

2021

Abitur

Original-Prüfung
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Gymnasium

Mathematik

- + CAS-Abituraufgaben
- + Übungsaufgaben
- + Online-Glossar

ActiveBook
• Interaktives
Training



STARK

Inhalt

Vorwort

Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zum Abitur

1	Ablauf der Prüfung	I
2	Leistungsanforderungen und Bewertung	IV
3	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung	V
4	Hinweise zum CAS	VI

Übungsaufgaben zum Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel

Übungsaufgabe 1 (Analysis, Stochastik, Geometrie)	1
Übungsaufgabe 2 (Analysis, Stochastik, Geometrie)	12
Übungsaufgabe 3 (Analysis, Stochastik, Geometrie)	21
Übungsaufgabe 4 (Analysis, Stochastik, Geometrie)	31

Abiturprüfung 2017

Prüfungsteil A Analysis – Aufgabengruppe 1 und 2	2017-1
Prüfungsteil A Stochastik – Aufgabengruppe 1 und 2	2017-11
Prüfungsteil A Geometrie – Aufgabengruppe 1 und 2	2017-19
Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 1	2017-24
Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 2	2017-37
Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 1	2017-48
Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 2	2017-53
Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 1	2017-59
Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 2	2017-66

Abiturprüfung 2018

Prüfungsteil A Analysis – Aufgabengruppe 1 und 2	2018-1
Prüfungsteil A Stochastik – Aufgabengruppe 1 und 2	2018-12
Prüfungsteil A Geometrie – Aufgabengruppe 1 und 2	2018-18
Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 1	2018-25
Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 2	2018-38
Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 1	2018-49
Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 2	2018-55
Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 1	2018-61
Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 2	2018-68

Abiturprüfung 2019

Prüfungsteil A Analysis – Aufgabengruppe 1 und 2	2019-1
Prüfungsteil A Stochastik – Aufgabengruppe 1 und 2	2019-14
Prüfungsteil A Geometrie – Aufgabengruppe 1 und 2	2019-20
Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 1	2019-26
Prüfungsteil B Analysis – Aufgabengruppe 2	2019-37
Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 1	2019-48
Prüfungsteil B Stochastik – Aufgabengruppe 2	2019-55
Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 1	2019-61
Prüfungsteil B Geometrie – Aufgabengruppe 2	2019-68

Abiturprüfung 2020

www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark unter www.stark-verlag.de/mystark herunterladen.



ActiveBook: weitere Aufgaben zum Download

Abiturprüfungen ohne CAS

Jahrgänge 2016 und 2020

Abiturprüfungen mit CAS

Jahrgänge 2016 bis 2020



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren! Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Sybille Reimann (Lösungen zu Abituraufgaben ohne CAS, Übungsaufgaben)

Dr. Ewald Bichler (Lösungen zu Abituraufgaben mit CAS)

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

für Sie ist Mathematik verbindlich als schriftliches Abiturfach vorgegeben. Ein Fach, auf das man sich durch konsequentes Üben optimal vorbereiten kann, wobei Sie dieser Band hervorragend unterstützt.

Seit dem **Schuljahr 2013/2014** gliedert sich die Abiturprüfung Mathematik in die beiden **Prüfungsteile A und B** (siehe Hinweise auf Seite I).

Das vorliegende Buch enthält:


- 4 Aufgaben im Stil der **Abiturprüfung ohne Hilfsmittel (Prüfungsteil A)**
- alle Aufgaben der **Abiturjahrgänge 2017 bis 2019 ohne CAS**

Zum Download stehen zur Verfügung:

- alle Aufgaben des **Abiturjahrgangs 2020 (ohne und mit CAS)**, sobald diese zur Veröffentlichung freigegeben sind
- alle Aufgaben des **Abiturjahrgangs 2016 ohne CAS**
- die kompletten **CAS-Abiturjahrgänge 2016 bis 2019**

Anhand dieser Fülle von Aufgaben können Sie mit eigenverantwortlichem Üben die nötige Sicherheit erlangen und somit die „Schrecksekunden“ am Prüfungstag minimieren.

Zu allen Aufgaben gibt es umfassende und **ausführliche Lösungen**.

Sie finden bei allen Aufgaben zunächst die Aufgabenstellung, die Sie versuchen sollten, allein und in der vorgegebenen Zeit zu lösen (siehe hierzu auch den Abschnitt „Hinweise und Tipps zum Zentralabitur“). Sollten Sie sich bei einer Teilaufgabe nicht sicher sein, was sich hinter der Aufgabenstellung verbirgt, oder aber den Einstieg in die Bearbeitung nicht finden, so können Sie die  **Tipps und Hinweise** unmittelbar hinter der Angabe im Buch aufschlagen. Hier werden Sie an Dinge erinnert, die in dieser Teilaufgabe wichtig sind, und Sie werden auf rechnerische Schritte aufmerksam gemacht, die Sie zur Lösung benötigen. Sie sollten immer nur den obersten Tipp lesen, es dann wieder allein versuchen und nur im Bedarfsfall auf die weiteren Tipps – möglichst immer nur einen als Anregung zum Weiterdenken – zurückgreifen. Auf diese Weise gelingt es Ihnen, die Aufgabe weitgehend selbstständig zu bearbeiten und erst anschließend Ihre Lösung mit der vorgegebenen Lösung zu vergleichen.

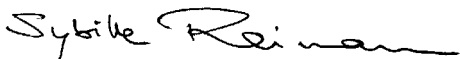
In den Lösungstipps und in den Lösungen selbst finden Sie oft einen Hinweis auf die Merkhilfe, wenn sich auf dieser eine passende Formel befindet. Die Merkhilfe ist ein wesentlicher Bestandteil der zugelassenen Hilfsmittel und unterstützt Sie bei der Abiturvorbereitung. Sie sollten frühzeitig den Umgang mit ihr lernen.

Um der aufgrund der Covid-19-Pandemie besonderen Lernsituation im Schuljahr 2019/20 Rechnung zu tragen, sind in der schriftlichen Abiturprüfung 2021 im Fach Mathematik einige Fachinhalte nicht prüfungsrelevant. Die betroffenen Aufgaben bzw. Aufgabenteile sind mit einem * markiert.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2021 vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:

www.stark-verlag.de/mystark

So vorbereitet kann Ihr Abitur in Mathematik nur ein Erfolg werden!

A handwritten signature in black ink, reading 'Sybille Reimann'. The signature is fluid and cursive, with the first name 'Sybille' and the last name 'Reimann' clearly distinguishable.

Sybille Reimann

Dr. Ewald Bichler

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

Die Aufgaben werden im Auftrag des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus von einer Fachkommission zusammengestellt, die dabei Aufgaben verwendet, die von Fachlehrkräften erstellt wurden. Die verbindlichen curricularen Vorgaben (siehe auch www.isb.bayern.de), nach denen in den Jahrgangsstufen 11 und 12 der Qualifikationsphase unterrichtet wird, bestimmen Inhalte und Anforderungen der Abituraufgaben.

Prüfungsvarianten

Seit dem Schuljahr 2011/2012 wird in Bayern neben der „normalen“ Abiturprüfung für alle Schulen auch eine CAS-Abiturprüfung angeboten. Jedes Gymnasium kann entscheiden, ob es ab der Jahrgangsstufe 10 Klassen oder Kurse einrichtet, die mit CAS arbeiten. Selbst wenn Sie in einer CAS-Klasse sind, können Sie ein paar Monate vor der Abiturprüfung selbst entscheiden, ob Sie die „normale“ Abiturprüfung oder die CAS-Abiturprüfung schreiben möchten.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die Abiturprüfung Mathematik gliedert sich in die beiden Prüfungsteile A und B, die ihrerseits wieder in die Fachgebiete **Analysis, Stochastik und Geometrie** unterteilt sind.

