2021

Abitur

Original-Prüf[...] mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Thüringen

Mathematik

+ Übungsaufgaben
+ Online-Glossar

ActiveBook
Interaktives Training

Original-Prüfungsaufgaben **2020** zum Download

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2019

Abiturprüfung 2020

www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

ActiveBook Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

www.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Dr. Hubert Langlotz, Wutha-Farnroda (Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Teil und CAS-Übungsaufgaben 6 bis 9; 2017: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B [Aufgabe 1] und C2; 2018: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 4], B [Aufgabe 2] und C2; 2019: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 4], B [Teilaufgaben a bis d] und C2; 2020: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 3], B [Teilaufgabe 2] und C2)
Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau (Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Teil und CAS-Übungsaufgaben 1 bis 5; 2017: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 6 bis 8], B [Aufgabe 2] und C1; 2018: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 5 bis 8], B [Aufgabe 1] und C1; 2019: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 5 bis 8], B [Teilaufgaben e bis h] und C1; 2020: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 4 bis 8], B [Teilaufgabe 1] und C1)

Vorwort

Liebe Abiturientinnen und Abiturienten,

dieses Buch hilft Ihnen, sich frühzeitig und umfassend auf die **Abiturprüfung 2021 im Kernfach Mathematik** der Oberstufe vorzubereiten. Dazu enthält es neben den **Prüfungsaufgaben der Jahre 2017 bis 2019** speziell auf die Struktur der Prüfung mit Computeralgebrasystem (CAS) abgestimmte **Übungsaufgaben** sowohl für den hilfsmittelfreien Pflichtteil wie für alle anderen Aufgaben. Diese Übungsaufgaben berücksichtigen die Vorgaben des neuen Lehrplans. Wenn Sie anhand dieser Aufgaben die Prüfungssituation „durchspielen", sollten Sie sich sowohl an der vorgegebenen Bearbeitungszeit orientieren als auch die Situation des „Auswählen-Müssens" von bestimmten Aufgaben berücksichtigen.

Die Bildschirmausdrucke im Lösungsteil wurden mit einem TI-NspireCX CAS erstellt. Sie sind aber in den meisten Fällen jeweils in annähernd gleicher Weise mit einem anderen CAS reproduzierbar. In vielen Fällen wurde die Möglichkeit genutzt, **alternative Lösungsvorschläge** darzustellen, die zum Teil die verschiedenen Möglichkeiten des digitalen Werkzeugs aufzeigen oder aber ganz ohne Hilfsmittel auskommen.

Weiter finden Sie zusätzliche **Hinweise und Tipps**, die zwischen den Aufgaben und Lösungen stehen und für jede Teilaufgabe ausgearbeitet sind. Diese liefern Denkanstöße zur Lösung und sind nach zunehmendem Grad der Hilfestellung geordnet. Sollten Sie bei einer Aufgabe also keinen eigenen Lösungsansatz finden, so lesen Sie zunächst den **ersten Tipp** zu der entsprechenden Teilaufgabe und verdecken die weiteren Tipps mit einem Blatt. Denken Sie über den Tipp nach und versuchen Sie nun selbst einen Ansatz zu schaffen. Sollten Sie gar nicht weiterkommen, dann lesen Sie den **nächsten Tipp** usw. Schlagen Sie in der Lösung erst nach, wenn Sie mit allen zu der Aufgabe gehörenden Tipps nicht weiterkommen. Im Lösungsteil werden zudem ausführliche **Hinweise** gegeben, die Ihnen die vorgerechnete **Lösung erläutern und erklären**, sodass Sie die Lösung selbstständig nachvollziehen und verstehen können. Bei der Lösungsdarstellung werden teilweise auch alternative Lösungswege aufgezeigt, damit Sie Ihre angefertigte Lösung korrigieren können und um zu zeigen, dass es oft eine Vielfalt von mathematischen Lösungsansätzen gibt.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2021 vom Ministerium für Bildung, Jugend und Sport bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
http://www.stark-verlag.de/mystark

Viel Erfolg!

Ihr Autorenteam

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Ablauf der Prüfung

Im Freistaat Thüringen gibt es im Kernfach Mathematik für Kurse mit erhöhtem Anforderungsniveau ein zentrales schriftliches Abitur. Die Aufgaben werden durch eine Abituraufgabenkommission erstellt, in der erfahrene Lehrerinnen und Lehrer mitarbeiten.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Im Zusammenhang mit der Einführung zentraler Bildungsstandards durch die Kultusministerkonferenz wird eine Angleichung der Lehrpläne und der Abiture in allen deutschen Bundesländern angestrebt. Deshalb wurde der Mathematiklehrplan für Gymnasien auch in Thüringen etwas verändert. Im Unterricht der Mathematik-Kurse mit erhöhtem Anforderungsniveau fällt die Wahl zwischen zwei Vertiefungsthemen Geometrie oder Stochastik weg. Es werden alle Themen behandelt und diese sind auch prüfungsrelevant. Allerdings wird in der Stochastik das Stoffgebiet „Testen von Hypothesen“ durch „Prognose- und Konfidenzintervalle“ ersetzt. Dieses ist dann auch prüfungsrelevant. Diese Umstände führen zu einer Veränderung des Mathematikabiturs in Thüringen. Die Abiturprüfung hat folgende Struktur:
Teil A: hilfsmittelfreier Teil aus allen Lernbereichen (40 BE)
Teil B: Analysis (40 BE)
Teil C1: Geometrie (25 BE), Stochastik (15 BE)
Teil C2: Stochastik (25 BE), Geometrie (15 BE)
Für den Prüfungsteil A ist ein Arbeitsblatt, das die Aufgaben sowie zu vervollständigende Koordinatensysteme und Platz für die Lösungen enthält, vorgesehen. Nur die Teile B und C1 bzw. C2 können mit CAS bearbeitet werden.
Alle Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer lösen alle Aufgaben der Prüfungsteile A und B. Nur im Prüfungsteil C kann zwischen C1 und C2 gewählt werden.
Die im Zusammenhang mit dem Abituraufgabenpool der Länder veröffentlichte Aufgabensammlung für Mathematik dient als Orientierung für die Weiterentwicklung der Aufgabenformate und Anforderungen in der Abiturprüfung in Thüringen. Sie finden sie im Internet unter: *https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik*

Dauer der Prüfung

Die Bearbeitungszeit beträgt 300 Minuten. Die Aufgaben aus dem Teil A sind von allen Prüfungsteilnehmern zu Beginn der Bearbeitungszeit zu lösen. Als Hilfsmittel sind nur Zeichengeräte zugelassen. Nachdem der Prüfungsteilnehmer die Lösungen für den Teil A abgegeben hat, werden die Wahlaufgaben aus den Teilen B und C mit den angegebenen Hilfsmitteln bearbeitet.

Zugelassene Hilfsmittel

In Teil A dürfen außer Zeichengeräten keine weiteren Hilfsmittel verwendet werden. In den Teilen B und C1 bzw. C2 kann die im Unterricht verwendete Formelsammlung sowie ein Taschenrechner und ein CAS verwendet werden. Dabei wird man sich an dem Gerät oder der Software orientieren, womit im vorangegangenen Unterricht gearbeitet wurde.

2 Inhalte und Schwerpunktthemen

Die verbindlichen Lehrplanvorgaben, nach denen in den vier Kurshalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen die inhaltlichen Anforderungen. Die Binomialverteilung einschließlich der Zwei-Sigma-Regel und deren Anwendungen spielen nach dem veränderten Lehrplan von 2018 eine größere Rolle.
Unter *https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=1392* finden Sie eine ausführliche Darstellung des weiterentwickelten Lehrplans für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik. Eine (nicht ganz vollständige) Übersicht über wichtige, abiturrelevante Kompetenzen dieses Lehrplans ist nachstehend aufgeführt.

Analysis – Sachkompetenz

Der Schüler kann

- die mittlere Änderungsrate auch in Sachzusammenhängen ermitteln und interpretieren,
- die Ableitung einer Funktion als lokale Änderungsrate und als Differenzialquotient beschreiben, erläutern und geometrisch als Tangentenanstieg interpretieren,
- die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen aus der Anschauung heraus deuten,
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitungsfunktion erkennen, begründen und darstellen,
- Ableitungen für Funktionen ermitteln, ohne Hilfsmittel für
  - Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten,
  - ganzrationale Funktionen (Summe von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten),
  - Exponentialfunktionen (Basis e),
  - Sinus-, Kosinusfunktionen und die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$,
  - Verknüpfungen und einfache Verkettungen dieser Funktionen,
- Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten, ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen (Basis e) sowie deren Verkettungen und Verknüpfungen auf Eigenschaften (Definitions- und Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Symmetrie bezüglich der y-Achse und des Koordinatenursprungs, Monotonie, Extrem- und Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen) untersuchen,
- von Funktionen
  - Eigenschaften ermitteln,
  - die Stetigkeit anschaulich erläutern,
  - waagerechte und senkrechte Asymptoten angeben,
  - Periodizität angeben,
- die natürliche Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ nutzen,
- eine Schar von Funktionen mit reellen Parametern auf Eigenschaften untersuchen,
- Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen ermitteln,
- Gleichungen von ganzrationalen Funktionen aus vorgegebenen Eigenschaften ermitteln,
- Extremwertprobleme lösen,

Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2017
Wahlaufgabe C2: Schwerpunkt Stochastik

1. In einer Zeitschrift wurde veröffentlicht, dass in Thüringen 36,30 % der Prüflinge die Führerscheinprüfung nicht bestehen.
   Nach: www.autobild.de (16. 11. 2016)

   In Thüringen melden sich 50 Teilnehmer eines Fahrschulkurses zur Prüfung an.
   Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung voraussichtlich nicht bestehen werden.

   a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
      A: = „Genau 30 Teilnehmer werden die Prüfung voraussichtlich bestehen.“
      B: = „Mindestens 30 Teilnehmer werden die Prüfung voraussichtlich bestehen.“ (4 BE)

   b) Die Anzahl der Teilnehmer, die die Prüfung nicht bestehen, weicht höchstens um die Standardabweichung vom Erwartungswert ab.
      Ermitteln Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit. (4 BE)

* Die Inhaberin einer Fahrschule ist sich sicher, dass die Durchfallquote ihrer Fahrschule niedriger als $p_0 = 36{,}30\ \%$ (H_0) ist. Dazu überprüft sie die Ergebnisse der letzten 100 Prüflinge. Sind darunter höchstens 30 Teilnehmer, die die Prüfung nicht bestanden haben, will sie davon ausgehen, dass in ihrer Fahrschule die Durchfallquote niedriger ist (H_1: $p_1 < 36{,}30\ \%$).

   c) Berechnen Sie den Fehler 1. Art. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Fehlers im Sachzusammenhang. (3 BE)

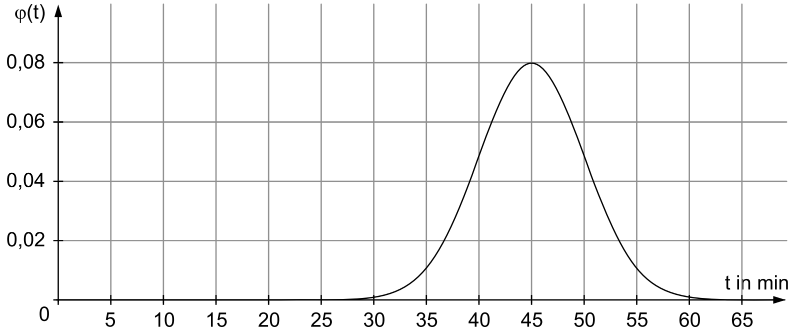
   d) Berechnen Sie den Fehler 2. Art für den Fall $p_1 = 25\ \%$.
      Untersuchen Sie die Entwicklung dieses Fehlers, wenn sich der Wert von p_1 dem Wert von p_0 nähert. (4 BE)

   e) Formulieren Sie eine neue Entscheidungsregel so, dass der Fehler 1. Art höchstens 5 % beträgt. (4 BE)

* Die Aufgabenteile c, d und e sind ab der Abiturprüfung 2021 nicht mehr relevant.

Es wird angenommen, dass die vom Teilnehmer benötigte Prüfungszeit normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 45$ Minuten und der Standardabweichung $\sigma = 5$ Minuten ist.

f) Dargestellt ist der Graph der entsprechenden Dichtefunktion.



Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion für $t \leq 40$ Minuten beträgt etwa 0,16 Flächeneinheiten.
Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang. (2 BE)

g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
C: = „Ein zufällig ausgewählter Prüfling benötigt genau 45 Minuten.“
D: = „Ein zufällig ausgewählter Prüfling benötigt höchstens 35 Minuten.“ (4 BE)

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $L(-1\,|\,0\,|\,3)$ und $M_k(k\,|\,k\,|\,k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben. Alle Punkte M_k liegen auf einer Geraden g.

a) Ermitteln Sie alle Werte von k so, dass der Abstand der Punkte L und M_k 5 Längeneinheiten beträgt. (3 BE)

b) Bestimmen Sie k so, dass L und M_k den minimalen Abstand besitzen.
Geben Sie diesen Abstand an. (5 BE)

c) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels von g mit der xy-Ebene. (3 BE)

d) Der Punkt L wird an der Geraden g gespiegelt.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Bildpunktes L'. (4 BE)

(40 BE)

Hinweise und Tipps

Aufgabe 1 a

Wahrscheinlichkeiten berechnen

- Überlegen Sie, ob die in der Angabe beschriebene Zufallsgröße X hier von Nutzen ist. Definieren Sie ggf. eine weitere Zufallsgröße.
- Entnehmen Sie dem Text die Anzahl der Versuche n sowie die Trefferwahrscheinlichkeit p.
- Beachten Sie den Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten für das Bestehen und das Nichtbestehen der Fahrschulprüfung.
- Nutzen Sie die Befehle, die das CAS bietet.

Aufgabe 1 b

Wahrscheinlichkeit berechnen

- Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ für die binomialverteilte Zufallsgröße X.
- Bestimmen Sie die untere Grenze u und die obere Grenze o des gesuchten Intervalls, um $P(u \le X \le o)$ zu berechnen.
- Berücksichtigen Sie, dass die Grenzen ganze Zahlen sind.
- *Variante:* Nutzen Sie zur Beantwortung der Frage die Sigma-Regeln. Begründen Sie zunächst, warum diese angewendet werden dürfen.

Aufgabe 1 c

Berechnung des Fehlers 1. Art

- Notieren Sie die beiden Hypothesen, den Umfang der Stichprobe und die Entscheidungsregel.
- Der Fehler 1. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist.
- Beachten Sie, dass es sich um einen linksseitigen Test handelt und somit $P(X \le g)$ berechnet werden muss.

Bedeutung des Fehlers 1. Art

- Stellen Sie die Aussage der Nullhypothese der Schlussfolgerung aus dem Stichprobenergebnis gegenüber.

Aufgabe 1 d

Fehler 2. Art

- Ein Fehler 2. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese aufgrund des Stichprobenergebnisses akzeptiert wird, obwohl sie falsch ist, also die Alternativhypothese zutrifft.
- Verwenden Sie zur Berechnung des Fehlers 2. Art den Nichtverwerfungsbereich der Nullhypothese und die gegebene Wahrscheinlichkeit $p_1 = 25\,\%$.
- Verwenden Sie mindestens 3 unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p_i mit $p_1 < p_i < p_0$ für die Durchfallquote, um die *Entwicklung des Fehlers 2. Art* beurteilen zu können.

Aufgabe 1 e

Neue Entscheidungsregel

- Es ist üblich, hier die größte ganze Zahl g anzugeben, für die gilt: $P(X \le g) \le 0{,}05$
- Ermitteln Sie die Lösung durch systematisches Probieren mithilfe Ihres CAS-Rechners. (*Variante:* Nutzen Sie den invBinom()-Befehl Ihres CAS.)

- Zur Entscheidungsregel gehören die Null- und die Gegenhypothese, Annahme- und Verwerfungsbereich sowie der Stichprobenumfang.

Aufgabe 1 f

Normalverteilung

- Markieren Sie den beschriebenen Bereich im Diagramm und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

Aufgabe 1 g

Wahrscheinlichkeiten berechnen

- Nutzen Sie zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten die Befehle des CAS-Rechners. Beachten Sie dabei die Reihenfolge der Parameter für den jeweiligen Befehl.
- Berücksichtigen Sie, dass für stetige Zufallsgrößen Wahrscheinlichkeiten nur für Intervalle berechnet werden können. Wählen Sie für P(C) und P(D) sinnvolle Intervalle.

Aufgabe 2 a

Werte von k

- Der Abstand von Punkt L zu Punkt M_k entspricht dem Betrag eines Vektors $\overrightarrow{LM_k}$. Nutzen Sie zur Berechnung des Abstandes den entsprechenden Befehl des CAS-Rechners oder wenden Sie den (dreidimensionalen) Satz des Pythagoras an.

Aufgabe 2 b

Minimaler Abstand

- Stellen Sie für den Abstand $\left|\overrightarrow{LM_k}\right|$ einen Funktionsterm d(k) auf, verwenden Sie ggf. den Term aus Teilaufgabe a.
- Da der minimale Abstand gesucht ist, kann man d(k) auf lokale Extremstellen untersuchen.
- Berechnen Sie den minimalen Abstand, indem Sie den gefundenen Wert in d(k) einsetzen.
- *Variante:* Benutzen Sie den CAS-Befehl fMin.

Aufgabe 2 c

Schnittwinkel

- Um den Schnittwinkel zwischen der Geraden und der xy-Ebene zu berechnen, benötigt man einen Richtungsvektor $\vec{a}$ der Geraden g und einen Normalenvektor $\vec{n}$ der xy-Ebene.
- Der gesuchte Winkel ergibt sich aus $\sin\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$.

Variante (Schnittwinkel)

- Da der Schnittwinkel der Geraden g mit der xy-Ebene gesucht ist, kann man ein Dreieck bestimmen, welches sich aus einem Richtungsvektor von g und der Projektion dieses Vektors in die xy-Ebene aufbaut.
- Der gesuchte Winkel kann elementargeometrisch mithilfe trigonometrischer Funktionen bestimmt werden.

Aufgabe 2 d

Geradenspiegelung

- Berechnen Sie zunächst die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes auf g durch L.
- Überlegen Sie, wie das Ergebnis aus Teilaufgabe b dazu benutzt werden kann.
- Die Koordinaten des Punktes L' erhält man dann mit $\overrightarrow{OL'} = \overrightarrow{OL} + 2 \cdot \overrightarrow{LF}$.

Lösungen

1. a) **Wahrscheinlichkeiten berechnen**

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung voraussichtlich **nicht** bestehen werden. X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = 0{,}363$.

Es kann eine weitere Zufallsgröße definiert werden:
Die Zufallsgröße Y beschreibe die Anzahl der Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung voraussichtlich bestehen werden. Y ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $q = 1 - p = 1 - 0{,}363 = 0{,}637$.

Für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B ergibt sich dann:

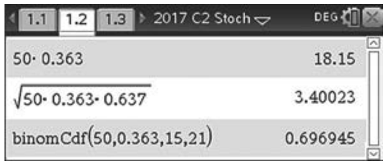
$$P(A) = P(Y = 30) = B_{50;\,0{,}637}(Y = 30) \approx \underline{\underline{0{,}0990}}$$

$$P(B) = P(Y \geq 30) = B_{50;\,0{,}637}(Y \geq 30) \approx \underline{\underline{0{,}7573}}$$

b) **Wahrscheinlichkeit berechnen**

Der Erwartungswert der Zufallsgröße X ist:
$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}363 = 18{,}15$

Die Standardabweichung beträgt:
$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}363 \cdot 0{,}637} \approx 3{,}4$



Das gesuchte Intervall berechnet sich mit
$18{,}15 - 3{,}4 = 14{,}75$ und $18{,}15 + 3{,}4 = 21{,}55$.

Da X ganzzahlig sein muss, ergibt sich das Intervall [15; 21].
Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:
$P(C) = P(15 \leq X \leq 21) = B_{50;\,0{,}363}(15 \leq X \leq 21) \approx \underline{\underline{0{,}6969}}$

Variante: Nutzung der Sigma-Regel
Da die Laplace-Bedingung $\sigma \approx 3{,}4 > 3$ erfüllt ist, kann die Sigma-Regel für die einfache Sigma-Umgebung genutzt werden:
68,3 % der Werte von X liegen im Intervall $[\mu - \sigma;\, \mu + \sigma]$.

c) **Berechnung des Fehlers 1. Art**

Die Inhaberin der Fahrschule führt einen linksseitigen Signifikanztest mit der Nullhypothese H_0: $p = 0{,}363$ (auch $p \geq 0{,}363$ ist möglich) und der Alternativhypothese H_1: $p < 0{,}363$ durch. Der Umfang der Stichprobe ist $n = 100$. Der Bereich, in dem sie die Nullhypothese verwerfen will, ist angegeben durch $V = \{0;\, 1;\, \ldots;\, 30\}$.

Der Fehler 1. Art (α-Fehler) besteht darin, die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie in Wirklichkeit stimmt.
$\alpha = B_{100;\,0{,}363}(\{0; 1; \ldots; 30\}) \approx \underline{\underline{0{,}1129}}$

Bedeutung des Fehlers 1. Art

Da man bei gültiger Nullhypothese und einem zufälligen Stichprobenergebnis im Verwerfungsbereich die wahre Nullhypothese verwirft, würde man im gegebenen Sachzusammenhang irrtümlich davon ausgehen, dass in dieser Fahrschule die Durchfallquote niedriger als in Thüringen ist, obwohl sie tatsächlich genauso hoch wie in Thüringen ist.

d) **Fehler 2. Art**
Wenn die Nullhypothese akzeptiert wird, obwohl sie falsch ist, spricht man vom Fehler 2. Art oder β-Fehler. Im vorliegenden Fall heißt dies, das zufällige Ergebnis der untersuchten Stichprobe liegt im Intervall $\overline{V} = \{31; 32; \ldots; 100\}$, $\overline{V}$ ist der Nichtverwerfungsbereich der Nullhypothese.

Mit dem gegebenen Wert $p_1 = 0{,}25$ erhält man:

$\beta = B_{100;\,0{,}25}(\{31; 32; \ldots; 100\}) \approx \underline{\underline{0{,}1038}}$

Entwicklung des Fehlers 2. Art
Anhand von mehreren Beispielen, die schnell mithilfe des CAS-Rechner berechnet werden können, erkennt man sofort, dass sich der β-Fehler vergrößert, je näher man von „links“ mit p_1 an p_0 heranrückt.

e) **Neue Entscheidungsregel**
Damit der Fehler 1. Art höchstens 5 % beträgt, muss beim linksseitigen Test der Verwerfungsbereich $V = \{0; 1; \ldots; k\}$ so gewählt werden, dass gilt:

$P(X \le k) = B_{100;\,0{,}363}(\{0; 1; \ldots; k\}) \le 0{,}05$

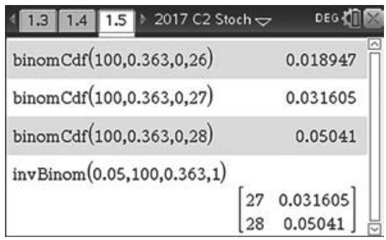
Die gesuchte Grenze k können Sie durch systematisches Probieren finden:

$P(X \le 26) = B_{100;\,0{,}363}\{0; 1; \ldots; 26\})$
$\approx 0{,}0189$

$P(X \le 27) = B_{100;\,0{,}363}(\{0; 1; \ldots; 27\})$
$\approx 0{,}0316$

$P(X \le 28) = B_{100;\,0{,}363}(\{0; 1; \ldots; 28\})$
$\approx 0{,}0504$

Es ergibt sich $k = 27$.



Variante:
Die Grenze des Verwerfungsbereichs kann auch direkt mit dem invBinom()-Befehl berechnet werden.

Die neue Entscheidungsregel lautet damit:
Sind unter den 100 Prüflingen höchstens 27 Teilnehmer, die die Prüfung nicht bestanden haben, so kann die Inhaberin darauf schließen, dass in ihrer Fahrschule die Durchfallquote niedriger als 36,3 % ist. Andernfalls sieht sie die Durchfallquote von 36,3 % als bestätigt an.

Hinweis:
Es ist auch eine Ermittlung der neuen Entscheidungsregel unter Verwendung der Sigma-Regeln denkbar.

Mit $\mu = 100 \cdot 0{,}363 = 36{,}3$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}363 \cdot 0{,}637} \approx 4{,}8$ (damit ist auch die Laplace-Bedingung erfüllt) ergibt sich für die Berechnung der Intervallgrenze:
$36{,}3 - 1{,}64 \cdot 4{,}8 \approx 28{,}4$

Die neue Entscheidungsregel würde somit lauten:
Sind unter den 100 überprüften Prüflingen höchstens 28 Teilnehmer, die die Prüfung nicht bestanden haben, so sollte die Inhaberin darauf schließen, dass in ihrer Fahrschule die Durchfallquote niedriger als 36,3 % ist. Andernfalls kann sie eine Durchfallquote von 36,3 % nicht verwerfen.