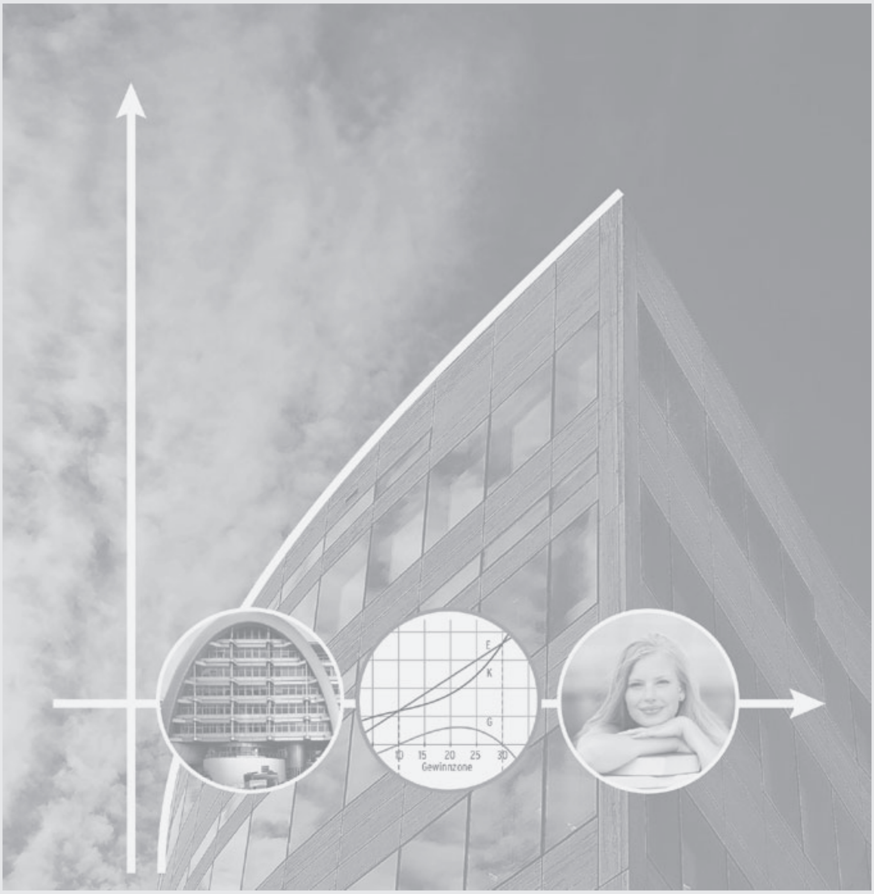
Ott

Abitur 2021 | *eA – GTR und CAS*

Nach den Vorgaben des Kerncurriculum 2018

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik an Beruflichen Gymnasien
– Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Niedersachsen



Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Der Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Umschlag: Kreis rechts: www. adpic.de

* * * * *

Quellennachweis der Prüfungsaufgaben: Niedersächsisches Kultusministerium

15. Auflage 2020

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0223-15
ISBN 978-3-8120-1010-8

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für Fachgymnasien in Niedersachsen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2021 an Beruflichen Gymnasien der Richtung Wirtschaft sowie Gesundheit und Soziales. Grundlage für die schriftliche Abiturprüfung 2021 ist das **Kerncurriculum** für das berufliche Gymnasium (KC, 2018).
Anpassungen inhaltsbezogener Kompetenzen für das Prüfungsjahr 2021 aufgrund der COVID-19-Pandemie sind berücksichtigt.
Auch werden u.a. die folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen für die Abiturprüfung 2021 **nicht** erwartet: Uneigentliche Integrale, logistisches Wachstum und Vertrauensintervalle.
Auf Aufgaben aus der analytischen Geometrie wird verzichtet.
Die Aufgaben eA für CAS/GTR sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten:
Analysis, Stochastik, Analytische Geometrie/Lineare Algebra.
Es gelten die Vorgaben des Kerncurriculums (KC 2018).

Alle Aufgaben sind für das erhöhte Anspruchsniveau GTR/CAS ausgelegt.
Die Aufgaben sind vollständig aus den Gebieten entnommen, die in den Vorgaben des Kernkurriculums (KC, 2018) für das erhöhte Anforderungsniveau im Fach Mathematik, Fachbereich Wirtschaft, Gesundheit und Soziales, aufgeführt sind.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.
Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, im Umfang und in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.
Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.
Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist unterschiedlich, um den Beruflichen Gymnasien aller Richtungen gerecht zu werden.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.
An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.
Autor und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Zentralabitur

Berufliches Gymnasium Wirtschaft, Gesundheit und Soziales

Erhöhtes Anforderungsniveau

Rechnertyp: GTR bzw. CAS

Hinweise für den Prüfling für das Abitur ab 2021

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik besteht aus zwei Teilen: **1. Pflichtteil**

2. Wahlteil

Pflichtteil:

- Bearbeitung ohne elektronische Hilfsmittel, ohne Formelsammlung
  Als Hilfsmittel sind nur die üblichen Zeichenmittel zugelassen.
- 70 Minuten Bearbeitungszeit
- Alle Aufgaben sind zu bearbeiten.
- 25 % der erreichbaren Bewertungseinheiten (BE)
- Bei jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

Wahlteil:

Nach Abgabe der Unterlagen des Pflichtteils werden die Hilfsmittel und die Aufgabenstellungen für den Wahlteil ausgegeben.

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 200 Minuten
- Der Prüfling wählt aus jedem der 3 Blöcke jeweils eine von zwei zur Wahl stehenden Aufgaben aus.

Block 1 Analysis 48 BE	**Block 2** Stochastik 24 BE	**Block 3** Lineare Algebra/ Analytische Geometrie
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

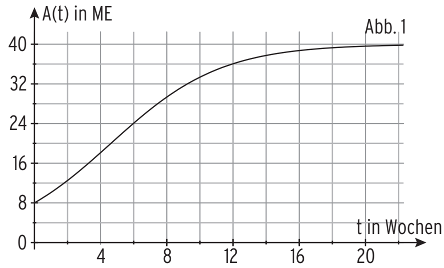
- Die Gewichtung der drei Blöcke erfolgt etwa im Verhältnis 2 : 1 : 1
- 75 % der erreichbaren Bewertungseinheiten (BE)
- Hilfsmittel: Zeichenmittel; eingeführter Taschenrechner (mit Handbuch): GTR oder CAS; Von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Aufgabe 8 **Lösungen Seite 24/25**

Abb. 1 zeigt den Gesamtabsatz in den ersten 20 Wochen nach Einführung.

a) Erläutern Sie, wie sich der Gesamtabsatz langfristig entwickeln wird.

b) Bestimmen Sie in etwa den Zeitpunkt, an dem die momentane Änderungsrate maximal ist. Kennzeichnen Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung.

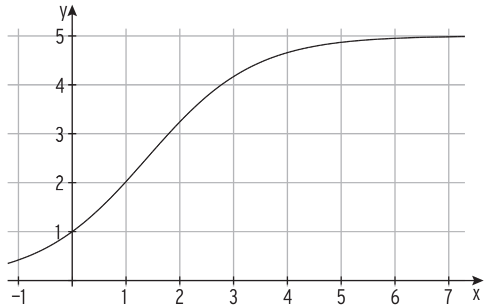


Aufgabe 9

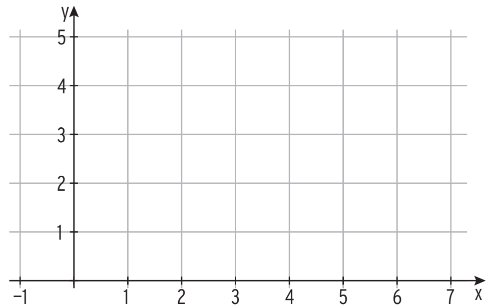
Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{5}{1 + a \cdot e^{-x}}$.

Die Abbildung rechts zeigt den Graphen von f_a für ein bestimmtes a.

a) Bestimmen Sie mithilfe des Graphen von f_a
- den Wert des Parameters a
- näherungsweise einen Wert für die maximale Änderungsrate von f_a.



b) Skizzieren Sie den Graphen von f_a' in dem Koordinatensystem der unteren Abbildung.

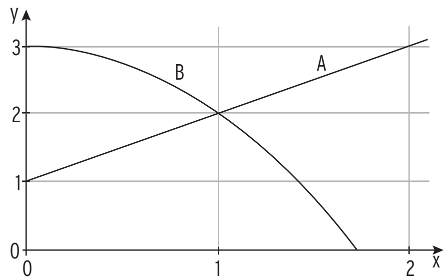


Aufgabe 10

Die Abbildung zeigt die Graphen einer Angebots- und einer Nachfragefunktion.

a) Ordnen Sie begründet zu.

b) Berechnen Sie die Konsumentenrente und kennzeichnen Sie diese in der Abbildung.



Aufgabe 11

a) Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion g mit $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$.

b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^{1} (\sqrt{2} \cdot x)^2 \, dx$.

c) Im Folgenden ist e die Eulersche Zahl und h die Funktion mit $e^{h(x)} = x$ für $x > 0$.

Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel: $h'(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

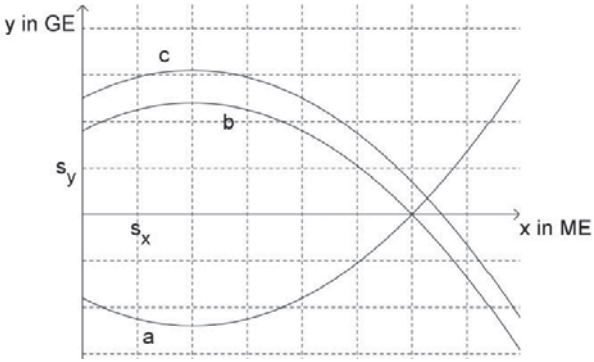
Aufgabe 12 **Lösungen Seite 25/26**

Die Mandelrath GmbH produziert ein umfangreiches Sortiment an Feingebäck.

1.1 Die Mandelrath GmbH plant die neue Plätzchenkreation Schokozart auf den Markt zu bringen. Erwartungsgemäß lässt sich der Gewinn der Produktion von Schokozart durch die Gewinnfunktion $G(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 120$ mit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ beschreiben, wobei die Produktionsmenge x in ME (Mengeneinheiten) und der Gewinn G(x) in GE (Geldeinheiten) angegeben werden.

1.1.1 Bestätigen Sie, dass die gewinnmaximale Ausbringungsmenge bei 6 ME liegt.

1.1.2 Entscheiden Sie begründet, welcher der dargestellten Graphen zur Grenzgewinnfunktion G' gehört, und geben Sie die fehlenden Achsenskalierungswerte s_x und s_y an. Die Skalierungen sollen ganzzahlig sein.



1.2 Der monatliche Umsatz von Schokozart wird durch die Funktion $u(t) = 20t \cdot e^{-0,2t}$ mit $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ modelliert, wobei t die Zeit in Monaten und u(t) den monatlichen Umsatz in GE/Monat angibt.

Zur Berechnung des Gesamtumsatzes wird die Funktion U verwendet:

$U(t) = (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t} + c.$

U(t) gibt den Gesamtumsatz bis zum Zeitpunkt t in GE an.

1.2.1 Zeigen Sie, dass die Funktion U eine Stammfunktion der Umsatzfunktion u ist.

1.2.2 Bestimmen Sie den Wert für c, wenn t = 0 der Zeitpunkt der Markteinführung des Produkts Schokozart ist.

Aufgabe 13

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist.

b) Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben.

POOL 2 Stochastik

Lösungen Seite 26

Aufgabe 1

An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal?

Aufgabe 2

Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Lieferant erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für höchstens ein defektes Smartphone? Geben Sie einen Term an.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit n = 10 und p = 0,6.

a) Welche der Abbildungen zeigt die Verteilung von X? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise $P(4 < X < 7)$ und $P(X \neq 5)$.

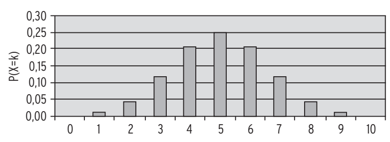


Abb. 1

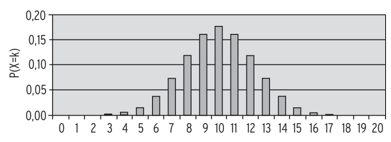


Abb. 2

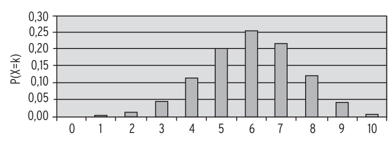


Abb. 3

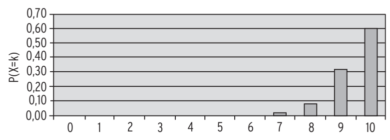


Abb. 4

Aufgabe 4

Ein Basketballspieler übt Freiwürfe. Erfahrungsgemäß trifft er bei 80% seiner Würfe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er mit den ersten beiden Würfen zweimal?

Geben Sie Ereignisse A und B an, so dass gilt: $P(A) = 0{,}2^{10}$; $P(B) = \binom{50}{40} 0{,}8^{40} \cdot 0{,}2^{10}$

Aufgabe 5

Von den o-clock17-Besitzern sind 25 % unzufrieden mit der Ladezeit der Internetseiten. Nach einem Zufallsprinzip wird eine Umfrage hierzu durchgeführt, wobei Mehrfachbefragungen nicht ausgeschlossen werden können (o-clock17 ist eine internetfähige Uhr).

1 Entwerfen Sie eine Aufgabenstellung, die zu folgendem Lösungsansatz führt:

$$P(X = 35) = \binom{135}{35} \cdot 0{,}25^{35} \cdot 0{,}75^{100}$$

2 Nun werden 80 o-clock17-Besitzer befragt. Darunter sind 25 % unzufrieden mit der langen Ladezeit. Untersuchen Sie, ob dieses Ergebnis innerhalb des Intervalls $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ liegt.

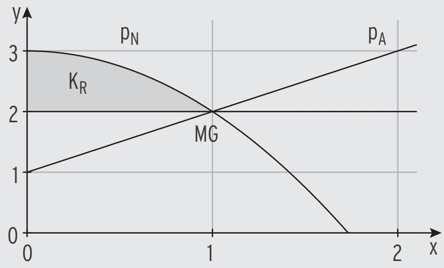
Aufgabe 10 (Aufgaben Seite 11)

a) A: Monoton wachsend; Angebotsfunktion

$p_A(x) = x + 1$

B: Monoton fallend; Nachfragefunktion

$p_N(x) = -x^2 + 3$



b) $p_A(x) = p_N(x) \qquad -x^2 + 3 = x + 1$

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1\,;\; x_2 = -2$

MG (1 | 2)

Konsumentenrente: $\int_0^1 p_N(x)\,dx - 2 = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_0^1 - 2 = \frac{2}{3}$

Aufgabe 11

a) $g(x) = 3x^2 - x + \frac{1}{x} = 3x^2 - x + x^{-1}$

$g'(x) = 6x - 1 + (-1) \cdot x^{-2} = 6x - 1 - \frac{1}{x^2}$ für $x \neq 0$.

Hinweis: Das Umformen der Gleichung der Ableitungsfunktion ist nicht notwendig.

b) $\int_{-1}^{1} (\sqrt{2} \cdot x)^2\,dx = \int_{-1}^{1} 2x^2\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \cdot 1^3 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

c) Durch $e^{h(x)} = x$ wird die Funktion h definiert (für $x > 0$). Beide Seiten ableiten. Auf der linken Seite wird hierbei die Kettenregel angewendet: $e^{h(x)} \cdot h'(x) = 1$

Umstellen nach $h'(x)$: $h'(x) = \frac{1}{e^{h(x)}}$

Wegen $e^{h(x)} = x$ wird $e^{h(x)}$ durch x ersetzt und man erhält: $h'(x) = \frac{1}{e^{h(x)}} = \frac{1}{x}$,

was zu zeigen war.

Aufgabe 12 (Aufgaben Seite 12)

1.1.1 Gewinnmaximale Ausbringungsmenge bei 6 ME

$G'(x) = -3x^2 + 12x + 36;\; G''(x) = -6x + 12$

notwendige Bedingung $G'(x) = 0$ ist erfüllt für $x = 6$: $G'(6) = 0$

hinreichende Bedingung $G''(x) < 0$ ist erfüllt für $x = 6$: $G''(6) = -24 < 0$

Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt bei 6 ME.

Hinweis: $G'(x) = 0$ kann auch berechnet werden.

1.1.2 Entscheidung

Für die Grenzgewinnfunktion gilt: $G'(x) = -3x^2 + 12x + 36$

Der gesuchte Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, die die y-Achse bei $y = 36$ schneidet. Daher muss der gesuchte Graph b oder c sein.

Eine Nullstelle der Grenzgewinnfunktion liegt bei $x = 6$. Daher scheidet c wegen der Ganzzahligkeit der Skalierung aus. Also ist b der gesuchte Graph.

Damit muss für die Skalierungswerte gelten: $s_x = 1$ und $s_y = 20$.

Aufgabe 12 Fortsetzung (Aufgaben Seite 12)

1.2.1 Funktion U ist eine Stammfunktion der Umsatzfunktion u

$u(t) = 20t \cdot e^{-0,2t}$; $U(t) = (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t} + c$

Zu zeigen durch Ableitung: $U'(t) = u(t)$

Mit Produkt- und Kettenregel: $U'(t) = -100 \cdot e^{-0,2t} + (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t} \cdot (-0,2)$

$$U'(t) = 20t \cdot e^{-0,2t} = u(t)$$

Damit ergibt sich für die Stammfunktionen: $U(t) = (-100t - 500) \cdot e^{-0,2t} + c$; $c \in \mathbb{R}$

1.2.2 Wert für c, wenn $t = 0$ der Zeitpunkt der Markteinführung ist

Da $U(0) = 0$ gelten muss, ergibt sich: $U(0) = 500 \cdot e^0 = 500 \Leftrightarrow c = 500$

Aufgabe 13

a) F ist Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-2)^3 = 2 \cdot (x-2)^3 = f_2(x)$

b) Die Terme aller Stammfunktionen von f_a lassen sich durch $F_{a,b}(x) = \frac{a}{4} \cdot (x-2)^4 + b$

mit $b \in \mathbb{R}$ darstellen.

Für $a > 0$ hat $F_{a,b}$ stets Funktionswerte, die nicht negativ sind (vgl. Graph I).

Für $a < 0$ gibt es stets Werte von b, sodass $F_{a,b}$ nur negative Funktionswerte hat

(vgl. Graph II).

Hinweis: a bestimmt die Öffnung der Parabel 4.Ordnung; für $a > 0$: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} F_{a,b}(x) = \infty$

b entspricht einer Verschiebung in y-Richtung

POOL 2 Stochastik

(Aufgaben Seite 13)

Aufgabe 1

a) Ereignis A: Man verliert von 10 Spielen mindestens acht.

b) Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der verlorenen Spiele an. X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = \frac{2}{3}$: $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$

Mit der Wahrscheinlichkeit von $\frac{8}{27}$ verliert er dabei genau zwei Mal.

Aufgabe 2

X: Anzahl der defekten Smartphones unter 50 Smartphones; X ist $B_{50;0,04}$- verteilt

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{50}{0} \cdot 0{,}04^0 \cdot 0{,}96^{50} + \binom{50}{1} \cdot 0{,}04^1 \cdot 0{,}96^{49}$

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

a) $E(X) = 6$; größter Wert in $X = 6$; Abb. 3 zeigt die Verteilung

b) $P(4 < X < 7) = P(X = 5) + P(X = 6) = 0{,}45$

$P(X \neq 5) = 1 - P(X = 5) = 0{,}8$

POOL 2 Stochastik

(Aufgaben Seite 13)

Aufgabe 4

Trefferquote p = 0,8 P(Zwei Treffer in den ersten beiden Würfen) = $0{,}8^2 = 0{,}64$

Ereignis A: Er wirft 10 Mal daneben

Ereignis B: Er trifft bei 50 Würfen genau 40 Mal.

Aufgabe 5

1 Die zugehörige Aufgabenstellung lautet z. B.: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau 35 von 135 befragten Personen über die lange Ladezeit beklagen, wenn die Quote der unzufriedenen Besitzer 25 % beträgt.

2 X ist die Anzahl der o-clock17-Besitzer, die sich über die lange Ladezeit beklagen.

Stichprobenumfang: n = 80

Trefferwahrscheinlichkeit: p = 25 % = 0,25; Erwartungswert: $E(X) = \mu = 80 \cdot 0{,}25 = 20$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = \sqrt{15}$

$[\mu - \sigma; \mu + \sigma] = \left[20 - \sqrt{15}\,; 20 + \sqrt{15}\,\right]$

Da $20 + \sqrt{15} < 25$, liegt das Ergebnis nicht im Intervall.

Überlegung: $\sqrt{15} < \sqrt{16} = 4$

$25 \notin \left[20 - \sqrt{15}\,; 20 + \sqrt{15}\,\right]$

Aufgabe 6

(Aufgaben Seite 14)

FF: falsche Form; RF: richtige Form

FG: fehlerhaftes Gewinde; RG: fehlerfreies Gewinde

Gegeben: $P(FF) = 0{,}05$; $P_{FF}(FG) = 0{,}4$; $P(RF \cap RG) = 0{,}936$

Gesucht: $P_{FG}(FF)$

$P_{FF}(FG) = 0{,}4 \Leftrightarrow P_{FF}(FG) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FF)} = 0{,}4 \quad \Leftrightarrow P(FF \cap FG) = 0{,}05 \cdot 0{,}4 = 0{,}02$

Aufstellen einer Vierfeldertafel:

	FF	RF	gesamt
FG	0,02	0,014	0,034
RG	0,03	0,936	0,966
gesamt	0,05	0,95	1

$P_{FG}(FF) = \frac{P(FF \cap FG)}{P(FG)} = \frac{0{,}02}{0{,}034} = \frac{10}{17}$ ($\approx$ 58,8 %)

Aufgabe 7

a) $P(X = 4) = 1 - 0{,}3 - 0{,}5 = 0{,}2$

Erwartungswert von X: $E(X) = 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}4$

b) Das Produkt 12 kann hier auf zwei Möglichkeiten erreicht werden: 2;6 und 6;2.

Damit ergbt sich die Wahrscheinlichkeit: $P(12) = 2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}30$

Stochastik Aufgabe 6 Seite 2/2

a) Für die langfristige Personalplanung soll die Altersstruktur in den Abteilungen genauer betrachtet werden. Stellen Sie dazu den oben beschriebenen Sachverhalt in geeigneter Weise grafisch dar. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

(1) Ein Mitarbeiter ist ein jüngerer Mitarbeiter.

(2) Ein Mitarbeiter arbeitet in der Schlosserei.

(3) Ein Mitarbeiter ist ein jüngerer Mitarbeiter und er arbeitet in der Schlosserei.

(4) Ein Mitarbeiter ist ein älterer Mitarbeiter unter der Voraussetzung, dass der Mitarbeiter in der Gießerei arbeitet.

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse in Bezug auf die langfristige Personalplanung.

b) In dem Unternehmen werden unter anderem Gussteile mit einer Maschine hergestellt. Diese Gussteile werden in regelmäßigen Abständen einer Qualitätskontrolle unterzogen. Erfahrungsgemäß weisen 5% aller Gussteile Fehler auf und müssen aussortiert werden. Aus der laufenden Produktion werden 100 Teile entnommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(1) genau zwei Teile fehlerhaft sind.

(2) mindestens 92 Teile einwandfrei sind.

Wenn die Wahrscheinlichkeit für genau 2 fehlerhafte Teile unter 10% liegt oder die Wahrscheinlichkeit für mindestens 92 einwandfreie Teile bei 92,5% liegt, muss die Maschine nicht gewartet werden. Entscheiden Sie, ob die Maschine gewartet werden muss. Berechnen Sie die Mindestgröße einer Stichprobe, sodass mit mehr als 95% Wahrscheinlichkeit wenigstens ein defektes Teil in der Stichprobe enthalten ist.

c) Für die Montage der Endprodukte werden Metallstifte von einem Zulieferer benötigt. Damit in der Montage die Geräte in konstanter Qualität hergestellt werden können, müssen die Stifte des Zulieferers bestimmte Qualitätskriterien erfüllen. Die Länge der Metallstifte soll normalverteilt sein mit einem Erwartungswert von 300 mm und einer Varianz von 240,25 mm^2.

Langjährige Erfahrung hat gezeigt, dass für die Qualitätskontrolle der Stifte keine umfangreichen Stichproben notwendig sind, sondern dass es ausreicht, wenn ein Metallstift zufällig entnommen wird. Die Lieferung muss zurückgewiesen werden, wenn die Länge des entnommenen Metallstiftes um mehr als 1σ nach unten oder um mehr als 2σ nach oben vom Erwartungswert abweicht.

Geben Sie an, in welchem Intervall die Länge eines zufällig entnommenen Metallstiftes liegen muss, damit die Lieferung nicht zurückgewiesen wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Länge eines Metallstiftes in diesem Intervall liegt.
Geben Sie an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Lieferung zurückgeschickt werden muss.
(Abitur 2012, Fachgymnasium Niedersachsen.)

Stochastik Aufgabe 7 **Lösungen Seite 88**

Fertigungsanlagen für die Herstellung von Feuerlöschern laufen nach dem Anschalten im Dauerbetrieb (24 Stunden pro Tag, 7 Tage die Woche) eine gewisse Zeit ohne Störungen. Die Zeit bis zur ersten Störung heißt Betriebszeit. Die Betriebszeit ist in Stunden angegeben.

a) Für den Bau dieser Anlagen werden Komponenten von einer Zulieferunternehmung hergestellt. Ein Teil der Komponenten ist defekt. Deshalb durchlaufen alle Komponenten eine Kontrolle, bei welcher 95 % der defekten, aber auch 10 % der intakten Teile aussortiert werden.
Stellen Sie die geschilderte Situation in geeigneter Form strukturiert dar.
Bestimmen Sie den Anteil der defekten Teile der Lieferung, wenn 18,5 % aller Teile bei der Kontrolle aussortiert werden.
Die Betriebszeit (in Stunden) bei einer Anlage wird näherungsweise durch die normalverteilte Zufallsvariable t mit dem Erwartungswert 1700 und der Standardabweichung 150 beschrieben.
Bestimmen Sie die Zeit, nach der eine Anlage dieses Typs abgeschaltet werden müsste, damit mit der Wahrscheinlichkeit von 0,98 noch kein Störfall eingetreten ist. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Störfall einer solchen Anlage frühestens nach 9 Wochen eintritt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von drei unabhängig voneinander arbeitenden Anlagen wenigstens zwei frühestens nach 9 Wochen einen Störfall haben.

b) Folgende Betriebszeiten einer Serie von 12 Anlagen liegen vor:

Anlagennr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Betriebszeit h	1700	1750	1650	1700	1950	1500	1600	1600	1700	T_1	T_2	1750

Der Erwartungswert der Betriebszeiten in Stunden ist 1700, die Varianz 22500.
Bestimmen Sie die beiden fehlenden Betriebszeiten T_1 und T_2.
Dabei ist für T_1 die kleinere Zeit ermittelt worden.

(Abitur 2010, Fachgymnasium Niedersachsen.)

Lösung Stochastik Aufgabe 6 Seite 2/2

a) **Wahrscheinlichkeiten**

(3) $P(J \cap S) = \frac{270}{500} \cdot \frac{17}{270} = 0{,}0340 = 3{,}40\%$

(4) $P_G(A) = \frac{50}{170} = 0{,}2941 = 29{,}41\%$

Interpretation: Es gibt ungefähr gleich viele junge und ältere Mitarbeiter (54% zu 46%).

In der Schlosserei arbeitet ca. ein Fünftel der Belegschaft. 3,4% der Belegschaft ist jung und arbeitet in der Schlosserei. 16% (19,4% – 3,4%) der Belegschaft ist älter und arbeitet in der Schlosserei. Es sind also extrem wenig junge Menschen in dieser Abteilung. Sie sollte sich um Nachwuchs bemühen! Von den Gießerei-Mitarbeiternsind 29,41% älter, d. h. dort arbeiten viele jüngere Mitarbeiter.

b) **Wahrscheinlichkeiten mit Binomialverteilung und Entscheidung**

BV: Bernoulli-Kette liegt zugrunde.

$n = 100$; X: Anzahl der fehlerhaften Teile; $p = 0{,}05$

(1) $P(X = 2) = B_{100;\,0{,}05}(2) \approx 0{,}0812 = 8{,}12\%$

$n = 100$; X: Anzahl der einwandfreien Teile; $p = 0{,}95$

(2) $P(X \geq 92) = 1 - \sum_{k=0}^{91} B_{100;\,0{,}95}(k) \approx 1 - 0{,}0631 = 0{,}9369 = 93{,}69\%$

Die Wahrscheinlichkeit für genau zwei fehlerhafte Teile liegt mit 8,12% unter 10% und die Wahrscheinlichkeit für mindestens 92 einwandfreie Teile mit 93,69% über 92,5%. Somit muss die Maschine nicht gewartet werden.

Mindestgröße der Stichprobe

X : Anzahl der fehlerhaften Teile; $p = 0{,}05$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^n > 0{,}95 \Leftrightarrow 0{,}95^n < 0{,}05$

$\Rightarrow n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}95)} = 58{,}40 \Rightarrow n \geq 59$

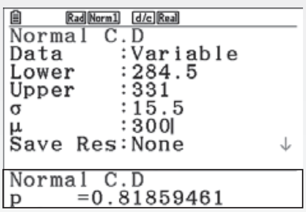
Die Stichprobe muss mindestens 59 Teile umfassen, damit mit mehr als 95% Wahrscheinlichkeit wenigstens ein defektes Teil in der Stichprobe enthalten ist.

c) **Wahrscheinlichkeiten mit Normalverteilung**

$\mu = 300$; Varianz $\sigma^2 = 240{,}25 \Rightarrow \sigma \approx 15{,}5$

$I = [\mu - 1\sigma;\ \mu + 2\sigma] = [300 - 15{,}5;\ 300 + 31] = [284{,}5;\ 331]$

$P(284{,}5 \leq X \leq 331) = \Phi(331) - \Phi(284{,}5) \approx 0{,}8186 = 81{,}86\%$



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge der Metallstifte zwischen 284,5 und 331 mm liegt, beträgt 81,86%.

100% – 81,86% = 18,14%

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung zurückgewiesen wird, beträgt 18,14%.

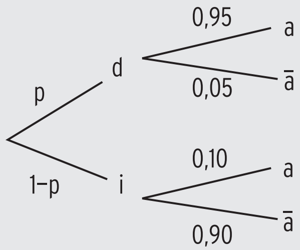
Lösung Aufgabe 7 (Aufgabe Seite 76)

a) Baumdiagramm:

d: defektes Bauteil mit Wahrscheinlichkeit p

i (= $\overline{d}$): intaktes Bauteil mit Wahrscheinlichkeit 1 − p

a: aussortierte Teile; $\overline{a}$: nicht aussortierte Teile



Aussortierte Teile:

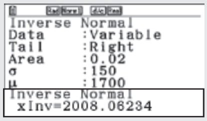
$0{,}185 = p \cdot 0{,}95 + (1 - p) \cdot 0{,}10 \Rightarrow p = 0{,}10$

10 % der Teile sind defekt.

Die Betriebszeit t ist normalverteilt, $\mu = 1700; \sigma = 150$

„Mit Wahrscheinlichkeit 0,98 kein Störfall“ bedeutet „mit Wahrscheinlichkeit 0,02 ein Störfall“. Gesucht ist also eine Zeit T_3 in Stunden mit $P(t > T_3) = 0{,}02$

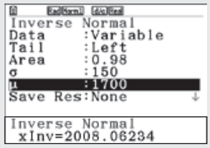
T_3 ist die Zeit des Abschaltens.



Bedingung: $P(t > T_3) = 0{,}02$ mit GTR: $\Rightarrow T_3 \approx 2008{,}06$

oder: $P(t \leq T_3) = \Phi\left(\frac{T_3 - 1700}{150}\right) = 0{,}98 \Leftrightarrow \frac{T_3 - 1700}{150} = \Phi^{-1}(0{,}98) \Rightarrow T_3 \approx 2008{,}06$ (GTR)

Hinweis: Berechnung mit GTR: invNorm(0,98; 1700; 150; Left)



Ca. 83,7 Tage oder ca. 12 Wochen (≙ 2008 Stunden) läuft die Anlage mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 98 % störungsfrei.

9 Wochen entsprechen 1512 h: t ist N(1700; 150)-verteilt

$P(t \leq 1512) = \Phi\left(\frac{1512 - 1700}{150}\right) \approx 0{,}1050$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anlage frühestens nach 9 Wochen einen Störfall hat, ist näherungsweise 0,1050.

X: Anzahl der Fertigungsanlagen, die frühestens nach 9 Wochen eine Störfall haben; X ist binomialverteilt mit n = 3 und p = 0,1050:

$P(X \geq 2) = \sum_{i=2}^{3} B_{3;0{,}1050}(i) = 1 - \sum_{i=0}^{1} B_{3;0{,}1050}(i) \approx 0{,}0308 \quad (= 1 - P(X \leq 1))$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist näherungsweise 0,0308.

b) **Erwartungswert** E(t), Betriebszeit t, Betriebszeit der Anlage i: t_i, Varianz V(t)

$E(t) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} t_i = \frac{16900 + T_1 + T_2}{12} = 1700 \Rightarrow T_1 = 3500 - T_2$

$V(t) = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} (t_i - E(t))^2 = \frac{1}{12}(130000 + (T_1 - 1700)^2 + (T_2 - 1700)^2) = 22500$

$T_1 = 3500 - T_2$ einsetzen ergibt z. B.

$0 = 5990000 + 2T_2^2 - 7000T_2$ mit den Lösungen $T_{2,1} = 1490{,}19$; $T_{2,2} = 2009{,}81$.

Für T_1 ergeben sich rechnerisch die gleichen Zeiten;

also: $T_1 \approx 1490$ und $T_2 \approx 2010$

2.3 Lineare Algebra

Formelsammlung

Lineare Verflechtung

$$\begin{tikzcd}
R_i \arrow[r, "A", "\text{Stufe 1}"'] \arrow[rr, bend right, "C"'] & Z_j \arrow[r, "B", "\text{Stufe 2}"'] & E_k
\end{tikzcd}$$

R_i: Rohstoffe (i = 1, … , m); Z_j: Zwischenprodukte (j = 1, …, p);
E_k: Endprodukte (k = 1,…,n)

Verflechtungsmatrizen

$A = A_{RZ}$ Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix
$B = B_{ZE}$ Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix
$C = C_{RE}$ Rohstoff-Endprodukt-Matrix Es gilt: $\boxed{C = A \cdot B}$

Verbrauchs-, Produktionsvektoren

$\vec{r}$ für die Rohstoffe
$\vec{z}$ für die Zwischenprodukte Es gilt: $\boxed{\begin{aligned} A \cdot \vec{z} &= \vec{r} \\ B \cdot \vec{x} &= \vec{z} \\ C \cdot \vec{x} &= \vec{r} \end{aligned}}$
$\vec{x}$ für die Endprodukte

Kostenvektoren (variable Kosten pro Einheit) (Kostenvektoren sind Zeilenvektoren)

$\vec{k}_R^T$ Material-(Rohstoff-) kosten

$\vec{k}_Z^T$ Fertigungskosten in Stufe 1

$\vec{k}_E^T$ Fertigungskosten in Stufe 2

Kosten für die Produktion $\vec{x}$

K_R für die Rohstoffe
K_Z für die Fertigung der Zwischenprodukte Es gilt: $\boxed{\begin{aligned} K_R &= \vec{k}_R^T \cdot \vec{r} \\ K_Z &= \vec{k}_Z^T \cdot \vec{z} \\ K_E &= \vec{k}_E^T \cdot \vec{x} \end{aligned}}$
K_E für die Fertigung der Endprodukte
K_f fixe Kosten

Kostenvektoren sind Zeilenvektoren.

Für die variablen Herstellkosten $\vec{k}_v^T$ $\boxed{\vec{k}_v = \vec{k}_R^T \cdot C + \vec{k}_Z^T \cdot B + \vec{k}_E^T}$

pro Einheit eines Endproduktes gilt:

Für die **Gesamtkosten** K für die Produktion $\vec{x}$ gilt bei Fixkosten K_f:

$$\boxed{\begin{aligned} K &= K_v + K_f = \vec{k}_v^T \cdot \vec{p} + K_f \\ K &= \vec{k}_R^T \cdot C \cdot \vec{x} + \vec{k}_Z^T \cdot B \cdot \vec{x} + \vec{k}_E^T \cdot \vec{x} + K_f \\ K &= \vec{k}_R^T \cdot \vec{r} + \vec{k}_Z^T \cdot \vec{z} + \vec{k}_E^T \cdot \vec{x} + K_f \end{aligned}}$$

Leontief-Modell

Input-Output-Tabelle

	S_1	S_2	...	S_n	Marktabgabe	Produktion
S_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	x_1
S_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	x_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	x_n

Dabei ist x_{ij} die Lieferung des Sektors S_i an den Sektor S_j (in geeigneten Einheiten).

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ steht für die **Produktion,** auch Bruttooutput, ...

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ steht für die **Marktabgabe,** auch Netto-Output, Konsum,Endverbrauch, ...

Die Elemente a_{ij} der **Technologiematrix A (Inputmatrix A)** sind definiert

durch $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$: $A = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} & \frac{x_{13}}{x_3} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} & \frac{x_{23}}{x_3} \\ \frac{x_{31}}{x_1} & \frac{x_{32}}{x_2} & \frac{x_{33}}{x_3} \end{pmatrix}$

Falls $(E - A)$ invertierbar ist, heißt $(E - A)^{-1}$ Leontief-Inverse.

Dann gilt: $A\vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \Leftrightarrow \vec{y} = (E - A)\vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = (E - A)^{-1}\vec{y}$

Stochastische Matrizen

Die **Übergangsmatrix M ist ein stochastische Matrix,** bei der die **Summe in jeder Zeile gleich 1** ist und jede Zahl größer oder gleich null ist.
Die aktuelle Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\vec{v}^T$ (Zeilenvektor) beschrieben.
Ein **Zustandsdiagramm (Übergangsdiagramm)** lässt sich durch eine **Übergangsmatrix M** beschreiben.
Markow-Kette mit der Anfangsverteilung $\vec{v}_0^T$ (Zustand zur Zeit n = 0; Startverteilung) und der Übergangsmatrix **M**:
$\vec{v}_0^{\,T} \to \vec{v}_1^{\,T}\ (= \vec{v}_0^{\,T} \cdot \mathbf{M}) \to \vec{v}_2^{\,T}\ (= \vec{v}_1^{\,T} \cdot \mathbf{M}) \to \vec{v}_3^{\,T} (= \vec{v}_2^{\,T} \cdot \mathbf{M} = \vec{v}_0^{\,T} \cdot \mathbf{M}^2) \to \ldots$
Dabei ist z. B. $\vec{v}_1$ der Zustand nach einem Übergang.

Übergangsmatrix für zwei Zeitabschnitte: $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{M}^2$

Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{M}^n = \mathbf{M}_\infty$, besteht die Matrix $\mathbf{M}_\infty$ aus lauter gleichen Zeilen: $\mathbf{M}_\infty = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$

$\mathbf{M}_\infty$ heißt **Grenzmatrix.** Der Zeilenvektor $\vec{p}^{\,T} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$ ist ein **Fixvektor.**

Berechnung stationärer Zustände: $\vec{p}^{\,T} \cdot \mathbf{M} = \vec{p}^{\,T}$

Dabei ist $\vec{p}$ der Gleichgewichtszustand **(stationäre, langfristige, stabile Verteilung).**
Die stationäre Verteilung **hängt nicht von der Anfangsverteilung** ab.
Zur **Berechnung** von $\vec{p}^{\,T} = (p_1 \quad p_2 \quad p_3)$ (Fixvektor) ist das

LGS $\vec{p}^{\,T} \cdot \mathbf{M} = \vec{p}^{\,T}$ unter der **Nebenbedingung** $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ (= 100 %) zu lösen.

Zyklische Verteilungen

Beachten Sie: Eine Populationsentwicklung wird durch die Übergangsmatrix

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ v & 0 & 0 \end{pmatrix}$ beschrieben. Dabei sind a und b die **Überlebensraten** und v die **Vermehrungsrate.**

Gilt $\begin{cases} a \cdot b \cdot v < 1, & \text{stirbt die Population aus.} \\ a \cdot b \cdot v = 1, & \text{entwickelt sich die Population zyklisch} \\ a \cdot b \cdot v > 1, & \text{nimmt die Population zu.} \end{cases}$

Ein **zyklisches Verhalten** liegt vor, wenn $\mathbf{M}^k = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Nach einem Zyklus von k Zeiteinheiten stellt sich wieder die Ausgangspopulation ein.

Aufgaben eA - GTR/CAS - zur Prüfungsvorbereitung

Lineare Algebra Aufgabe 1 **Lösungen Seite 106/107**

In der Volkswirtschaft von XLAND sind die Sektoren S_1, S_2 und S_3 nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten. Die Inputmatrix A ist mit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{2}{24} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{8} & \frac{10}{24} \end{pmatrix}$ bekannt.

In der vergangenen Periode produzierte Sektor S_1 6 Mengeneinheiten (ME), Sektor S_2 8 ME und Sektor S_3 24 ME.

a) Interpretieren Sie das Element a_{23} der Technologiematrix A .
Jeder Sektor plante eine Marktabgabe von mindestens 4 ME.
Untersuchen Sie, ob diese Planung mit der gegebenen Produktion umgesetzt werden konnte. Stellen Sie die gesamtwirtschaftliche Verflechtung der vergangenen Periode von XLAND grafisch dar. (8 BE)

b) Für die aktuelle Periode soll der Sektor S_1 4,5 ME, Sektor S_2 12 ME und Sektor S_3 7 ME für den Markt bereitstellen. Bestimmen Sie die notwendige prozentuale Produktionsmengenänderung je Sektor.
Für die folgende Periode sind folgende Vorgaben zu beachten:
Die Produktionsmengen der einzelnen Sektoren sind nicht bekannt, es gilt aber, dass die Produktionsmengen der Sektoren S_1 und S_2 gleich groß sein sollen. Die Abgabe an den Markt soll für Sektor S_1 13 ME und für Sektor S_2 11 ME betragen.
Bestimmen Sie die Produktionsmengen der einzelnen Sektoren sowie die Marktabgabe des Sektors S_3.
(12 BE)

Für die Volkswirtschaft von YLAND sind die zwei Sektoren SB_1 und SB_2 nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten.

Für die Technologiematrix B_k gilt: $B_k = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{6} + 2k \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} - 2k \end{pmatrix}$.

In der letzten Periode produzierte Sektor SB_1 8 ME und Sektor SB_2 6 ME.
Der Parameter k gibt die Veränderung in der Produktion an, die aufgrund neuer Produktionsverfahren zu erwarten ist. Es gilt $k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

c) Bestimmen Sie alle Werte, die der Parameter k im Sachzusammenhang annehmen kann.
Berechnen Sie den Parameter k so, dass beide Sektoren jeweils 3 ME an den Markt abgeben. (10 BE)

(Abitur 2013, Berufliches Gymnasium)

Lineare Algebra Aufgabe 2 **Lösungen Seite 107/108**

Der Markt für Anti-Schuppen-Shampoo wird von wenigen Herstellern beherrscht. Zwei konkurrierende Unternehmen Denkel und Brogta starten gleichzeitig aufwändige Werbeaktionen für ihr Produkt. Eine parallel dazu verlaufende Marktanalyse ergibt folgendes Kundenverhalten: 45 % der Denkel-Kunden halten dem Unternehmen die Treue, 25 % wechseln zu Brogta und 30 % kaufen ein Shampoo von anderen Herstellern;
20 % der Brogta-Kunden wechseln zu Denkel, genauso viele zu einem anderen Hersteller und der Rest sind Stammkunden von Brogta; 40 % der Kunden anderer Hersteller verbleiben bei diesen, 30 % wechseln zu Brogta und der Rest zu Denkel.

Die Marktuntersuchung liefert für den Monat März folgende Marktanteile:
Denkel: 25 %, Brogta: 30 %, andere Hersteller: 45 %

a) Stellen Sie das Käuferverhalten grafisch in einem Übergangsdiagramm und als Übergangsmatrix dar.

Die Werbeaktionen sollen über drei Monate durchgeführt werden. Berechnen Sie unter Berücksichtigung der Anfangsverteilung die Marktanteile nach den Werbeaktionen unter der Voraussetzung, dass die Kundenwanderung monatlich erfasst wird.

Beurteilen Sie den Erfolg der Werbemaßnahmen.

Sollte sich am Verbraucherverhalten nichts ändern, wird sich langfristig ein Gleichgewichtszustand ergeben. Ermitteln Sie den Fixvektor.

b) Durch weitere Marketingstrategien erzielen die Unternehmen Denkel und Brogta eine deutlich höhere Kundenbindung, so dass sich das Übergangsverhalten jetzt folgendermaßen darstellt:

von \ nach	Denkel	Brogta	Andere
Denkel	0,9	0	0,1
Brogta	0	0,8	0,2
Andere	0	0,5	0,5

Mehrere Monate nach Beginn der Marketingstrategien haben sich im Januar die Marktanteile $\vec{v}^{\,T}_{neu} = (0{,}3051 \quad 0{,}4068 \quad 0{,}2881)$ ergeben.

Ermitteln Sie die Marktanteile im Vormonat Dezember.

Untersuchen Sie die zukünftige langfristige Verteilung der Marktanteile.

Beurteilen Sie diese langfristige Entwicklung der Marktanteile unter Berücksichtigung der neuen Käuferwanderungen.

(Fachgymnasium Niedersachsen 2011.)

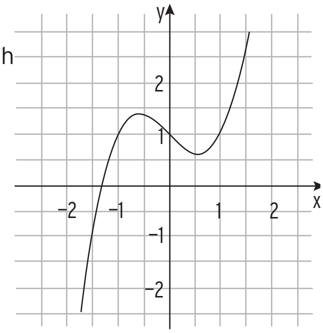
3 Zentralabitur eA Mathematik Berufliches Gymnasium

Zentralabitur eA 2015

Zentralabitur 2015 Pflichtteil eA

Lösungen Seite 131/132

Aufgabe P1



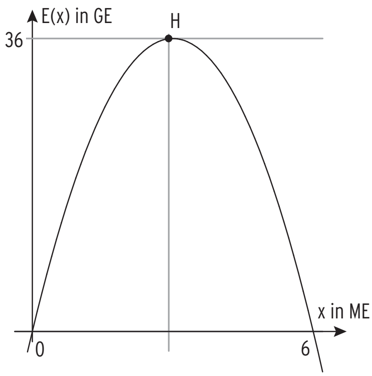
Gegeben sind die in ℝ definierten Funktionen f, g und h durch

$f(x) = x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 - x + 1$ und $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen. Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt. (3 BE)

b) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h′.
Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)dx$. (2 BE)

Aufgabe P2



a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt. (3 BE)

b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch. (3 BE)

Aufgabe P3

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben.

a) Geben Sie für die folgenden Ereignisse jeweils einen Term an, der die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Abhängigkeit von p beschreibt.
- Der Biathlet trifft bei genau vier Schüssen.
- Der Biathlet trifft nur bei den ersten beiden Schüssen. (3 BE)

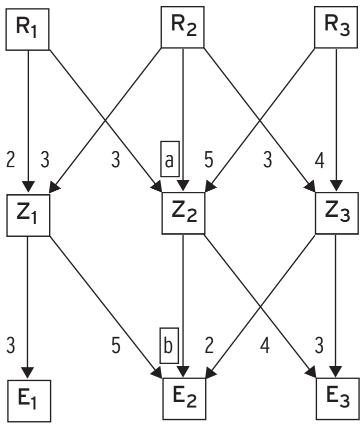
b) Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird. (2 BE)

Zentralabitur 2015 – Pflichtteil eA

Aufgabe P4

Ein Betrieb erzeugt aus den drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden.
Es gibt Werte für a und b, so dass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph
Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle
Anzahl der benötigten Mengeneinheiten der Rohstoffe je Mengeneinheit des Endprodukts

Rohstoff \ Endprodukt	E_1	E_2	E_3
R_1	6	16	12
R_2	6	24	25
R_3	0	18	32

a) Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch die Matrix A_{RZ}, der Zusammenhang Zwischenprodukt-Endprodukt durch eine Matrix B_{ZE} und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix C_{RE} beschrieben.
Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen an. (1 BE)

b) Bestimmen Sie die im Verflechtungsgraphen fehlenden Werte für a und b. (4 BE)

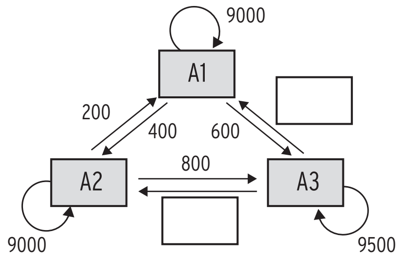
Zentralabitur 2015 – Pflichtteil eA

Aufgabe P 5

Zu einem bestimmten Zeitpunkt haben die drei Anbieter A1, A2 und A3 jeweils 10 000 Kunden. Die für das nächste Jahr zu erwartende Kundenwanderung zwischen diesen Anbietern wird durch die nebenstehende Übergangstabelle beschrieben.

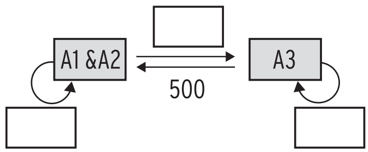
von \ nach	A1	A2	A3
A1	0,90	0,04	0,06
A2	0,02	0,90	0,08
A3	0,02	0,03	0,95

a) Vervollständigen Sie den nebenstehenden Übergangsgraphen zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres.
Geben Sie die Gesamtzahl der Kunden an, die innerhalb des nächsten Jahres den Anbieter wechseln. (2 BE)



b) Ausgehend von der Ausgangsverteilung von je 10 000 Kunden wird eine Fusion der Anbieter A1 und A2 zu einem Anbieter A1&A2 geplant.
Im Kundengeschäft behalten beide ihr bekanntes Profil bei, so dass angenommen werden kann, dass die Kundenwanderung im nächsten Jahr weiterhin wie in der obigen Übergangstabelle dargestellt abläuft.

Vervollständigen Sie den nebenstehenden Übergangsgraphen zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres unter Berücksichtigung der Fusion.



Vervollständigen Sie die nebenstehende Übergangstabelle zur Kundenwanderung innerhalb des nächsten Jahres unter Berücksichtigung der Fusion. (3 BE)

von \ nach	A1 &A2	A3
A1 &A2		
A3		0,95

Zentralabitur 2015 – Wahlteil eA

Lösungen Seite 133- 143

Rechnertyp: GTR/CAS

Block 1 Aufgabe 1A

Die WEISE-Zeitschriftengruppe gibt in regelmäßigen Zeitabständen Sonderhefte zu speziellen aktuellen Themen heraus. Die Hefte werden jeweils mit einer bestimmten Auflage gedruckt und danach direkt ab Lager verkauft.
Aus dem Verkauf vergangener Sonderhefte ist bekannt, dass sich der Produktlebenszyklus für den Absatz dieser Hefte mit der Funktion $a(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-0,2t}$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen lässt.
Die Zeit t wird in Zeiteinheiten (ZE) angegeben (1 ZE ≙ 1 Monat) und der Produktlebenszyklus a(t) wird in Mengeneinheiten (ME) pro ZE (ME/ZE) angegeben.
Eine ME entspricht dabei 10 000 Stück.

Das neue Sonderheft zum Thema „Apps für Android-Handys" ist am 1. März ($t = 0$) auf den Markt gekommen und kostet 10 Geldeinheiten (GE) pro Stück. Die Zeitschriftengruppe plant, ein Thema für ein neues Sonderheft dann aufzugreifen, wenn bei dem aktuellen Sonderheft der Absatzrückgang/ZE am stärksten ist. Vom Markt genommen wird ein Sonderheft normalerweise, wenn weniger als 2 ME/ZE verkauft werden oder wenn alle Exemplare verkauft sind, je nachdem, welcher Fall früher eintritt.

a) Die Unternehmensleiterin wünscht sich zunächst einen Überblick über den zu erwartenden Produktionszyklus des neuen Sonderheftes „Apps für Android-Handys":
Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem der größte monatliche Absatz zu erwarten ist, und geben Sie den Monat und die Höhe dieses Absatzes/ZE in Stück an.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem ein neues Sonderheft in Angriff genommen werden sollte, und geben Sie den Monat und die Höhe des Absatzrückgangs/ZE zu diesem Zeitpunkt an.
Ergänzen Sie den Graphen von a'(t) in der Abbildung 1 im **Materialanhang**.
Markieren Sie die beiden berechneten Punkte in der Abbildung 1.
Interpretieren Sie den Verlauf des Produktlebenszyklus a(t) aus ökonomischer Sicht mithilfe des Graphen in Abbildung 1 im **Materialanhang**. (16 BE)

b) Die Unternehmensleitung möchte wissen, wann dieses Sonderheft vom Markt genommen wird und welche finanziellen Auswirkungen sich daraus voraussichtlich ergeben werden:
Ermitteln Sie die Höhe des Gesamtumsatzes, auf den die Verlagsgruppe langfristig verzichtet, wenn sie bei einem Absatz von weniger als 2 ME/ZE das Sonderheft vom Markt nimmt.

Zentralabitur 2020 Mathematik Berufliches Gymnasium

Pflichtteil eA

Lösungen Seite 262/263

Aufgabe P1

Betrachtet wird die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Nullstelle von f an. (1 BE)

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion F mit $F(x) = (x - 1) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. (2 BE)

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und den Geraden zu $x = 0$ und $x = 1$ eingeschlossen wird. (2 BE)

Aufgabe P2

Gegeben sind die Funktionen f_a mit
$f_a(x) = a \cdot (x + 3) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) = a \cdot (x^3 + 3 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 27)$, $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Begründen Sie, dass jeder Graph von f_a die x-Achse einmal schneidet und ein weiteres Mal berührt. (2 BE)

b) Berechnen Sie den Parameterwert a so, dass die y-Koordinate des Tiefpunktes $-3{,}2$ beträgt. (3 BE)

Aufgabe P3

Überprüfungen in einer Kleinstadt haben gezeigt, dass ein Viertel der Radfahrenden keinen Helm trägt.

a) Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass unter 75 zufällig ausgewählten Radfahrenden genau 20 keinen Helm tragen. (2 BE)

b) Untersuchen Sie, wie viele Radfahrende man mindestens überprüfen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine radfahrende Person ohne Helm anzutreffen, größer als $\frac{1}{2}$ ist. (3 BE)

Zentralabitur 2020 Mathematik Berufliches Gymnasium

Pflichtteil eA

Aufgabe P4

Die beiden größten Stromanbieter A und B haben ein Internetportal damit beauftragt, das Wechselverhalten der Kunden auf dem Strommarkt zu analysieren. Die Ergebnisse der ausgewerteten Kundenwanderung sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

von \ nach	**Anbieter A**	**Anbieter B**	**Sonstige**
Anbieter A	a	0,3	b
Anbieter B	0,3	c	c
Sonstige	0,1	b	2a

Berechnen Sie die Werte für a, b und c, mit $a, b, c \geq 0$. (5 BE)

Aufgabe P5

Bei einer Insektenart werden aus Eiern Larven und aus den Larven Insekten.
In der nachstehenden Tabelle wird die Entwickung mit Hilfe der Anzahl an Eiern, Larven und Insekten in den ersten vier Monaten dargestellt.

Zeitpunkt	**Anzahl Eier**	**Anzahl Larven**	**Anzahl Insekten**
Start/Beginn	120	40	10
nach einem Monat	80	30	20
nach zwei Monaten	160	20	15
nach drei Monaten	120	40	10
nach vier Monaten	80	30	20

a) Zeigen Sie, dass für die Vermehrungsrate der Insekten der Wert 8 gilt.
Bestimmen Sie die Überlebensraten der Eier und der Larven. (3 BE)

b) Untersuchen Sie allgemein, wie sich die Population langfristig entwickeln kann. (3 BE)

Zentralabitur 2020 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS Lösungen Seite 264 - 272

Aufgabe 1A

Das Traditionsunternehmen ZEITMESSER möchte sein Geschäftsfeld um Smartwatches mit SIM-Karte erweitern. Eine Smartwatch mit SIM-Karte hat gegenüber einer Smartwatch ohne SIM-Karte den Vorteil, dass diese unabhängig vom Smartphone ist und nahezu alle Applikationen ohne Smartphone verwendet werden können. ZEITMESSER entwickelt hierfür das Modell E mit eingebauter SIM-Karte. Die Unternehmensleitung hat ein Marktforschungsunternehmen beauftragt, die voraussichtliche Absatzentwicklung zu prognostizieren, damit gegebenenfalls geeignete Werbemaßnahmen getroffen werden können.

a) Eine beauftragte Werbeagentur stellt der Unternehmensleitung zwei Werbepakete vor, wobei das Paket 2 einen höheren Werbeetat erfordert. Die Agentur unterstellt für die Durchführung der Werbemaßnahmen aus Paket 1 die Absatzfunktion a_1 mit $a_1(t) = g - a \cdot e^{k \cdot t}$, wobei zum Zeitpunkt t = 0 der anfängliche Absatz auf 6 000 ME/ZE und die Sättigungsgrenze auf 11 000 ME/ZE geschätzt werden. Der Absatz wird für das Ende der dritten Zeiteinheit mit $a_1(3) = 9\,285$ prognostiziert.
Bestimmen Sie die unbekannten Größen der Absatzfunktion a_1 und geben Sie die Gleichung der Absatzfunktion an.

Für das Paket 2 geht die Werbeagentur von der Absatzfunktion a_2 mit

$a_2(t) = 11000 - 5000 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}$ aus.
Die Unternehmensleitung ist bereit, den höheren Werbeetat für das Paket 2 zur Verfügung zu stellen, wenn mit diesen Werbemaßnahmen insgesamt mindestens 1 800 ME mehr abgesetzt werden können als mit Paket 1.

Formulieren Sie eine Handlungsempfehlung für die Unternehmensleitung. (14 BE)

Fortsetzung Aufgabe 1A b)

Zentralabitur 2020 Mathematik Berufliches Gymnasium

Wahlteil eA GTR/CAS

Fortsetzung Aufgabe 1A b)

b) Nachdem weitere Mitbewerber für Smartwatches mit eingebauter SIM-Karte auf den Markt getreten sind, stellt sich heraus, dass die Absatzentwicklung seit Markteinführung mit einem anderen Wachstumsmodell zu betrachten ist.
Im Weiteren wird davon ausgegangen, dass die Absatzentwicklung des Modells E mit Hilfe der Absatzfunktionenschar a_W mit $a_W(t) = w \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}$
modelliert werden kann. Dabei wird der Absatz $a_W(t)$ in ME/ZE, t in ZE seit Produkteinführung und der Parameter w für unterschiedliche Werbeetats mit $w \in \mathbb{R}_{>0}$ angegeben.
Beweisen Sie, dass der Zeitpunkt des größten momentanen Absatzes unabhängig vom Parameter w ist. Es genügt die Betrachtung der notwendigen Bedingung.

Im Folgenden wird für den Werbeetat w = 80 angenommen.
Bestimmen Sie, welcher Absatz mit dem Modell E insgesamt erzielt werden kann, wenn es nicht vom Markt genommen wird.
Die Unternehmensleitung möchte den Werbeetat verändern, wenn die größte momentane Absatzabnahme zu erwarten ist.
Untersuchen Sie, wann der Werbeetat verändert werden muss. (16 BE)

Lösungen Zentralabitur 2020 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Pflichtteil eA

Aufgabe P1

a) Die Nullstelle ist 0.

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (Satz vom Nullprodukt)

b) F ist Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$

$F'(x) = 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x = x \cdot e^x = f(x)$ Damit ist F eine Stammfunktion von f.

c) $A = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 0 - (-1) = 1$

Aufgabe P2

a) Am Term von f_a kann man die Nullstellen direkt ablesen (Linearfaktordarstellung).

Der Graph von f_a schneidet die x-Achse einmal bei $x = 3$ (einfache Nullstelle)

und berührt sie ein weiteres Mal bei $x = -3$ (doppelte Nullstelle).

b) $f_a'(x) = a \cdot (3x^2 + 6x - 9) = 0$

Umformung: $3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$

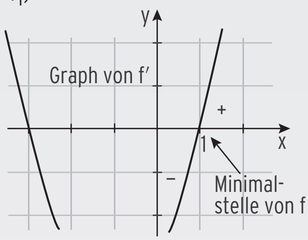
(oder auch mit Formel) liefert $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$. Wegen $a > 0$ liegt der

Tiefpunkt an der Stelle 1.

(Die Parabel mit $y = 3x^2 + 6x - 9$ (Steigungen von z.B. f_1)

schneidet die x-Achse in $x = 1$ mit VZW $-/+$)

Aus $f_a(1) = -32a = -3{,}2$ ergibt sich $a = 0{,}1$



Aufgabe P3

a) X: Anzahl der Radfahrenden ohne Helm

Binomialverteilung; X ist $n = 75$; $p = 0{,}25$ verteilt

$P(X = 20) = B(75; 0{,}25, 20) = \binom{75}{20} \cdot 0{,}25^{20} \cdot 0{,}75^{55}$ oder $\binom{75}{20} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{20} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{55}$

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass alle n überprüften Radfahrenden einen Helm tragen, soll kleiner gleich $\frac{1}{2}$ sein. X ist n, $p = 0{,}25$ verteilt

Also gilt: $P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{1}{2}$

Hinweis: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow P(X = 0) \leq \frac{1}{2}$

systematisches Probieren: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}$

Also müssen mindestens 3 Radfahrende überprüft werden.

Zentralabitur 2020 Mathematik Berufliches Gymnasium
Lösungen Pflichtteil eA

Aufgabe P4

LGS aufstellen

$a + 0{,}3 + b = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = 0{,}7 \qquad \text{I}$

$0{,}3 + 2c = 1 \quad \Rightarrow \quad 2c = 0{,}7 \qquad \text{II}$

$0{,}1 + b + 2a = 1 \quad \Rightarrow \quad 2a + b = 0{,}9 \qquad \text{III}$

Lösung des LGS: $c = 0{,}35$ (aus II)

III − II $a = 0{,}2$

Einsetzen ergibt $b = 0{,}5$

Aufgabe P5

a) Vermehrungsrate v : z.B. $\frac{\text{Anzahl Eier (Monat i + 1)}}{\text{Anzahl Insekten (Monat i)}} = \frac{80}{10} = 8$

Überlebensrate Eier a : z.B. $\frac{\text{Anzahl Larven (Monat i + 1)}}{\text{Anzahl Eier (Monat i)}} = \frac{30}{120} = 0{,}25$

Überlebensrate Larven b : z.B. $\frac{\text{Anzahl Insekten (Monat i + 1)}}{\text{Anzahl Larven (Monat i)}} = \frac{20}{40} = 0{,}5$

b) Zyklischer Prozess mit 3 Monaten

$a \cdot b \cdot v = 1$ Population bleibt stabil (zyklisch)

$a \cdot b \cdot v < 1$ Population stirbt aus

$a \cdot b \cdot v > 1$ Population steigt an

Zentralabitur 2020 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil eA Aufgabe 1A Seite 1/2

a) **Bestimmen der Größen und angeben der Gleichung der Absatzfunktion für Paket 1**

$a_1(t) = g - a \cdot e^{k \cdot t}$ mit $g = 11\,000$ und $a_1(0) = 6000$

Einsetzen ergibt $a = 5000$ ($e^0 = 1$) und damit $a_1(t) = 11000 - 5000 \cdot e^{k \cdot t}$

Mit $a_1(3) = 9\,285$ gilt $9\,285 = 11000 - 5000 \cdot e^{k \cdot 3} \Rightarrow 1715 = 5000 \cdot e^{k \cdot 3}$

$0{,}343 = e^{k \cdot 3} \Rightarrow 3k = \ln(0{,}343) \Rightarrow k = \frac{\ln(0{,}343)}{3} \approx -0{,}3567$

Gleichung der Absatzfunktion für das Paket 1: $a_1(t) = 11000 - 5000 \cdot e^{-0{,}3567 \cdot t}$

Formulieren einer Handlungsempfehlung

Gesamtabsatz für Paket 1: (Gesucht ist ein uneigentliches Integral.)

$$\int_0^\infty a_1(t)\,dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b a_1(t)\,dt \approx 2\,737\,500$$

Absatzfunktion a_2 für das Paket 2: $a_2(t) = 11000 - 5000 \cdot e^{-0{,}4 \cdot t}$

Gesamtabsatz für Paket 2 (Gesucht ist ein uneigentliches Integral.)

$$\int_0^\infty a_2(t)\,dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b a_2(t)\,dt \approx 2735\,982{,}6$$

Hinweis: Wegen COVID 19 werden uneigentliche Integrale im Abitur 2021 **nicht** abgefragt.

Absatzdifferenz

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b a_2(t)\,dt - \lim_{b \to \infty} \int_0^b a_1(t)\,dt \approx 1517{,}4 < 1800$$

Die Geschäftsleitung sollte das Paket 1 nutzen, da mit Paket 2 höchstens ca. 1 517 ME mehr abgesetzt werden können. Die Vorgabe von mindestens 1 800 ME kann mit Paket 2 nicht erfüllt werden.

Zentralabitur 2020 Mathematik Berufliches Gymnasium

Lösungen Wahlteil eA Aufgabe 1A Seite 2/2

b) **Zeitpunkt des größten momentanen Absatzes ist unabhängig vom Parameter w**

Notwendige Bed.: $a_w'(t) = 0$

Mit $a_w(t) = w \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}$ folgt

mit der Produkt- und Kettenregel: $a_w'(t) = 2w \cdot t \cdot e^{-0{,}08 \cdot t} + w \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t} \cdot (-0{,}08)$

$a_w'(t) = w \cdot (2 \cdot t - 0{,}08 \cdot t^2) \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}$

Die Lösungen von $a_W'(t) = 0$ sind unabhängig von w (w ist ein konstanter Faktor).

$a_W'(t) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot t - 0{,}08 \cdot t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \lor t = 25$

An der Stelle $t_1 = 0$ liegt eine Minimalstelle vor.

An der Stelle $t_2 = 25$ liegt die gesuchte Maximalstelle vor.

Der größte momentane Absatz ist unabhängig vom Parameter w.

Gesamtabsatz bestimmen

$a_{80}(t) = 80 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}$

Gesucht ist ein uneigentliches Integral: $\int_0^\infty a_{80}(t)\,dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b a_{80}(t)\,dt = 312\,500$

Der voraussichtliche Gesamtabsatz bei einem Werbeetat von w = 80 beträgt maximal 312 500 ME.

Hinweis: Berechnen Sie $\int_0^{500} a_{80}(t)\,dt = 312\,500$

Untersuchen des Zeitpunktes für Veränderung des Werbeetats

Bedingung für die größte momentane Absatzabnahme: $a_{80}''(t) = 0 \land a_{80}'''(t) > 0$

$a_{80}''(t) = 0$ für $t_1 \approx 7{,}32$; $t_2 \approx 42{,}68$ (mit GTR z.B. graphisch)

Zum Zeitpunkt $t_2 \approx 42{,}68$ ist die Absatzabnahme am größten und der Werbeetat muss zu diesem Zeitpunkt verändert werden. Zum Zeitpunkt $t_1 \approx 7{,}32$ ist die Absatzzunahme am größten und im Sachzusammenhang nicht zu betrachten.