Bis einschließlich der Abiturprüfung 2019 verteilten sich die Bewertungseinheiten wie folgt:

Prüfungsteil A		Prüfungsteil B	
Analysis	20 BE	Analysis	40 BE
Stochastik	10 BE	Stochastik	20 BE
Geometrie	10 BE	Geometrie	20 BE

Ab dem Abitur 2020 bleibt die Summe je Fachgebiet zwar gleich, die Verteilung der Bewertungseinheiten verschiebt sich jedoch in Stochastik und Geometrie nach Prüfungsteil B:

Prüfungsteil A		Prüfungsteil B	
Analysis	20 BE	Analysis	40 BE
Stochastik	5 BE	Stochastik	25 BE
Geometrie	5 BE	Geometrie	25 BE

Bis einschließlich der Prüfung im Jahr 2019 hatte jede Schülerin und jeder Schüler für die „normale“ Abiturprüfung (also ohne CAS) die individuelle Wahlmöglichkeit, den Prüfungsteil A mit oder ohne Hilfsmittel zu bearbeiten und sich somit vorab für eine der beiden folgenden Varianten zu entscheiden:

Variante 1: Schülerinnen und Schüler, die den Prüfungsteil A **ohne Hilfsmittel** bearbeiten wollten, erhielten als Prüfungszeit – wie länderübergreifend vorgesehen – **270 Minuten** (davon 90 Minuten für den Prüfungsteil A) und damit 30 Minuten mehr Zeit. Nach den ersten 90 Minuten wurde eine **Pause** von zusätzlichen **15 Minuten** eingelegt, in der der Prüfungsteil A eingesammelt und der Prüfungsteil B sowie die im Prüfungsteil B zugelassenen Hilfsmittel ausgeteilt wurden.

Variante 2: Schülerinnen und Schüler, die im Prüfungsteil A **nicht auf die zugelassenen Hilfsmittel verzichten wollten**, erhielten zu Beginn der Prüfungszeit sowohl Prüfungsteil A als auch Prüfungsteil B zusammen mit allen zugelassenen Hilfsmitteln. In der auch bislang üblichen Arbeitszeit von **240 Minuten** waren dann alle vorgelegten Aufgaben in frei gewählter Reihenfolge zu bearbeiten. Beide Prüfungsteile mussten erst am Ende der Prüfungszeit abgegeben werden.

Prüfung mit CAS: Schülerinnen und Schüler hatten statt der beiden oben beschriebenen Varianten auch die Möglichkeit, **freiwillig** an der Prüfung Mathematik mit **CAS** teilzunehmen. Da bei der Verwendung von CAS in besonderer Weise darauf zu achten ist, dass grundlegende mathematische Fertigkeiten beherrscht werden, war in diesem Fall der **Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel** zu bearbeiten. Die Gesamtarbeitszeit betrug **270 Minuten**, davon 90 Minuten für den Prüfungsteil A. Wie in Variante 1 wurde nach den ersten 90 Minuten eine **Pause** von zusätzlichen **15 Minuten** eingelegt, in der der Prüfungsteil A eingesammelt und der Prüfungsteil B sowie die im Prüfungsteil B zugelassenen Hilfsmittel ausgeteilt wurden.

Seit dem Abitur 2020 besteht keine Wahlfreiheit zwischen den Varianten 1 und 2 mehr. **Alle Schülerinnen und Schüler** (auch die mit CAS) legen Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel ab und dürfen die zugelassenen Hilfsmittel **nur** für die Bearbeitung von Prüfungsteil B benutzen. Zu Beginn der **Prüfungszeit von insgesamt 270 Minuten** werden allen Schülerinnen und Schülern die Angaben beider Prüfungsteile vorgelegt. Für die Bearbeitung von **Prüfungsteil A** sind **70 Minuten** vorgegeben, d. h., nach 70 Minuten wird der (hoffentlich vollständig) gelöste Prüfungsteil A eingesammelt. Die restlichen **200 Minuten** stehen für **Prüfungsteil B** zur Verfügung. Wer allerdings mit der Bearbeitung von Teil A schon vor Ablauf der 70 Minuten fertig ist, darf bereits mit der Lösung der Aufgaben aus Teil B beginnen, jedoch noch keine Hilfsmittel verwenden. Diese sind erst nach Ablauf der ersten 70 Minuten gestattet.

Die Angaben, die Sie vorgelegt bekommen, beinhalten für jeden der drei Bereiche **Analysis, Stochastik und Geometrie** (gilt in gleicher Weise für die CAS-Abiturprüfung) jeweils zwei Aufgabengruppen. Aus diesen wählt vor Beginn Ihrer Prüfungszeit jede Lehrkraft für ihre Klasse einheitlich jeweils eine aus. Dabei beachtet Ihre Lehrkraft, dass innerhalb eines Bereichs für beide Prüfungsteile dieselbe Aufgabengruppe gewählt werden muss. Sie haben also **aus jedem der drei Bereiche jeweils genau eine Aufgabengruppe** zu bearbeiten (z. B. in beiden Prüfungsteilen in Analysis Aufgabengruppe 1, in Stochastik Aufgabengruppe 2 und in Geometrie Aufgabengruppe 1).

Beachten Sie bereits bei der Vorbereitung auf Ihre Prüfung, dass für das Lösen der Aufgaben im **Prüfungsteil A** weder ein Taschenrechner noch die Merkhilfe noch das Stochastische Tafelwerk zugelassen sind. Das bedeutet jedoch nicht, dass Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgaben weder rechnen müssen noch ohne jede Formel auskommen können! Um Ihnen für diesen Prüfungsteil A zusätzliche Übungsmöglichkeiten zu bieten, finden Sie hierzu in diesem Buch vier Übungsaufgaben mit der ab dem Abitur 2020 gültigen Verteilung der Bewertungseinheiten. In den Lösungen sind bei den Rechnungen Zwischenschritte angegeben, die Sie beim „Kopfrechnen“ eventuell benötigen. In den Tipps und Hinweisen finden Sie benötigte Formeln eigens ausgewiesen.

Es wird vom Kultusministerium ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich der Prüfungsteil A der CAS-Abiturprüfung vom Prüfungsteil A der „normalen“ Abiturprüfung unterscheiden kann, wenn dies Prüfungsteil B erforderlich macht. Dies wird beispielsweise im Abitur 2019 kenntlich, wo einige Analysisaufgaben von der „normalen“ Prüfung abweichen.

Um der aufgrund der Covid-19-Pandemie besonderen Lernsituation im Schuljahr 2019/20 Rechnung zu tragen, sind in der schriftlichen Abiturprüfung 2021 die folgenden Fachinhalte nicht prüfungsrelevant:

- Integralfunktion
- Sinus- und Kosinusfunktion
(Zur Berechnung von Winkeln sind \sin und \cos aber sehr wohl prüfungsrelevant.)
- Newton-Verfahren
- Signifikanztest
- Bestimmung einer Gleichung der Schnittgerade von Ebenen
- Bestimmung des Abstands windschiefer Geraden

Die betroffenen Aufgaben bzw. Aufgabenteile sind mit einem * markiert.

Zugelassene Hilfsmittel

Für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik sind zugelassen

im **Prüfungsteil A:**

- für Mathematik übliche Schreib- und Zeichengeräte

im **Prüfungsteil B:**

- für Mathematik übliche Schreib- und Zeichengeräte
- Merkhilfe
- ein zugelassenes Stochastisches Tafelwerk

Abitur Mathematik (Bayern): Abiturprüfung 2019
Prüfungsteil A – Analysis

Aufgabengruppe 1

BE

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{e^{2x}}{x}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
 Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts des Graphen von f .

5

2. Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion
 $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$, die die Nullstellen $x_1 = -1$ und
 $x_2 = 1$ hat. Abbildung 1 zeigt den Graphen von
 f , der symmetrisch bezüglich der y -Achse ist.
 Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung
 $y = -3$ gegeben.

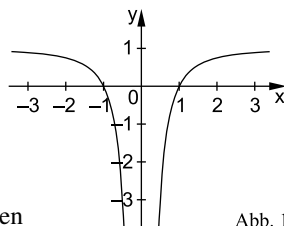


Abb. 1

- a) Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den
 Graphen von f schneidet, die x -Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

1

- b) Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f , die
 x -Achse und die Gerade g einschließen.

4

3. Die nebenstehende Abbildung 2 zeigt den
 Graphen einer Funktion f .

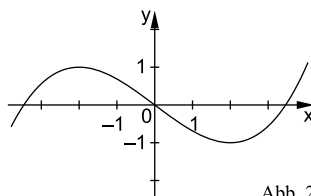


Abb. 2

- a) Einer der folgenden Graphen I, II und
 III gehört zur ersten Ableitungsfunktion
 von f . Geben Sie diesen Graphen an.
 Begründen Sie, dass die beiden anderen
 Graphen dafür nicht infrage kommen.

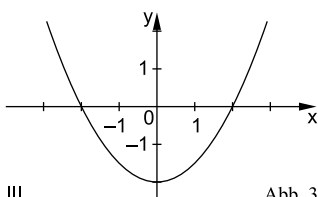
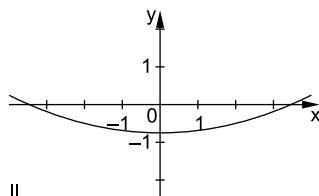
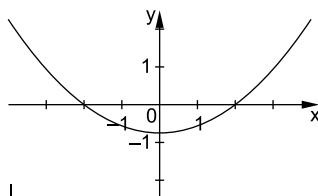


Abb. 3

3

- b) Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f . Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1; 3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

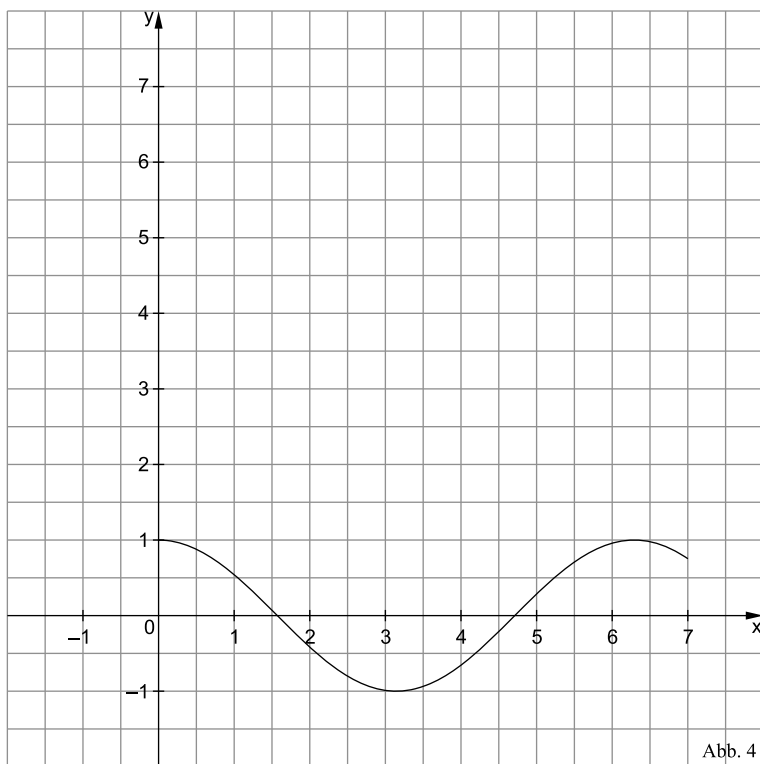
2

- * 4. a) Betrachtet wird eine Schar von Funktionen h_k mit $k \in \mathbb{R}^+$, die sich nur in ihren jeweiligen Definitionsbereichen D_k unterscheiden.

Es gilt $h_k: x \mapsto \cos x$ mit $D_k = [0; k]$.

Abbildung 4 zeigt den Graphen der Funktion h_7 . Geben Sie den größtmöglichen Wert von k an, sodass die zugehörige Funktion h_k umkehrbar ist.

Zeichnen Sie für diesen Wert von k den Graphen der Umkehrfunktion von h_k in Abbildung 4 ein und berücksichtigen Sie dabei insbesondere den Schnittpunkt der Graphen von Funktion und Umkehrfunktion.



3

- b) Geben Sie den Term einer in \mathbb{R} definierten und umkehrbaren Funktion j an, die folgende Bedingung erfüllt: Der Graph von j und der Graph der Umkehrfunktion von j haben keinen gemeinsamen Punkt.

2
20

* Die Teilaufgabe 4a ist für die Abiturprüfung 2021 nicht relevant.

Tipps und Hinweise

Aufgabengruppe 1

Aufgabe 1

- ✎ Wie lässt sich die Lage eines Extrempunkts bestimmen?
- ✎ Man setzt zunächst die 1. Ableitung gleich null.
- ✎ Um welche Art Funktion handelt es sich bei f ?
- ✎ Worauf ist bei der Ableitung einer gebrochenen Funktion zu achten?
- ✎ Verwenden Sie für $f'(x)$ die Quotientenregel.
- ✎ Für die Ableitung gebrochener Funktionen gilt:
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$
- ✎ Die Nullstelle der 1. Ableitung liefert die x -Koordinate des Extrempunkts.
- ✎ Ein Bruch hat den Wert null, wenn der Zähler den Wert null hat.
- ✎ Ein Produkt ist null, wenn einer der Faktoren null ist.
- ✎ Für alle x gilt: $e^{2x} > 0$
- ✎ Einsetzen der x -Koordinate in $f(x)$ ergibt die zugehörige y -Koordinate.
- ✎ Das Vorzeichen von $f'(x)$ entscheidet über das Monotonieverhalten von $f(x)$.
- ✎ Fertigen Sie eine Monotonietabelle und entscheiden Sie damit über die Art des Extrempunkts.

oder:

- ✎ Bestimmen Sie die Art des Extrempunkts mithilfe der 2. Ableitung.
- ✎ Ist die zweite Ableitung an der Stelle des Extremwerts positiv, so handelt es sich um einen Tiefpunkt; ist die zweite Ableitung an der Stelle des Extremwerts negativ, so handelt es sich um einen Hochpunkt.

Aufgabe 2 a

- ✎ Schneiden Sie die beiden Funktionen.
- ✎ Die beiden Funktionsterme müssen gleichgesetzt werden.
- ✎ Da beide Graphen symmetrisch zur y -Achse sind, unterscheiden sich die beiden x -Werte für die Schnittstellen nur durch das Vorzeichen.

Aufgabe 2 b

- ✦ Mit den Funktionsgraphen ist auch die gesuchte Fläche symmetrisch zur y-Achse. Es genügt also, nur die Hälfte (z. B. die im IV. Quadranten) zu betrachten.
- ✦ Die gesamte Fläche befindet sich unter der x-Achse.
- ✦ Die halbe Fläche lässt sich in ein Rechteck und eine weitere Fläche zerlegen.
- ✦ Vielleicht sehen Sie die Zerlegung leichter, wenn Sie die Angabe auf den Kopf stellen.
- ✦ Bestimmen Sie Länge und Breite des Rechtecks.
- ✦ Die weitere Fläche wird von der x-Achse, der Parallelen $x=0,5$ zur y-Achse und dem Graphen der Funktion eingeschlossen.
- ✦ Diese weitere Fläche lässt sich mithilfe eines bestimmten Integrals berechnen.
- ✦ Da sich die Fläche unterhalb der x-Achse befindet, sind Absolutbetragsstriche nötig.
- ✦ $h(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow H(x) = \frac{1}{x}$
- ✦ Vergessen Sie nicht, auch den Wert der Gesamtfläche anzugeben.

Aufgabe 3 a

- ✦ Wo besitzt die Funktion f Extremstellen?
- ✦ Was muss sich an diesen Stellen beim Graphen der 1. Ableitung befinden?
- ✦ Wo f Extremstellen besitzt, muss f' Nullstellen haben.
- ✦ Welcher Graph in Abbildung 3 erfüllt diese Bedingung nicht?
- ✦ Sowohl Graph I als auch Graph III besitzen für $x=2$ und $x=-2$ Nullstellen, kommen also als Graphen der Ableitungsfunktion infrage.
- ✦ Graph I und Graph III unterscheiden sich durch den y-Wert für $x=0$.
- ✦ Der y-Wert der Ableitungsfunktion für $x=0$ gibt die Steigung der Funktion für $x=0$ an.
- ✦ Zeichnen Sie in den Graphen der Funktion (Abbildung 2) die Tangente für $x=0$ ein.
- ✦ Tragen Sie auch die Winkelhalbierende $y=-x$ ein.
- ✦ Welche der beiden Geraden verläuft steiler?
- ✦ Was lässt sich über die Größe der Tangentensteigung für $x=0$ aussagen?
- ✦ Welcher Graph in Abbildung 3 erfüllt diese Bedingung?

Lösungen

Aufgabengruppe 1

1. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot x - e^{2x} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{2x} \cdot (2x - 1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} \cdot (2x - 1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0,5$$

$$f(0,5) = \frac{e^{2 \cdot 0,5}}{0,5} = \frac{e^1}{\frac{1}{2}} = 2e$$

Da sowohl $x^2 > 0$ als auch $e^{2x} > 0$ gilt, entscheidet das Vorzeichen von $2x - 1$ über das Vorzeichen von $f'(x)$.

$x \in$	$] -\infty; 0,5[\setminus \{0\}$	$] 0,5; +\infty[$
$2x - 1$	< 0	> 0
$f'(x)$	< 0	> 0
$f(x)$	fällt	steigt

Somit besitzt f in $(0,5 | 2e)$ einen Tiefpunkt.

oder:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{[e^{2x} \cdot 2 \cdot (2x - 1) + e^{2x} \cdot 2] \cdot x^2 - e^{2x} \cdot (2x - 1) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ &= \frac{[e^{2x} \cdot 2 \cdot (2x - 1) + e^{2x} \cdot 2] \cdot x - e^{2x} \cdot (2x - 1) \cdot 2}{x^3} \\ &= \frac{2e^{2x} \cdot \{[(2x - 1) + 1] \cdot x - (2x - 1)\}}{x^3} = \frac{2e^{2x} \cdot (2x^2 - 2x + 1)}{x^3} \\ f''(0,5) &= \frac{2e^{2 \cdot 0,5} \cdot (2 \cdot 0,5^2 - 2 \cdot 0,5 + 1)}{0,5^3} = \frac{2e \cdot (0,5 - 1 + 1)}{0,5^3} = \frac{e}{0,5^3} > 0 \end{aligned}$$

Somit besitzt f in $(0,5 | 2e)$ einen Tiefpunkt.

2. a) $f(x) = -3$

$$1 - \frac{1}{x^2} = -3$$

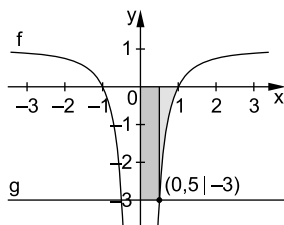
$$-\frac{1}{x^2} = -4$$

$$-1 = -4x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

- b) Da die Funktion symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, genügt es, den Flächenteil im IV. Quadranten zu betrachten. Dieser lässt sich in ein Rechteck und eine Fläche zerlegen, die von der x-Achse, der Geraden $x=0,5$ und dem Graphen von f unterhalb der x-Achse begrenzt wird.

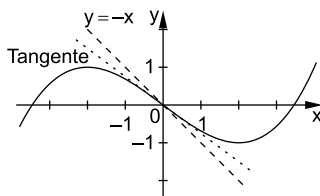


$$\begin{aligned} \text{halbe Fläche} &= 0,5 \cdot 3 + \left| \int_{0,5}^1 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \right| = 1,5 + \left| \left[x + \frac{1}{x} \right]_{0,5}^1 \right| \\ &= 1,5 + \left| \left(1 + \frac{1}{1}\right) - \left(0,5 + \frac{1}{0,5}\right) \right| = 1,5 + |2 - 2,5| = 1,5 + 0,5 = 2 \end{aligned}$$

Gesamtfläche = 4

3. a) Die gegebene Funktion f hat bei $x=-2$ und $x=2$ einen Extrempunkt, also muss der Graph der Ableitungsfunktion f' bei $x=-2$ und $x=2$ Nullstellen haben. Somit scheidet Graph II aus.

Zeichnet man sowohl die Tangente an den Graphen im Ursprung als auch die Winkelhalbierende $y=-x$ in Abbildung 2 ein, erkennt man, dass die Tangente im II. Quadranten unterhalb der Winkelhalbierenden liegt.



Also muss die Steigung der Tangente einen Wert zwischen 0 und -1 besitzen. Der Graph der Ableitungsfunktion muss für $x=0$ also einen y -Wert zwischen 0 und -1 besitzen. Damit scheidet Graph III aus.

Graph I zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK