1 = 100 - 1 = 99$
 Julia kann noch 99 falsche Zahlenkombinationen eintippen.

Für die erste Stelle gibt es 9 mögliche Ziffern, für die zweite, dritte und vierte Stelle stehen jeweils 10 Ziffern zur Verfügung.

Vergiss nicht, die richtige Zahlenkombination abzuziehen.

- 115.** a) Aufstellung von 4 Läufern:
 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
 Es gibt 24 Möglichkeiten.
- b) Aufstellung von 3 Läufern:
 $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
 Es gibt 6 Möglichkeiten.

Der Startläufer steht fest. Es bleiben drei Läufer übrig.

- 116.** a) $36! = 3,719 \dots \cdot 10^{41} \approx 3,72 \cdot 10^{41}$
 Es gibt rund $3,72 \cdot 10^{41}$ Möglichkeiten.
- b) $8! = 40\,320$
 Es gibt 40 320 Möglichkeiten.

4 Asse und 4 Könige $\Rightarrow$ 8 Karten

- 117.** a) Anzahl der Tipps für einen sicheren „Sechsertipp“:

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!} = 13\,983\,816$$

 Für einen sicheren „Sechsertipp“ müsste man 13 983 816 Tipps abgeben.
- b) Anzahl der Tipps für einen sicheren „Dreiertipp“:

$$\frac{49 \cdot 48 \cdot 47}{3!} = 18\,424$$

 Für einen sicheren „Dreiertipp“ müsste man 18 424 Tipps abgeben.

Aus 49 Kugeln werden 6 Kugeln gezogen (Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).
 $n = 49$
 $k = 6$
 $n - k + 1 = 49 - 6 + 1 = 44$

Aus 49 Kugeln werden 3 Kugeln gezogen (Auswahl ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).
 $n = 49$
 $k = 3$
 $n - k + 1 = 49 - 3 + 1 = 47$

- 118.** Wechselmöglichkeiten mit Berücksichtigung der Reihenfolge:
 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$ Möglichkeiten
- Wechselmöglichkeiten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge:

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{5!} = 126$$
 Möglichkeiten

Aus neun Spielerinnen werden fünf Spielerinnen ausgewählt:
 $n = 9$
 $k = 5$
 $n - k + 1 = 9 - 5 + 1 = 5$

- 119.** a) Fußball: $r = 11$ cm

$$V = \frac{4}{3} \cdot (11 \text{ cm})^3 \cdot \pi$$

 $V = 5\,575,279 \dots \text{ cm}^3 \approx 5\,575,28 \text{ cm}^3$

$$O = 4 \cdot (11 \text{ cm})^2 \cdot \pi$$

 $O = 1\,520,530 \dots \text{ cm}^2 \approx 1\,520,53 \text{ cm}^2$

Setze die gegebenen Werte in die Volumen- bzw. Oberflächenformel einer Kugel ein:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

 Hinweise und Tipps

b) Sonne: $d = 2,8 \cdot 10^7 \text{ km} \Rightarrow r = 1,4 \cdot 10^7 \text{ km}$

$$V = \frac{4}{3} \cdot (1,4 \cdot 10^7 \text{ km})^3 \cdot \pi$$

$$V = 1,149 \dots \cdot 10^{22} \text{ km}^3 \approx 1,15 \cdot 10^{22} \text{ km}^3$$

$$O = 4 \cdot (1,4 \cdot 10^7 \text{ km})^2 \cdot \pi$$

$$O = 2,463 \dots \cdot 10^{15} \text{ km}^2 \approx 2,46 \cdot 10^{15} \text{ km}^2$$

120. Oberfläche des Gasbehälters:

$$d = 28 \text{ m} \Rightarrow r = 14 \text{ m}$$

$$O = 4 \cdot (14 \text{ m})^2 \cdot \pi$$

$$O \approx 2\,463,01 \text{ m}^2$$

Anzahl der benötigten Farbfässer:

$$2\,463,01 \text{ m}^2 : 350 \text{ m}^2 = 7,03 \dots$$

Es werden rund 7 Fässer benötigt.

Berechne zuerst die Oberfläche des Gasbehälters.

1 Fass reicht für 350 m².

121. $r = 10 \text{ cm}$

$$V = \frac{4}{3} \cdot (10 \text{ cm})^3 \cdot \pi$$

$$V \approx 4\,188,79 \text{ cm}^3$$

$$O = 4 \cdot \pi \cdot (10 \text{ cm})^2$$

$$O \approx 1\,256,64 \text{ cm}^2$$

a) $1\,256,64 \text{ cm}^2 : 2 = 628,32 \text{ cm}^2$

$$628,32 \text{ cm}^2 = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \quad | : 4; : \pi$$

$$50 \text{ cm}^2 \approx r^2 \quad | \sqrt{}$$

$$r \approx 7,07 \text{ cm}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (7,07 \text{ cm})^3$$

$$V \approx 1\,480,29 \text{ cm}^3$$

Berechne das ursprüngliche Volumen und die ursprüngliche Oberfläche.

Berechne zuerst die halbe Oberfläche.

Setze die bekannten Größen in die Formel für die Oberfläche ein und löse nach r auf.

Berechne mit dem neuen Radius das Volumen der Kugel.

b) $1\,256,64 \text{ cm}^2 \cdot 2 = 2\,513,28 \text{ cm}^2$

$$2\,513,28 \text{ cm}^2 = 4 \cdot r^2 \cdot \pi \quad | : 4; : \pi$$

$$200 \text{ cm}^2 \approx r^2 \quad | \sqrt{}$$

$$r \approx 14,14 \text{ cm}$$

$$V = \frac{4}{3} \cdot (14,14 \text{ cm})^3 \cdot \pi$$

$$V \approx 11\,842,32 \text{ cm}^3$$

Berechne zuerst die doppelte Oberfläche.

Setze die bekannten Größen in die Formel für die Oberfläche ein und löse nach r auf.

Berechne mit dem neuen Radius das Volumen der Kugel.

122. Volumen des Bleibarrens:

$$V = 7,345 \text{ kg} : 11,3 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

$$V = 0,65 \text{ dm}^3$$

Volumen einer kleinen Kugel:

$$0,65 \text{ dm}^3 : 50 = 0,013 \text{ dm}^3 = 13 \text{ cm}^3$$

Volumen = Masse : Dichte

 Hinweise und Tipps

Radius einer kleinen Kugel:

$$13 \text{ cm}^3 = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi \quad \left| \cdot \frac{3}{4} ; : \pi ; \sqrt[3]{} \right.$$

$$r = 1,458 \dots \text{ cm} \approx 1,46 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow d = 2 \cdot 1,46 \text{ cm} = 2,92 \text{ cm}$$

Eine kleine Kugel hat einen Durchmesser von 2,92 cm.

123. Volumen des Zylinders:

$$V_Z = (5 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm}$$

$$V_Z \approx 785,40 \text{ cm}^3$$

Volumen der Kugel:

$$V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot (5 \text{ cm})^3 \cdot \pi$$

$$V_{Ku} \approx 523,60 \text{ cm}^3$$

Volumen des Kegels:

$$V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot (5 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 10 \text{ cm}$$

$$V_{Ke} \approx 261,80 \text{ cm}^3$$

Bruchteile des Zylindervolumens:

Kugel:

$$523,60 \text{ cm}^3 : 785,40 \text{ cm}^3 = 0,666 \dots = \frac{2}{3}$$

Kegel:

$$261,80 \text{ cm}^3 : 785,40 \text{ cm}^3 = 0,333 \dots = \frac{1}{3}$$

Die Kugel hat $\frac{2}{3}$ des Zylindervolumens.

Der Kegel hat $\frac{1}{3}$ des Zylindervolumens.

$$V_Z = r^2 \cdot \pi \cdot h_Z \text{ mit } h_Z = 2r$$

$$V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_{Ke} \text{ mit } h_{Ke} = 2r$$

$$\frac{V_{Ku}}{V_Z} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi \cdot h_Z} = \frac{\frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi \cdot 2r} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{V_{Ke}}{V_Z} = \frac{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_{Ke}}{r^2 \cdot \pi \cdot h_Z} = \frac{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot 2r}{r^2 \cdot \pi \cdot 2r} = \frac{1}{3}$$

124. a) Volumen:

$$V_{\text{Lot}} = V_{\text{Halbkugel}} + V_{\text{Kegel}}$$

$$V_{\text{Lot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi + \frac{1}{3} r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{\text{Lot}} = \frac{2}{3} \cdot (2 \text{ cm})^3 \cdot \pi + \frac{1}{3} (2 \text{ cm})^2 \cdot \pi \cdot 7 \text{ cm}$$

$$V_{\text{Lot}} \approx 16,76 \text{ cm}^3 + 29,32 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Lot}} \approx 46,08 \text{ cm}^3$$

Gewicht:

$$m = 46,08 \text{ cm}^3 \cdot 7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$m \approx 359,42 \text{ g}$$

Das Maurerlot hat ein Gewicht von 359,42 g.

Der Kegel und die Halbkugel besitzen den gleichen Radius:

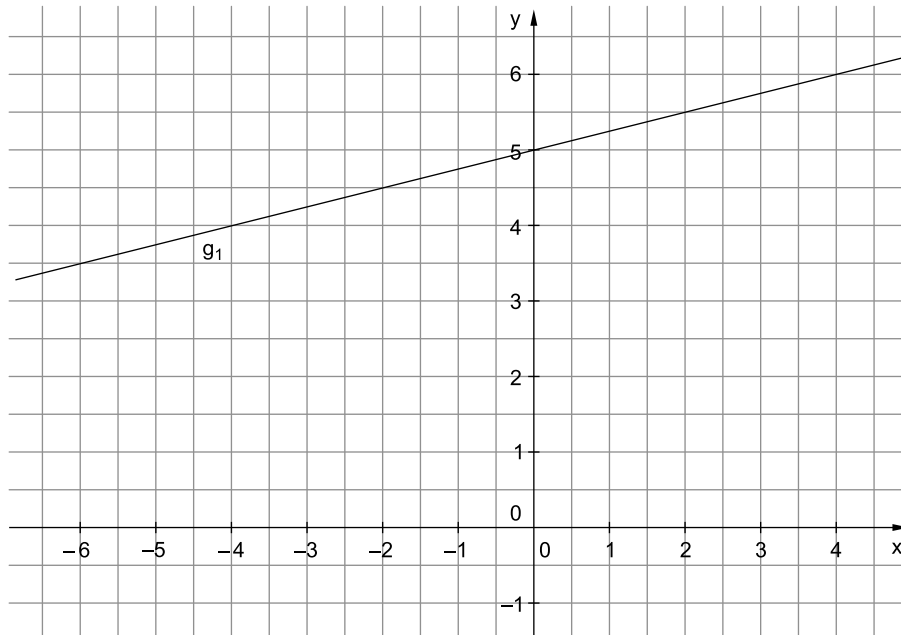
$$d = 4 \text{ cm} \Rightarrow r = 2 \text{ cm}$$

$$\text{Masse} = \text{Volumen} \cdot \text{Dichte}$$

Aufgaben

Punkte

1. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Geraden g_1 :



- a) Geben Sie die Funktionsgleichung von g_1 an (siehe Abbildung).
- b) Die Gerade g_2 durch den Ursprung ist parallel zur Geraden g_1 .
Geben Sie die Funktionsgleichung von g_2 an.
- c) Die Gerade g_4 verläuft durch den Punkt $D(4|1)$ und ist parallel zur Geraden g_3 : $y = 0,5x + 3$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g_4 .
- d) Zeichnen Sie die Geraden g_3 und g_4 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -4 bis 6 , y-Achse von -3 bis 5
- e) Gegeben ist die Gerade g_5 : $y = \frac{2}{3}x - 2$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N von g_5 mit der x-Achse und geben Sie N an.
- f) Weisen Sie nach, dass der Punkt $A(-3|-4)$ auf der Geraden g_5 liegt.
- g) Die Gerade g_6 wird durch die Gleichung $4 = -2x - 2y$ bestimmt und schneidet die Gerade g_5 im Punkt C.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts C und geben Sie diesen an.
- h) Überprüfen Sie rechnerisch die folgende Aussage:
Die Geraden g_5 und g_6 stehen aufeinander senkrecht.

9

2. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch:

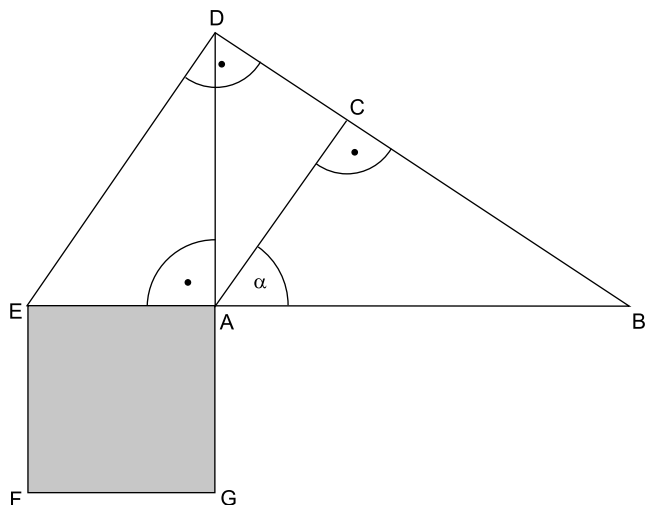
$$\frac{x-4}{6} + \frac{4(x-11)}{x-6} = \frac{16-x}{2}$$

4

3. a) Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte $A(-4|6)$ und $B(-2|-2)$.
Geben Sie die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform an.
- b) Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(-1|2)$.
Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_2 in der Normalform.
- c) Zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -5 bis 3, y-Achse von -4 bis 7
- d) Die Parabeln p_3 und p_4 sind durch folgende Funktionsgleichungen bestimmt:
 $p_3: x^2 - 4x = y - 5$
 $p_4: y = -x^2 + 4x - 1$
 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p_3 mit der Parabel p_4 und geben Sie diese Punkte an.
- e) Durch Spiegelung der Parabel p_3 an der x-Achse entsteht die Parabel p_5 . Geben Sie die Funktionsgleichung von p_5 in der Scheitelpunktform an.

8

4. Im Dreieck ABC hat die Strecke [BC] eine Länge von 4 cm und der Winkel α eine Größe von $53,13^\circ$ (siehe Skizze).
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats AEFG.



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

4

Lösungen

Aufgabengruppe I

1. a) Funktionsgleichung der Geraden g_1 :

$$t_1 = 5$$

$$m_1 = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$g_1: y = 0,25x + 5$$

- b) Funktionsgleichung der Geraden g_2 :

$$m_2 = m_1 = 0,25$$

$$t_2 = 0$$

$$g_2: y = 0,25x$$

- c) Funktionsgleichung der Geraden g_4 :

$$m_4 = m_3 = 0,5$$

$$m_4 = 0,5 \text{ und } D(4|1) \text{ in } g_4: y = m_4x + t_4:$$

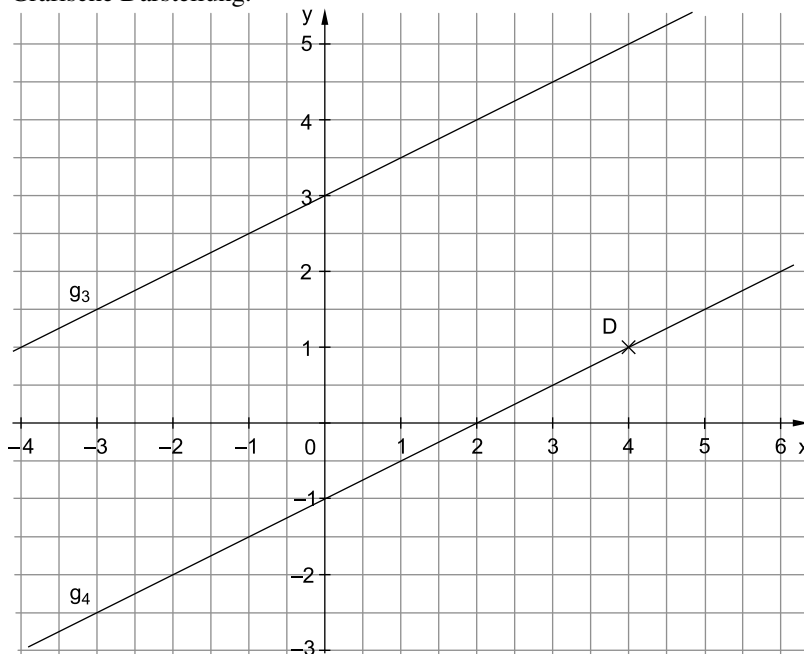
$$1 = 0,5 \cdot 4 + t_4$$

$$1 = 2 + t_4 \quad | -2$$

$$t_4 = -1$$

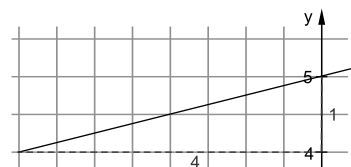
$$g_4: y = 0,5x - 1$$

- d) Grafische Darstellung:



Hinweise und Tipps

Lies aus der Abbildung den y-Achsenabschnitt t_1 ab. Wähle ein geeignetes Steigungsdreieck und bestimme die Steigung m_1 der Geraden g_1 .



Gib die vollständige Funktionsgleichung der Geraden g_1 an.

Parallele Geraden haben die gleiche Steigung. Die Gerade g_2 verläuft durch den Koordinatenursprung, schneidet die y-Achse also bei 0.

Gib die vollständige Funktionsgleichung an.

Die Gerade g_4 ist parallel zur Geraden g_3 . Setze den Wert der Steigung m_4 und die Koordinaten des Punkts D in die Normalform einer linearen Funktion ein und berechne t_4 .

Gib die vollständige Funktionsgleichung an.

Lege ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm an.

Der Platzbedarf ist in der Angabe gegeben:

x-Achse: -4 bis +6

y-Achse: -3 bis +5

Beschrifte das Koordinatensystem vollständig.

Zeichne g_3 und g_4 mithilfe des y-Achsenabschnitts und des Steigungsdreiecks oder mithilfe des Punkts D(4|1).

Überprüfe am Ende, ob deine gezeichneten Geraden parallel sind.

Hinweise und Tipps

Um den Schnittpunkt der Geraden g_5 mit der x-Achse zu erhalten, berechne die Nullstelle der linearen Funktion.

Die Nullstelle einer linearen Funktion hat den Funktionswert $y=0$.

Gib die Koordinaten von N an.

Der Punkt A liegt dann auf g_5 , wenn seine Koordinaten die Funktionsgleichung von g_5 erfüllen.

Setze die x-Koordinate des Punkts A in die Funktionsgleichung von g_5 ein und berechne den Funktionswert y.

Vergleiche den Funktionswert mit der y-Koordinate des Punkts A.

Forme die Gleichung der Geraden g_6 in die Normalform einer linearen Funktion um.

Setze die Funktionsgleichungen von g_5 und g_6 gleich und löse die Gleichung nach x auf.

Setze $x=0$ in g_5 oder g_6 (hier: g_6) ein und berechne y.

Gib die Koordinaten des Schnittpunkts C an.

Steht die Gerade g_5 senkrecht zu g_6 , dann gilt:

$$m_5 \cdot m_6 = -1$$

- e) Koordinaten des Schnittpunkts N:

$$g_5: y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$\frac{2}{3}x - 2 = 0 \quad | +2$$

$$\frac{2}{3}x = 2 \quad | \cdot \frac{3}{2}$$

$$x = 3$$

$$N(3|0)$$

- f) Lage von Punkt A:

$$A(-3|-4)$$

$$g_5: y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot (-3) - 2$$

$$y = -2 - 2$$

$$y = -4$$

Der Punkt A liegt auf der Geraden g_5 .

- g) Koordinaten des Schnittpunkts C der beiden Geraden g_5 und g_6 :

$$g_6: 4 = -2x - 2y \quad | +2x$$

$$2x + 4 = -2y \quad | :(-2)$$

$$y = -x - 2$$

$$g_5: y = \frac{2}{3}x - 2$$

$$\frac{2}{3}x - 2 = -x - 2 \quad | +x + 2$$

$$1\frac{2}{3}x = 0 \quad | :1\frac{2}{3}$$

$$x = 0$$

$$\text{in } g_6: y = 0 - 2$$

$$y = -2$$

$$C(0|-2)$$

- h) Überprüfen der Aussage:

$$m_5 = \frac{2}{3}$$

$$m_6 = -1$$

$$\frac{2}{3} \cdot (-1) = -\frac{2}{3} \neq -1$$

g_5 steht nicht senkrecht zu g_6 . Die Aussage ist also falsch.

2.
$$\frac{x-4}{6} + \frac{4(x-11)}{x-6} = \frac{16-x}{2}$$

Definitionsmenge:

$$x-6 \neq 0 \quad | +6$$

$$x \neq 6$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$$

Bestimme den Definitionsbereich.

Die Terme im Nenner der Brüche dürfen nicht 0 sein.

Gib die Definitionsmenge an.

Hinweise und Tipps

Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{6} + \frac{4(x-11)}{x-6} &= \frac{16-x}{2} & | \cdot 6 \cdot (x-6) \\ (x-6) \cdot (x-4) + 6 \cdot 4 \cdot (x-11) &= 3 \cdot (x-6) \cdot (16-x) \\ x^2 - 4x - 6x + 24 + 24x - 264 &= 3 \cdot (16x - x^2 - 96 + 6x) \\ x^2 + 14x - 240 &= -3x^2 + 66x - 288 & | + 3x^2; -66x; +288 \\ 4x^2 - 52x + 48 &= 0 & | : 4 \\ x^2 - 13x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Multipliziere mit dem Hauptnenner.

Multipliziere aus. Beachte die Vorzeichen.

Fasse zusammen.

Forme die quadratische Gleichung in die Normalform um.

$$x_{1/2} = 6,5 \pm \sqrt{(-6,5)^2 - 12}$$

$$x_{1/2} = 6,5 \pm \sqrt{42,25 - 12}$$

$$x_{1/2} = 6,5 \pm \sqrt{30,25}$$

$$x_{1/2} = 6,5 \pm 5,5$$

$$x_1 = 6,5 - 5,5$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 6,5 + 5,5$$

$$x_2 = 12$$

$$x_1 \neq 6 \text{ und } x_2 \neq 6$$

$$\mathbb{L} = \{1; 12\}$$

Löse mithilfe der Lösungsformel.

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Hier ist $p = -13$ und $q = 12$.

Überprüfe, ob die Lösungen in $\mathbb{D}$ liegen, und gib die Lösungsmenge an.

3. a) Funktionsgleichung der Parabel p_1 in der Normalform:

$$A(-4|6); B(-2|-2)$$

$$p_1 \text{ nach oben geöffnet: } y = x^2 + px + q$$

$$\text{I } 6 = (-4)^2 + (-4) \cdot p + q$$

$$\text{II } -2 = (-2)^2 + (-2) \cdot p + q$$

$$\text{I } 6 = 16 - 4p + q \quad | -16; +4p$$

$$\text{II } -2 = 4 - 2p + q \quad | -4; +2p$$

$$\text{I } -10 + 4p = q$$

$$\text{II } -6 + 2p = q$$

$$\begin{aligned} \text{I} = \text{II } -10 + 4p &= -6 + 2p & | -2p; +10 \\ 2p &= 4 & | : 2 \\ p &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in I } -10 + 4 \cdot 2 &= q \\ q &= -2 \end{aligned}$$

$$p_1: y = x^2 + 2x - 2$$

Setze die Koordinaten der Punkte A und B jeweils in die Normalform für eine nach oben geöffnete Parabel ein.

Achte auf die Vorzeichen.

Löse das Gleichungssystem (hier: mit dem Gleichsetzungsverfahren). Löse dazu beide Gleichungen nach q auf.

Setze die beiden erhaltenen Terme für q gleich und berechne p .

Setze $p = 2$ in eine umgeformte Gleichung (hier: Gleichung I) ein und berechne q .

Gib die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform an.

b) Funktionsgleichung der Parabel p_2 in der Normalform:

$$S_2(-1|2)$$

$$p_2 \text{ nach unten geöffnet: } y = -(x - x_s)^2 + y_s$$

$$p_2: y = -(x + 1)^2 + 2$$

$$y = -(x^2 + 2x + 1) + 2$$

$$y = -x^2 - 2x - 1 + 2$$

$$y = -x^2 - 2x + 1$$

Setze die Koordinaten von S_2 in die Scheitelpunktform für eine nach unten geöffnete Normalparabel ein.

Beachte die Vorzeichen.

Löse das Binom auf.

Löse die Klammer auf und fasse zusammen, dann erhältst du die Funktionsgleichung in Normalform.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK