

# Berufliches Gymnasium

Original-Prüfungsaufgaben

**MEHR  
ERFAHREN**

Fachbereich Wirtschaft und Technik (FHT) / Fachbereich Wirtschaft (FBW)

## Mathematik

- + Übungsaufgaben zu den Schwerpunktthemen
- + CAS-Abitur als PDF

**PDF**



**STARK**

# Inhalt

Vorwort	
Stichwortverzeichnis	

## Hinweise und Tipps zum Abitur

---

1	Ablauf der Prüfung .....	I
2	Inhalte und Schwerpunktthemen 2021 .....	III
3	Leistungsanforderung und Bewertung .....	VII
4	Operatoren .....	IX
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung .....	XIII
6	Hinweise zum Lösen mit dem GTR bzw. CAS .....	XIV

## Übungsaufgaben für den Aufgabenteil A

---

### Grundkurs

Analysis .....	1
Lineare Algebra .....	9
Stochastik .....	15

### Leistungskurs

Analysis .....	22
Lineare Algebra .....	33
Stochastik .....	41

## Übungsaufgaben für den Aufgabenteil B

---

### Analysis

Übungsaufgabe 1: Edelstahlgefäße .....	51
Übungsaufgabe 2: Fahrräder .....	58
Übungsaufgabe 3: Navigationssysteme .....	65
Übungsaufgabe 4: Zaunelemente .....	73
Übungsaufgabe 5: Sicherheitsrahmen .....	79
Übungsaufgabe 6: Elektrogitarren .....	85
Übungsaufgabe 7: Sekundenkleber .....	91

## **Lineare Algebra**

Übungsaufgabe 1:	Schrauben .....	95
Übungsaufgabe 2:	Lago .....	101
Übungsaufgabe 3:	Fertiggaragen .....	108
Übungsaufgabe 4:	Osternester .....	115
Übungsaufgabe 5:	Möbelfabrik .....	122

## **Stochastik**

Übungsaufgabe 1:	Koffer .....	130
Übungsaufgabe 2:	Nakio .....	135
Übungsaufgabe 3:	Steuerelemente .....	141

## **Zentrale Abitur-Prüfungsaufgaben**

---

### **Abiturprüfung Grundkurs 2018**

Aufgabe 1: ohne Hilfsmittel .....	GK 2018-1
Aufgabe 2: Analysis .....	GK 2018-6
Aufgabe 3: Lineare Algebra .....	GK 2018-13
Aufgabe 4: Stochastik .....	GK 2018-19

### **Abiturprüfung Leistungskurs 2018**

Aufgabe 1: ohne Hilfsmittel .....	LK 2018-1
Aufgabe 2: Analysis .....	LK 2018-8
Aufgabe 3: Stochastik .....	LK 2018-15
Aufgabe 4: Lineare Algebra .....	LK 2018-24

### **Abiturprüfung Grundkurs 2019**

Aufgabe 1: ohne Hilfsmittel .....	GK 2019-1
Aufgabe 2: Analysis .....	GK 2019-9
Aufgabe 3: Stochastik .....	GK 2019-18
Aufgabe 4: Lineare Algebra .....	GK 2019-24

### **Abiturprüfung Leistungskurs 2019**

Aufgabe 1: ohne Hilfsmittel .....	LK 2019-1
Aufgabe 2: Analysis .....	LK 2019-10
Aufgabe 3: Lineare Algebra .....	LK 2019-18
Aufgabe 4: Stochastik .....	LK 2019-26



Als PDF zum Download stehen Ihnen auf [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark) (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite) eine Probeklausur für den Aufgabenteil B mit CAS im Leistungskurs und die Original-Prüfungsaufgaben für Grund- und Leistungskurs der Jahre 2013 bis 2017 ohne CAS bzw. mit GTR sowie der Jahre 2013 bis 2019 mit CAS zur Verfügung.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Unter [www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/](http://www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/) finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.



Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen im Abitur vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark) (Zugangscode vgl. Umschlaginnenseite).

#### **Autoren der Übungsaufgaben und Lösungen der Abituraufgaben:**

---

- 2013: Andreas Höing (Paul-Spiegel-Berufskolleg, Dorsten);  
Hubertus Schulte Huxel (Paul-Spiegel-Berufskolleg, Dorsten)
- 2014, 2015: Andreas Berg (Berufskolleg Kaufmännische Schulen Düren); Anja Esser  
(Städtisches Berufskolleg Wirtschaft und Verwaltung, Leverkusen)
- ab 2016: Andreas Berg (Berufskolleg Kaufmännische Schulen Düren)



# Vorwort

**Liebe Schülerin, lieber Schüler,**

Sie haben Mathematik als Grund- oder Leistungskurs gewählt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung an einem Beruflichen Gymnasium in NRW abzulegen. Dieses Buch hilft Ihnen, sich gezielt und effektiv auf die zentralen Abschlussprüfungen in Grund- und Leistungskurs vorzubereiten:

- Im ersten Teil finden Sie zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnisse für die gezielte Vorbereitung hilfreich und wichtig sind. Dazu gehören die **Hinweise zum Ablauf der Prüfung** und der **Bewertung**, vor allem aber die **Schwerpunkthemen für 2021** und die inhaltlichen Tipps.
- Seit dem Abitur 2017 besteht die schriftliche Abiturprüfung aus zwei Aufgabenteilen: dem Aufgabenteil A (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) sowie dem Aufgabenteil B (Bearbeitung mit Hilfsmitteln). In diesem Buch finden Sie **Übungsaufgaben** zu diesen beiden Aufgabenteilen, sowohl für den **Grundkurs als auch für den Leistungskurs**. Im Übungsteil zum Aufgabenteil B sind diese jeweils direkt bei der Aufgabenstellung entsprechend gekennzeichnet. Die Aufgaben sind auf den Stil und die Form der Prüfungsaufgaben abgestimmt. Der Schwierigkeitsgrad entspricht dem der Prüfungsaufgaben.
- Vom Schulministerium veröffentlichte Beispielaufgaben für den Aufgabenteil A finden Sie unter: [www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/upload/abitur-bk/Ergaenzende\\_Handreichung\\_zum\\_Fach\\_Mathematik.pdf](http://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/upload/abitur-bk/Ergaenzende_Handreichung_zum_Fach_Mathematik.pdf)
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band bzw. als PDF zum Download die vollständigen **Original-Abituraufgaben von 2013 bis 2019** sowie deren Lösungen. Damit können Sie sich ein genaueres Bild davon machen, wie die Prüfungen bisher ausgesehen haben. Als PDF zum Download steht Ihnen außerdem eine Probeklausur für den Aufgabenteil B der Prüfung mit CAS im Leistungskurs zur Verfügung.
- Sämtliche Aufgaben im Buch enthalten **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge**. Zu allen Aufgaben, die mit Hilfsmitteln zu bearbeiten sind, gibt es **separate Tipps zum Lösungsansatz**, die das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Teilweise fließen Hintergrundinformationen ein, die für das jeweilige Verständnis der Anwendungssituation hilfreich sind. In jedem Fall sollten Sie die Tipps und Hinweise zu einer Aufgabe nach der Bearbeitung abschließend durchdenken.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Die Autoren



# Hinweise und Tipps zum Abitur

## 1 Ablauf der Prüfung

---

### Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

An den Beruflichen Gymnasien in NRW werden seit dem Schuljahr 2007/08 zentrale Abiturprüfungen sukzessive eingeführt. Im Leistungskurs Mathematik wird die Abschlussklausur seit dem Schuljahr 2008/09 und im Grundkurs seit 2009/10 zentral gestellt. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Weiterbildung von einer Fachkommission erstellt, die als Grundlage hierfür Aufgabenvorschläge ausgewählter Mathematiklehrer nutzt. Diese richten sich nach den für das jeweilige Jahr gültigen inhaltlichen Schwerpunkten (siehe 2), die während der Qualifikationsphase (12. und 13. Klasse) erarbeitet werden. Durch die Schwerpunktsetzung soll gesichert sein, dass alle Schülerinnen und Schüler über die gleichen inhaltlichen Voraussetzungen verfügen.

### Aufbau der Prüfungsaufgaben

Seit dem Schuljahr 2014/15 ist ab der Jahrgangsstufe 11 der verpflichtende Einsatz grafikfähiger Taschenrechner (GTR oder CAS) vorgesehen. Aus diesem Grund besteht die Abiturprüfung im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung seit dem Jahr 2017 aus insgesamt vier Aufgaben, gegliedert in **zwei Aufgabenteile**.

**Aufgabenteil A** (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) enthält jeweils Teilaufgaben zur Analysis, Linearen Algebra und Stochastik. Er besteht dabei aus einer Aufgabe mit vier Teilaufgaben (Leistungskurs) bzw. drei Teilaufgaben (Grundkurs), die jeweils voneinander unabhängig lösbar sind. Im Leistungskurs sind zwei der vier Teilaufgaben der Analysis zugeordnet.

**Aufgabenteil B** (Bearbeitung mit Hilfsmitteln) enthält jeweils eine Aufgabe zu den oben genannten drei Teilgebieten, wobei jede Aufgabe in Teilaufgaben gegliedert ist. Für die Abiturprüfung im **Grundkurs** erhält die Schule, unabhängig von der jeweils verwendeten Rechnertechnologie, einen einzigen Aufgabensatz, für die im **Leistungskurs** erhält sie insgesamt zwei Aufgabensätze, die sich jeweils durch die Art der verwendeten Rechnertechnologie unterscheiden: den Aufgabensatz 1 (GTR) und den Aufgabensatz 2 (CAS). Im Leistungskurs ist der Aufgabenteil A für die beiden Aufgabensätze identisch.

Die Schule muss zu Beginn der Qualifikationsphase festlegen, welche der zwei Technologiekategorien angewendet werden soll. Durch diese Entscheidung wird ein Aufgabensatz für die Prüfungsgruppe festgelegt. Es findet keine Aufgabenauswahl durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer statt. Die Prüflinge haben ebenfalls keine Auswahlmöglichkeit.



## Durchführung der Abschlussklausur

Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt **180 Minuten (Grundkurs)** bzw. **255 Minuten (Leistungskurs)**. Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Bearbeitungszeit beide Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel werden zu diesem Zeitpunkt **noch nicht** ausgegeben.

Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung, jedoch nach spätestens 35 Minuten (GK) bzw. 50 Minuten (LK) der Bearbeitungszeit, ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln.

### Zugelassene Hilfsmittel

- Seit dem Abitur 2017 sind für alle Prüflinge grafikfähige Taschenrechner (GTR) bzw. Computeralgebrasysteme (CAS) zugelassen.
- Zur Bearbeitung des Aufgabenteils A sind keine Hilfsmittel zugelassen, beispielsweise auch keine Formelsammlungen.
- Zur Bearbeitung des Aufgabenteils B sind **im Grundkurs** grafikfähige Taschenrechner (GTR) *oder* computeralgebrafähige Taschencomputer bzw. Computeralgebrasysteme auf einem PC zugelassen. Die Aufgaben werden dabei so gestaltet, dass bei der Nutzung eines Computeralgebrasystems (CAS) kein wesentlicher Vorteil gegenüber der Nutzung eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) entsteht. Zur Bearbeitung des Aufgabenteils B sind **im Leistungskurs** grafikfähige Taschenrechner (GTR) für den Aufgabensatz 1 *bzw.* Computeralgebrasysteme für den Aufgabensatz 2 zugelassen.
- Zur Bearbeitung des Aufgabenteils B sind ferner gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage (ohne Beispielaufgaben) zugelassen.

Der eingesetzte GTR soll über die Funktionalitäten gemäß <https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/gtr/gtr.php> verfügen.

Das eingesetzte CAS soll mindestens folgende Funktionen umfassen:

- algebraische Ausdrücke vereinfachen und vergleichen
- Gleichungen symbolisch und numerisch lösen
- lineare Gleichungssysteme lösen und Matrizenberechnungen durchführen
- Funktionen symbolisch und numerisch differenzieren und integrieren
- Funktionen und Daten zweidimensional grafisch darstellen
- Werte der Binomialverteilung und Normalverteilung bestimmen

## 2 Inhalte und Schwerpunktthemen 2021

Die inhaltlichen **Schwerpunkte für den Grundkurs Mathematik** in der Abiturprüfung 2021 sind in der Tabelle angeführt. Zu den Schwerpunkten werden Übungsaufgaben und Original-Abituraufgaben aufgelistet, die Beispiele enthalten.

Schwerpunkte für den GK Mathematik im Abitur 2021	Beispiele
<b>Analysis</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>ganzrationale Funktionen <ul style="list-style-type: none"> <li>Ableitungs- und Integrationsregeln</li> <li>globale und lokale Eigenschaften</li> <li>Herleitung von Funktionsgleichungen aus vorgegebenen Bedingungen</li> </ul> </li> <li>Exponentialfunktionen <ul style="list-style-type: none"> <li>Funktionen der Form <math>f(x) = p(x) \cdot e^{k \cdot x}</math> mit <math>k \in \mathbb{R}</math> und <math>p</math> ganzrational</li> <li>Ableitungsregeln</li> <li>globale und lokale Eigenschaften</li> <li>bestimmte Integrale mit GTR/CAS</li> </ul> </li> <li>ökonomische Anwendungen <ul style="list-style-type: none"> <li>Eigenschaften ertragsgesetzlicher Kostenfunktionen</li> <li>Modell der vollständigen Konkurrenz (inklusive Betriebsminimum und Betriebsoptimum)</li> <li>Produzenten- und Konsumentenrente</li> <li>Absatz-/Umsatzentwicklung</li> <li>weitere Anwendungen mit entsprechender Begriffsklärung in der Aufgabenstellung, z. B. Abschöpfen der Konsumentenrente durch Preisdifferenzierung, Steuern als Integral des Steuersatzes, ...</li> </ul> </li> </ul>	<p>Übung A4, B1, B2, B4, B5, B6; GK 18: 2.1, 2.3.2</p> <p>Übung B1, B2, B4, B5, B6; GK 18: 2.1, 2.2</p> <p>Übung A2, B1; GK 18: 2.1</p> <p>Übung A3, B3, B7; GK 18: 1.1</p> <p>Übung A3, B3; GK 18: 1.1</p> <p>Übung A3, B3; GK 18: 1.1</p> <p>Übung B3, B7; GK 18: 2.3</p> <p>Übung B1, B2</p> <p>Übung A1, A2, A4, B1, B2, B4, B5; GK 18: 2.1, 2.2</p> <p>Übung A5, B3, B7; GK 18: 2.3</p> <p>Übung A3, B3, B7; GK 18: 1.1</p> <p>Übung A6</p>



### Aufgabe 1

Die folgende Tabelle gibt die Grenzkosten  $K'$ , die Stückkosten  $k$  sowie die variablen Stückkosten  $k_v$  zu einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion  $K$  (ganzrational vom Grad 3) an ( $x$  in ME;  $K(x)$  in GE):

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$K'(x)$	3,9	2,4	1,5	1,2	1,5	2,4	3,9	6	8,7	12
$k(x)$	14,7	8,9	6,57	5,25	4,46	4,03	3,9	4,03	4,39	4,98
$k_v(x)$	4,9	4	3,3	2,8	2,5	2,4	2,5	2,8	3,3	4

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

- 1.1 Die Fixkosten belaufen sich auf 9,8 GE.
- 1.2 Die Kosten steigen zwischen 4 und 10 ME progressiv.
- 1.3 Die kurzfristige Preisuntergrenze beträgt 3,9 GE/ME.

### Aufgabe 2

Die bei einem Produktionsprozess anfallenden Kosten lassen sich durch eine ganzrationale Kostenfunktion  $K$  mit  $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  beschreiben, zu der die folgende Wertetabelle für einen bestimmten Produktionszeitraum gehört.

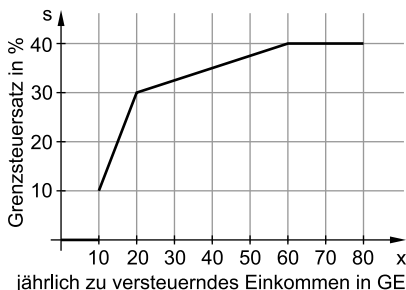
$x$	0	1	2	3	4	5	6
$K(x)$	6	11	14,2	16,2	17,6	19	21
$K'(x)$	6,1	4	2,5	1,6	1,3	1,6	2,5
$K''(x)$	-2,4	-1,8	-1,2	-0,6	0	0,6	1,2

Die Werte für  $x$  sind in Mengeneinheiten (ME) und die Funktionswerte von  $K$  in Geldeinheiten (GE) angegeben. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 6 ME im betrachteten Produktionszeitraum.

- 2.1 Zeigen Sie mit den Tabellenwerten, dass  $b = -1,2$ ,  $c = 6,1$  und  $d = 6$  gilt.
- 2.2 Leiten Sie rechnerisch her, dass  $a = 0,1$  gilt.
- 2.3 Berechnen Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

## Aufgabe 6

Das folgende Schaubild beschreibt den Verlauf eines möglichen Grenzsteuersatzes  $s(x)$  (in %), aus dem sich die auf ein jährlich zu versteuerndes Einkommen  $x$  (in GE) zu entrichtende Steuer  $S(x)$  (in GE) berechnen lässt.



Die stückweise definierte Grenzsteuerfunktion  $s$  lautet:

$$s(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x \leq 10 \\ 2x - 10 & \text{falls } 10 < x \leq 20 \\ \frac{1}{4}x + 25 & \text{falls } 20 < x \leq 60 \\ 40 & \text{falls } 60 < x \leq 80 \end{cases}$$

### Beispiel für die Steuerberechnung mithilfe des Schaubildes

Bei einem Jahreseinkommen von 20 GE sind die ersten 10 GE dieses zu versteuernden Einkommens steuerfrei. Die restlichen 10 GE des zu versteuernden Einkommens werden zwischen 10 % und 30 % versteuert, also im Mittel mit 20 %. Die zu entrichtende Steuer beläuft sich damit auf  $S(20) = 0,2 \cdot 10 = 2$  GE.

Im Folgenden sollen die Informationen für Einkommen bis zu 80 GE aus dem Schaubild sowie die angegebene Gleichung für  $s(x)$  benutzt werden.

6.1 Bestätigen Sie rechnerisch, dass gilt:  $S(20) = \frac{1}{100} \cdot \int_{10}^{20} (2x - 10) dx$

6.2 Berechnen Sie  $\frac{1}{100} \cdot \int_{10}^{20} (2x - 10) dx + \frac{1}{100} \cdot \int_{20}^{60} \left(\frac{1}{4}x + 25\right) dx$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachkontext.

6.3 Für  $60 < x \leq 80$  wurde  $S(x) = 0,4x - 8$  ermittelt.

Bestätigen Sie mithilfe des Schaubildes oder rechnerisch, dass dieser Term korrekt ermittelt wurde.

- 4.2 Die Zufallsgröße  $X$  „Anzahl der defekten Produkte“ ist binomialverteilt mit  $n = 120$  und  $p = 0,05$ .

Man kann der Abbildung näherungsweise die folgenden Wahrscheinlichkeiten entnehmen:

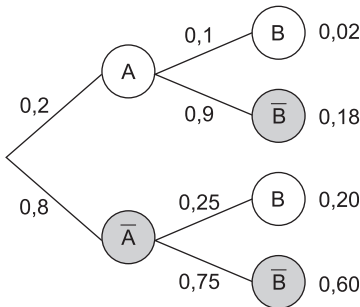
$$P(X \geq 10) \approx 0,04 + 0,02 + 0,01 + 0,005 = 0,075 < 0,10$$

$$P(X \geq 9) \approx p(X \geq 10) + 0,07 \approx 0,145 > 0,10$$

Somit wird man auf dem Signifikanzniveau von 10 % die Nullhypothese ablehnen, wenn sich unter den 120 überprüften Produkten mindestens 10 defekte befinden sollten. Der Ablehnungsbereich der Nullhypothese ist also  $\{10, \dots, 120\}$ .

- 4.3 Eine irrtümliche Annahme der Nullhypothese führt zum Fehler 2. Art ( $\beta$ -Fehler). Bei einer tatsächlichen Defektwahrscheinlichkeit von  $p = 0,08$  und einem Ablehnungsbereich  $\{11, \dots, 120\}$  gilt für diesen näherungsweise aufgrund der Abbildung  $P(X \leq 10) \approx 0,64$ . Der Fehler 2. Art ist daher größer als 50 %.

5.1



5.2  $P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) = 0,18 + 0,20 = 0,38$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Produkt genau einen der beiden Fehler aufweist, beträgt 38 %.

- 5.3 Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P_B(A)$ .

Mit  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,02 + 0,20 = 0,22$  folgt:

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0,02}{0,22} = \frac{1}{11} < \frac{1}{5} = 0,2$$



Ein Bruch wird größer, wenn man seinen Nenner verkleinert.

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit kleiner als 20 %.

7.2 Berechnen Sie den exakten Umsatz im Marktgleichgewicht.

*Hinweis:* Die Lösungen zu 7.1 und 7.2 enthalten die Eulersche Zahl  $e$  bzw. den natürlichen Logarithmus  $\ln$ .

7.3 Bestätigen Sie, dass die Konsumentenrente genau 4 GE beträgt.

### Aufgabe 8

Für eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion  $K$  dritten Grades gilt die Gleichung:  
 $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$  mit  $a, c, d, x > 0$ ;  $b < 0$

8.1 Geben Sie die Ableitung  $k'$  der Stückkostenfunktion in allgemeiner Form an.

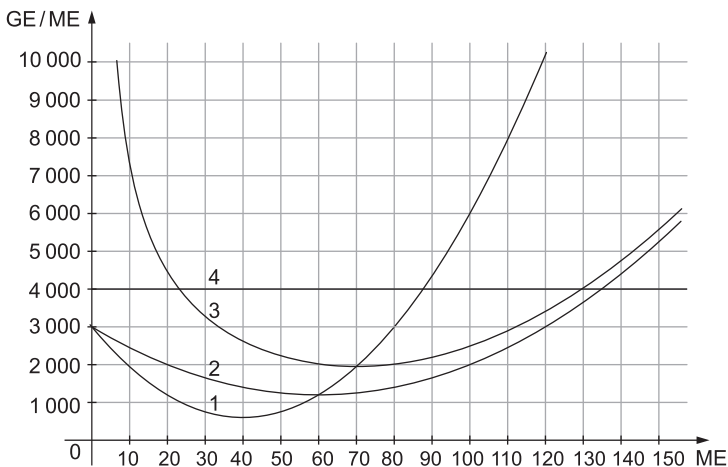
8.2 Weisen Sie allgemein nach, dass bei einem konstanten Marktpreis  $p$  der Stückgewinn maximal ist, wenn die Stückkosten minimal sind.

### Aufgabe 9

Die Gesamtkosten, die bei der Herstellung eines Produktes anfallen, werden durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades beschrieben. Das Produkt wird aktuell zu einem konstanten Preis  $p$  verkauft.

Im Folgenden steht ME für Mengeneinheiten und GE für Geldeinheiten.

In der nachfolgenden Abbildung sind die Funktionsgraphen der Grenzkosten, der Stückkosten, der variablen Stückkosten sowie des Grenzerlöses eingezeichnet.



9.1 Ordnen Sie die Ziffern 1 bis 4 den jeweiligen Funktionsgraphen zu.





**Aufgabenstellung** (Gesamtpunktzahl 24 Punkte)

Als einer von vielen Anbietern produziert die Bilster Möbel GmbH Holzmöbel aller Art. Hierzu gehören diverse Schrank- und Regalsysteme, Tische und Stühle.

In allen Aufgaben gilt: ME  $\hat{=}$  Mengeneinheiten und GE  $\hat{=}$  Geldeinheiten

Die Bilster Möbel GmbH produziert den Computertisch Marseille und bietet diesen zu einem Verkaufspreis von 50 GE/ME an.

Die Kapazitätsgrenze für dieses Produkt liegt bei 10 ME.

Der Kostenverlauf für die Produktion des Computertisches Marseille wird beschrieben durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dritten Grades.

Punkte

2.1 Als Gewinnfunktion wurde  $G(x) = -4x^3 + 16x^2 + 12x - 48$  ermittelt.

2.1.1 Berechnen Sie den Gewinn, den das Unternehmen maximal erzielen kann. 3

2.1.2 Ermitteln Sie diejenigen Produktionsmengen, für die das Unternehmen einen Gewinn von mindestens 10 GE erzielt. 2

2.1.3 Leiten Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Kostenfunktion K her. 3

**Gehen Sie im Folgenden von der Kostenfunktion  $K(x) = 4x^3 - 16x^2 + 38x + 48$  aus.**

2.2 Ein Konkurrenzunternehmen bietet ein vergleichbares Modell zu einem Preis von 45 GE/ME an. Daher wird überlegt, den Preis zu senken.

2.2.1 Bestätigen Sie, dass das Betriebsminimum 2 ME beträgt, und geben Sie die kurzfristige Preisuntergrenze an. 3

2.2.2 Die Unternehmensleitung entschließt sich, den Preis ebenfalls auf 45 GE/ME zu senken.  
Bestimmen Sie alle Ausbringungsmengen, für die das Unternehmen einen Gewinn von mindestens 5 % der Gesamtkosten erzielt. 4

## Tipps und Hinweise

### Teilaufgabe 2.1.1

- Wenden Sie die notwendige und die hinreichende Bedingung für lokale Extrempunkte an.
- Sie dürfen Gleichungen auch mit den Funktionalitäten des GTR lösen.
- Ökonomisch irrelevante Lösungen müssen Sie nicht weiter betrachten.

### Teilaufgabe 2.1.2

- Gesucht ist der Produktionsbereich, innerhalb dessen der Gewinn mindestens 10 GE beträgt.
- Sie können eine Ungleichung mit dem GTR grafisch lösen.

### Teilaufgabe 2.1.3

- Stellen Sie zunächst die Gleichung der linearen Erlösfunktion  $E(x)$  bei einem konstanten Verkaufspreis auf.
- Stellen Sie die Grundgleichung  $G(x) = E(x) - K(x)$  geeignet um.
- Beachten Sie die Notwendigkeit einer geeigneten Klammersetzung.

### Teilaufgabe 2.2

- Stellen Sie zur Veranschaulichung die Grenzkostenfunktion sowie die variable Stückkostenfunktion grafisch dar.

### Teilaufgabe 2.2.1

- Die kurzfristige Preisuntergrenze entspricht den minimalen variablen Stückkosten und liegt im Betriebsminimum vor. Mit diesem Preis können gerade noch die anfallenden variablen Kosten gedeckt werden.
- Sie können das Betriebsminimum grafisch oder rechnerisch bestimmen.
- Der Graph der Grenzkostenfunktion  $K'$  schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion  $k_v$  in deren Tiefpunkt, also im Betriebsminimum.
- Alternativ kann das Betriebsminimum mithilfe des Tiefpunktes der variablen Stückkostenfunktion bestimmt werden. Der Graph der variablen Stückkostenfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel, deren Scheitelpunkt in der Scheitelpunktform ablesbar ist.

### Teilaufgabe 2.2.2

- Um den angestrebten Gewinn von mindestens 5 % zu erzielen, muss der Erlös die Gesamtkosten entsprechend übersteigen.
- Sie können eine Ungleichung mit dem GTR grafisch lösen.

### Teilaufgabe 2.3.1

- Beachten Sie, auf welcher Achse die Mengen bzw. die Preise angegeben werden.
- Im Marktgleichgewicht werden beim Gleichgewichtspreis gleich große Mengen angeboten bzw. nachgefragt. Somit befindet es sich im Schnittpunkt der beiden Graphen.
- Kennzeichnen Sie den Gleichgewichtspreis durch eine geeignete Gerade.
- Die Konsumentenrente beschreibt die potenzielle Ersparnis der Konsumenten. Sie wird daher mithilfe der Nachfragefunktion  $p_N$  beschrieben.

### Teilaufgabe 2.3.2

- Sie können das Marktgleichgewicht sowie den zugehörigen Flächeninhalt grafisch oder rechnerisch bestimmen.
- Sie dürfen mit den entsprechenden Funktionalitäten des GTR Gleichungen lösen und bestimmte Integrale berechnen.

### Teilaufgabe 2.3.3

- Stellen Sie die Situation für verschiedene Werte von  $b$  grafisch dar.

## Lösung

#### 2.1.1 Notwendige Bedingung:

$$G'(x) = 0 \text{ mit } G'(x) = -12x^2 + 32x + 12$$

Somit gilt hier:

$$-12x^2 + 32x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3$$

(Die zweite rechnerische Lösung  $x = -\frac{1}{3}$  ist ökonomisch irrelevant.)

Mit  $G''(x) = -24x + 32$  ist dann:

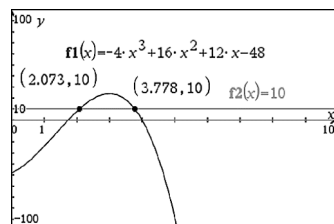
$$G''(3) = -40 < 0 \text{ und}$$

$$G(3) = 24$$

Der maximale Gewinn wird also beim Verkauf von 3 ME erzielt und beträgt 24 GE.

$\text{polyRoots}(-12 \cdot x^2 + 32 \cdot x + 12, x)$	
$\{-0.3333333, 3.\}$	
$-24 \cdot x + 32   x=3$	-40.
$-4 \cdot x^3 + 16 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 48   x=3$	24.

- 2.1.2 Die Schnittstellen des Graphen der Gewinnfunktion mit der Geraden  $y = 10$  liegen bei ca. 2,073 ME und ca. 3,778 ME. Dazwischen verläuft der Graph von  $G$  oberhalb dieser Geraden. Zwischen diesen beiden Werten wird ein Gewinn von mindestens 10 GE erzielt.





**Aufgabenstellung** (Gesamtpunktzahl 24 Punkte)

Das Unternehmen Miss Marble stellt seit über 30 Jahren Glasprodukte her. Dabei verbindet es traditionelle Glasbläserkunst mit neuester Massenproduktionstechnik. Das von Miss Marble vertriebene Sortiment reicht von einfachen Murmeln bis zu hochwertigem Glas.

Punkte

**1.1 Analysis**

In der Produktion von Spiegelglas hängen die Produktionskosten in hohem Maße vom Preis des verwendeten Rohstoffs Zinn ab. Da dieser nicht vorhersehbar ist, kalkuliert das Unternehmen mit einer parameter-abhängigen Funktion:

$$K_c(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + c \cdot x + 30 \text{ mit } c \geq 0$$

- 1.1.1 Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion besitzt keine lokalen Extrema.

Zeigen Sie, dass dies für  $c > 36$  erfüllt ist.

4

- 1.1.2 Bestätigen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge nicht vom Parameter  $c$  abhängt.

2

**1.2 Analysis**

Zu Beginn jedes Jahres werden einige Produktionskapazitäten auf die Herstellung von Osterartikeln umgestellt.

Der Absatz der Osterartikel (in ME pro Monat) kann in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (in Monaten) durch die Funktion  $a_b$  mit der Gleichung  $a_b(t) = e^{-0,5 \cdot t^2 + b \cdot t}$  mit  $t \geq 0$  und  $b > 0$  beschrieben werden.

Zum Zeitpunkt  $t=0$  liegt der Jahresbeginn. Der Parameter  $b$  beschreibt den Einfluss des Werbebudgets.

- 1.2.1 Der Absatz soll 1 ME pro Monat betragen.

Ermitteln Sie die zugehörigen Zeitpunkte in Abhängigkeit von  $b$ .

4

1.4.2 Für  $k=3,6$  lautet die zugehörige Leontief-Inverse

$$(E - A_{3,6})^{-1} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1,5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3,5 & 5 \end{pmatrix}$$

Werk A kann 1 ME und Werk C kann 2 ME an den Markt abgeben.

Berechnen Sie, wie viele ME Werk B an den Markt abgeben kann, wenn Werk B 25 ME produziert.

3

---

## Tipps und Hinweise

### Teilaufgabe 1.1.1

- Zeigen Sie, dass für  $c > 36$  die notwendige Bedingung für lokale Extrempunkte nicht erfüllbar ist.
- Sie können auch verwenden, dass jede Kostenfunktion  $K$  mit  $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  sowie  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c > 0$ ,  $d > 0$  und  $3ac > b^2$  ertragsgesetzlich ist.

### Teilaufgabe 1.1.2

- Berechnen Sie die betriebsminimale Menge  $x_{BM}$  als  $x$ -Koordinate des Minimums bzw. Scheitelpunktes der zur (von  $c$  abhängigen) variablen Stückkostenfunktion  $k_{v,c}$  gehörenden Parabel oder als Schnittstelle von Grenzkosten- und variabler Stückkostenfunktion.
- Sie können die Aussage auch mit der Formel zur Berechnung der betriebsminimalen Menge  $x_{BM} = -\frac{b}{2a}$  bestätigen.

### Teilaufgabe 1.2.1

- Lösen Sie die Gleichung  $a_p(t) = 1$ .
- Beachten Sie, dass  $e^0 = 1$  gilt.
- Quadratische Gleichungen können beispielsweise mit der  $p$ - $q$ -Formel und ggf. auch durch Ausklammern der Variablen gelöst werden.

### Teilaufgabe 1.2.2

- Der Absatz innerhalb der ersten fünf Monate entspricht anschaulich dem Inhalt der Fläche, die der Graph der Absatzfunktion mit der waagerechten Zeitachse im Intervall von 0 bis 5 einschließt.
- Bestimmen Sie den gesuchten Flächeninhalt z. B. näherungsweise durch Zählen der Kästchen. Beachten Sie dabei, welcher Absatzmenge ein Kästchen entspricht.
- Der Jahresbeginn entspricht dem Zeitpunkt  $t = 0$ .

## Lösung

1.1.1  $K'_c(x) = x^2 - 12x + c$

$$K'_c(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + c = 0 \Leftrightarrow x = 6 + \sqrt{36 - c} \vee x = 6 - \sqrt{36 - c}$$

Für  $c > 36$  hat die Gleichung keine reelle Lösung und somit auch keine lokalen Extrema.

*Alternativ:* Die Kostenfunktion mit  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c > 0$ ,  $d > 0$  und  $3ac \geq b^2$  ist ertragsgesetzlich, was im vorliegenden Fall auf die Ungleichung  $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot c \geq (-6)^2$  und somit auf  $c \geq 36$  führt, also insbesondere auf  $c > 36$ .

1.1.2 Die notwendige Bedingung für das Betriebsminimum lautet:  $k'_{v,c}(x) = 0$

Hier gilt:

$$k_{v,c}(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - 6x + c$$

$$k'_{v,c}(x) = \frac{2}{3} \cdot x - 6$$

Da in der ersten Ableitung kein Parameter mehr vorhanden ist, hängt deren Nullstelle (betriebsminimale Ausbringungsmenge) nicht von  $c$  ab.

Sie können auch die exakte Lösung von  $\frac{2}{3}x - 6 = 0$ , also  $x = 9$ , berechnen. (Sie hängt nicht von  $c$  ab.)

Diese Lösung liefert ebenfalls der Ansatz  $k_{v,c}(x) = K'_c(x)$  mit

$$\frac{1}{3}x^2 - 6x + c = x^2 - 12x + c, \text{ der auf } 0 = \frac{2}{3}x^2 - 6x \text{ und somit } 0 = \frac{2}{3} \cdot x \cdot (x - 9) \text{ führt.}$$

*Alternativ* gilt unter Verwendung der Formel  $x_{BM} = -\frac{b}{2a}$ :

$$x_{BM} = -\frac{-6}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 9$$

1.2.1 Wenn der monatliche Absatz 1 ME beträgt, dann ergibt sich unter Verwendung von  $e^0 = 1$  bzw. durch Anwenden des natürlichen Logarithmus:

$$\begin{aligned} a_b(t) = 1 &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2 + b \cdot t} = 1 \stackrel{\ln}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}t^2 + b \cdot t = 0 \Leftrightarrow t \cdot \left(-\frac{1}{2}t + b\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee -\frac{1}{2}t + b = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2b \end{aligned}$$

Der monatliche Absatz beträgt daher sowohl am Jahresbeginn als auch zum Zeitpunkt  $2b$  jeweils 1 ME.



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**