

Inhalt

Vorwort	v
Einführung	1
0.1 Was ist Algebra?	1
0.2 Gruppen, Ringe, Körper	2
0.3 Leitfaden	4
1 Ringe und Teilbarkeit	5
1.1 Einführung	5
1.2 Ganze Zahlen und Kongruenzen	10
1.3 Irreduzible und prime Elemente	17
1.4 Polynome	20
1.5 <i>Exkurs:</i> Monoid-Algebren	22
1.6 Der euklidische Algorithmus	24
1.7 <i>Exkurs:</i> Das RSA-Kryptosystem	27
1.8 Lineare Gleichungssysteme	29
1.9 Übungsaufgaben zu Kapitel 1	33
2 Homomorphismen und Ideale	37
2.1 Ringhomomorphismen	37
2.2 Ideale	39
2.3 Faktorringe und Homomorphiesätze	43
2.4 <i>Exkurs:</i> Allgemeine Form des chinesischen Restsatzes	47
2.5 <i>Exkurs:</i> Ideale in Zahlbereichen	49
2.6 <i>Exkurs:</i> Das Zornsche Lemma und maximale Ideale	50
2.7 Körper und Quotientenkörper	51
2.8 Übungsaufgaben zu Kapitel 2	55
3 Gruppen	59
3.1 Einführung	60
3.2 Permutationen und die symmetrische Gruppe	63
3.3 Untergruppen und Nebenklassen	65
3.4 <i>Exkurs:</i> Freie Gruppen und Cayley-Graphen	71
3.5 Homomorphismen	73
3.6 Normalteiler	77
3.7 Faktorgruppen und Homomorphiesätze	81
3.8 Zyklische und abelsche Gruppen	86
3.9 <i>Exkurs:</i> Erzeuger und Relationen	90
3.10 <i>Exkurs:</i> Zyklische Untergruppen und Periodizität	92
3.11 Übungsaufgaben zu Kapitel 3	93
4 Operationen und Struktur von Gruppen	97
4.1 Bahnen, Fixpunkte und Stabilisatoren	97
4.2 Bahnen zählen	100
4.3 <i>Exkurs:</i> Symmetrien der platonischen Körper	102
4.4 Gruppen von Primpotenzordnung	104
4.5 <i>Exkurs:</i> Semidirekte Produkte	109
4.6 <i>Exkurs:</i> Die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen	112
4.7 Übungsaufgaben zu Kapitel 4	113

5	Polynome	117
5.1	Nullstellen	117
5.2	Irreduzible Polynome	119
5.3	Exkurs: Symmetrische Polynome und symbolische Nullstellen	123
5.4	Exkurs: Faktorialität von Polynomringen	125
5.5	Übungsaufgaben zu Kapitel 5	127
6	Zahlentheorie	129
6.1	Quadratische Reziprozität	129
6.2	Pythagoreische Tripel und die Fermatsche Vermutung	136
6.3	Exkurs: Diophantische Gleichungen	140
6.4	Übungsaufgaben zu Kapitel 6	142
7	Algebraische Körpererweiterungen	143
7.1	Einführung	143
7.2	Exkurs: Algebraische und transzendente Zahlen	148
7.3	Eigenschaften endlicher Körpererweiterungen	150
7.4	Nullstellenkörper	152
7.5	Zerfallungskörper	155
7.6	Exkurs: Der algebraische Abschluss	159
7.7	Endliche Körper	160
7.8	Der Satz vom primitiven Element	162
7.9	Exkurs: Separable Körpererweiterungen	165
7.10	Übungsaufgaben zu Kapitel 7	167
8	Galoistheorie	171
8.1	Galoiserweiterungen und die Galoisgruppe	171
8.2	Exkurs: Einbettungen von Körpererweiterungen	175
8.3	Kreisteilungskörper	177
8.4	Der Hauptsatz der Galoistheorie	180
8.5	Der Fundamentalsatz der Algebra	183
8.6	Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen	184
8.7	Exkurs: Mehr über Auflösbarkeit	189
8.8	Übungsaufgaben zu Kapitel 8	195
9	Moduln	199
9.1	Moduln	199
9.2	Freie Moduln, Basen und Erzeugende	203
9.3	Exkurs: Exakte Sequenzen	206
9.4	Matrizen und Determinanten	209
9.5	Moduln über Hauptidealringen	212
9.6	Moduln über Polynomringen in einer Variablen	218
9.7	Noethersche Ringe und der Hilbertsche Basissatz	221
9.8	Übungsaufgaben zu Kapitel 9	224
	Literatur	229
	Bildnachweis	231
	Personenverzeichnis	233
	Index	235