2021

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Schleswig-H

Mathematik

+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

STARK

Inhalt

Zentralabitur 2019

Zentralabitur 2020

www.stark-verlag.de/mystark

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

ActiveBook Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

www.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Lösungen der Aufgaben:

Prof. Dr. Hinrich Lorenzen:
2016 bis 2020: Aufgaben 1, 2, 3
Oliver Thomsen:
2016 bis 2020: hilfsmittelfreier Teil, Aufgaben 4, 1 (CAS), 2 (CAS)

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch möchten wir Ihnen helfen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2021** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnis für die gezielte Vorbereitung auf die Abiturklausur hilfreich und wichtig ist. Dazu gehören u. a. eine komplette Aufstellung der für die Prüfung 2021 relevanten Themen, Hinweise zum genauen Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus viele **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl in der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Der Band enthält alle **in den Jahren 2016 bis 2019 in Schleswig-Holstein zentral gestellten Aufgaben** des Haupttermins der schriftlichen Abiturprüfung. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Sämtliche Aufgaben enthalten **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Tipps zum Lösungsansatz**, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2021 vom Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
www.stark-verlag.de/mystark

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Prof. Dr. H. Lorenzen   Oliver Thomsen

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2021

1 Ablauf der Prüfung

Einführung des Zentralabiturs in Schleswig-Holstein

Zur Sicherung der Vergleichbarkeit und Qualität aller schulischen Abschlüsse hat die Landesregierung Schleswig-Holstein schrittweise zentrale Abschlussprüfungen in Schleswig-Holstein eingeführt.
Seit dem Schuljahr 2010/2011 werden in der Abiturprüfung an den Gymnasien und Gemeinschaftsschulen mit Oberstufe des Landes Schleswig-Holstein für die schriftlichen Prüfungen der Kernfächer Deutsch, Englisch, Französisch, Spanisch, Russisch, Dänisch, Latein und Mathematik zentrale Aufgaben gestellt.

Aufbau der Prüfung

Die Prüfung besteht aus zwei Teilen:

- Der hilfsmittelfreie Teil mit Kurzformataufgaben enthält auch Aufgaben, die aus einem gemeinsam von den Ländern Bayern, Bremen, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein bzw. vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) in Berlin entwickelten Aufgabenpool entnommen wurden. Dieser Teil ist von allen Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Prüfung zu bearbeiten.
- Der zweite Teil besteht aus komplexeren Aufgabenstellungen. Die Schule erhält dazu zwei Aufgaben aus dem Sachgebiet Analysis und je eine aus den Sachgebieten Analytische Geometrie und Stochastik. Die Abiturprüfungskommission wählt auf Vorschlag der Prüfungslehrkraft im Fach Mathematik eine der beiden Analysisaufgaben aus, die dann von allen Schülerinnen und Schülern zu bearbeiten ist. Von den beiden Aufgaben der anderen Sachgebiete kann sich jede Schülerin bzw. jeder Schüler selbst eine zur Bearbeitung auswählen.

Durchführung der Prüfung

Der hilfsmittelfreie Teil kann frühestens nach 60 Minuten abgegeben werden. Eine Rückgabe und erneute Bearbeitung dieses Teils ist danach nicht mehr möglich. Nach der Abgabe wird der zweite Aufgabenteil zusammen mit den Hilfsmitteln (siehe unten) ausgehändigt. 90 Minuten nach Prüfungsbeginn wird von allen Schülerinnen und Schülern, die noch nicht abgegeben haben, dieser erste Teil eingesammelt.
Schülerinnen und Schülern, die den ersten Teil vorzeitig abgeben, steht für den zweiten Teil entsprechend mehr Zeit zur Verfügung. Die nicht gewählte Aufgabe des

zweiten Teils (Analytische Geometrie oder Stochastik) wird von den Schülerinnen und Schülern zusammen mit den übrigen Prüfungsunterlagen am Ende der Prüfung abgegeben. Sie haben kenntlich zu machen, welche Aufgabe von ihnen nicht gewählt wurde.

Dauer der Prüfung

Die Bearbeitungszeit beträgt 300 Minuten. Bis zur Prüfung im Jahr 2020 wurde zusätzlich eine Einlesezeit von 15 Minuten gewährt.

Zugelassene Hilfsmittel

Als Hilfsmittel ist ein deutsches Wörterbuch grundsätzlich zugelassen. Für den zweiten Teil sind neben der Formelsammlung Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig) zugelassen. Über den Einsatz grafikfähiger Taschenrechner entscheidet das Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (MBWK). Der Einsatz solcher Taschenrechner musste dort von der Fachlehrerin/dem Fachlehrer beantragt werden. Die Zulassung kann mit einer veränderten Aufgabenstellung verbunden sein. Ebenfalls mussten die Fachlehrerinnen und Fachlehrer beim MBWK die Genehmigung für den Einsatz von Computer-Algebra-Systemen (CAS) beantragen. Als Folge der Genehmigung erhalten ihre/seine Schülerinnen und Schüler im Themenbereich Analysis besondere Aufgaben zur Bearbeitung in der Abiturprüfung.

Korrektur

Die Korrektur der Prüfungsarbeiten erfolgt dezentral: Der Kurslehrer/die Kurslehrerin führt die Erstkorrektur und eine weitere Lehrkraft der Schule die Zweitkorrektur durch. Wie bisher wird das MBWK an einem Teil der Gymnasien und Gemeinschaftsschulen Drittkorrekturen durchführen.

2 Inhalte

Bei der Erstellung der Abituraufgaben gelten für das Zentralabitur 2021 die „Fachanforderungen Mathematik“ sowie zusätzlich die „Regelungen für die Abiturprüfung im Fach Mathematik für das Jahr 2021“. Diese finden Sie auf der Internetseite
za.schleswig-holstein.de/zabDokumente
unter den Menü-Punkten „2021“ bzw. „Fachanforderungen“.

Die Aufgaben beziehen sich auf die drei in den Fachanforderungen genannten Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik. Je nach Aufgabenart und Aufgabenstellung können unterschiedliche Akzente gesetzt werden.

3 Operatoren

Bei der Formulierung der zentralen Prüfungsaufgaben werden sogenannte Operatoren verwendet, die sicherstellen sollen, dass alle Schüler und Lehrer unter einer bestimmten Aufgabenstellung das gleiche verstehen. Damit Sie die Aufgabenstellungen korrekt erfassen können, ist es sehr zu empfehlen, sich mit den in der folgenden Liste definierten Operatoren auseinanderzusetzen:

1 **Analytische Geometrie (Pool 1)**
Gegeben sind die Punkte $A(0|0|4)$, $B(2|2|2)$ und $C(0|3|1)$.

1.1 Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm mit einer Beschriftung der Eckpunkte im üblichen Umlaufsinn ist. 2 P

1.2 Zeigen Sie, dass der Innenwinkel des Vierecks ABCD bei Punkt B ein rechter Winkel ist. 2 P

1.3 Überprüfen Sie, ob es sich bei dem Viereck ABCD um ein Quadrat handelt. 1 P

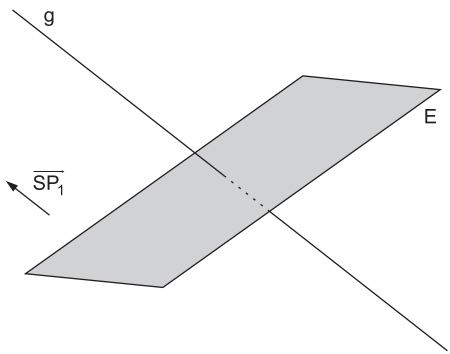
2 **Analytische Geometrie (Pool 1)**

Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene

$E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$ schneiden sich im Punkt S.

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten von S. 3 P

2.2 Der Punkt P_1 liegt auf g, aber nicht in E.
Die Abbildung zeigt die Ebene E, die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$.
Für den Punkt P_2 gilt $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet.
Zeichnen Sie die Punkte S, P_1 und P_2 in die Abbildung ein.



2 P

3 **Analytische Geometrie (Pool 2)**

3.1 Die Ebene E: $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.
Bestimmen Sie diese Koordinaten. 2 P

3.2 Begründen Sie, dass folgende Aussage richtig ist:
„Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.“ 3 P

4 **Stochastik (Pool 1)**

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“, die anderen beiden Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

4.1 Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden. 2 P

4.2 Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 ist. 3 P

5 **Stochastik (Pool 1)**

In einem Fitness-Studio wurde eine Umfrage unter den weiblichen und männlichen Kunden durchgeführt, ob sie mit der Sauberkeit der Umkleideräume zufrieden sind.
Unter allen abgegebenen Fragebögen wird ein Bogen zufällig ausgewählt.
In der folgenden Vierfeldertafel sind einige Wahrscheinlichkeiten bereits eingetragen.
Dabei sind M: „Die Person ist männlich.“ und Z: „Die Person ist mit der Sauberkeit zufrieden.“

	M	$\overline{M}$	
Z			$\frac{9}{16}$
$\overline{Z}$		$\frac{1}{4}$	
		$\frac{3}{8}$	1

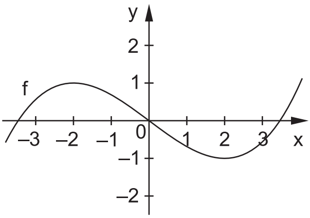
5.1 Ergänzen Sie die übrigen Einträge der Vierfeldertafel. 2 P

5.2 Beschreiben Sie die Bedeutung des grau hinterlegten Feldes im Sachzusammenhang. 1 P

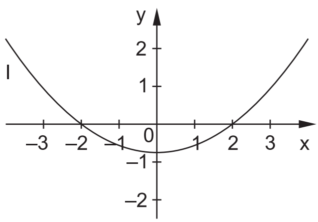
5.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Frau mit der Sauberkeit der Umkleideräume nicht zufrieden ist. 2 P

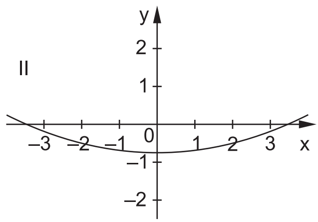
6 Analysis (Pool 1)

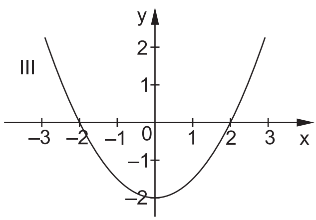
Der abgebildete Graph stellt eine Funktion f dar.



6.1 Einer der folgenden Graphen I, II oder III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.







3 P

6.2 Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall [1; 3] an. Begründen Sie Ihre Angabe. 2 P

Hinweise und Tipps

Teilaufgabe 1.1

- Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.
- Da ABCD ein Parallelogramm ist, gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Teilaufgabe 1.2

- Sie können die Orthogonalität mithilfe des Skalarproduktes geeigneter Vektoren prüfen.
- Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ist.

Teilaufgabe 1.3

- Prüfen Sie, ob alle Seiten des Vierecks ABCD gleich lang sind.

Teilaufgabe 2.1

- Setzen Sie die Komponenten des Geradenterms von g in die Ebenengleichung von E ein und lösen Sie die entstehende Gleichung.
- Setzen Sie den so ermittelten Parameterwert in den Geradenterm ein.

Teilaufgabe 2.2

- Tragen Sie den Schnittpunkt S von g und E ein.
- Zeichnen Sie Repräsentanten von $\overrightarrow{SP_1}$ und $-4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$ so ein, dass die entsprechenden Pfeile in S beginnen.

Teilaufgabe 3.1

- Setzen Sie den Punkt $P(a\,|\,a\,|\,a)$ in die Ebenengleichung von E ein und bestimmen Sie a durch Lösen der entsprechenden Gleichung.

Teilaufgabe 3.2

- Überlegen Sie, wie die Menge aller Punkte, die in allen drei Koordinaten übereinstimmen, aussieht.
- Diese Menge ist eine Gerade. Begründen Sie, dass es unendlich viele Ebenen gibt, die eine vorgegebene Gerade nicht schneiden und diese auch nicht enthalten.

Teilaufgabe 4.1

- Stellen Sie den Vorgang in einem Baumdiagramm dar und wenden Sie eine Pfadregel an.

Teilaufgabe 4.2

- Überlegen Sie zunächst, bei welchen Ergebnissen die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 ist.
- Identifizieren Sie diese Ergebnisse als Pfade im Baumdiagramm. Berechnen Sie dann die geforderte Wahrscheinlichkeit mithilfe der Pfadregeln im Baumdiagramm.

Teilaufgabe 5.1

- Beginnen Sie mit dem Feld oberhalb des grau hinterlegten Feldes.

Teilaufgabe 5.2

- In dem grau hinterlegten Feld ist die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{M} \cap \overline{Z})$, also die Wahrscheinlichkeit eines Und-Ereignisses angegeben. Beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe 5.3

- Zu bestimmen ist hier eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
- Es gilt $P_{\overline{M}}(\overline{Z}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{Z})}{P(\overline{M})}$.

Teilaufgabe 6.1

- Konzentrieren Sie Ihre Überlegungen auf charakteristische Punkte der Graphen.
- Überlegen Sie, welche Eigenschaft die Ableitung von f an den Stellen hat, an denen lokale Extrema von f vorliegen.
- Schätzen Sie die Größe der Steigung des Graphen von f im Punkt $(0|f(0))$ ab.

Teilaufgabe 6.2

- Begründen Sie, dass die Steigung des Graphen von F an jeder Stelle x mit $1 \leq x \leq 3$ negativ ist.
- Schließen Sie daraus auf das Monotonieverhalten von F in diesem Intervall.

Teilaufgabe 7.1

- Zeichnen Sie die Gerade g in die Skizze ein.
- Berechnen Sie den Funktionswert von f an der Stelle $\frac{1}{2}$.

Teilaufgabe 7.2

- Skizzieren Sie in der Grafik die Fläche, deren Inhalt zu bestimmen ist.
- Der Inhalt dieser (zur y-Achse symmetrischen Fläche) kann als Summe der Inhalte von drei geeigneten Teilflächen bestimmt werden, von denen eine Fläche eine Rechteckfläche ist.

Lösung

1.1 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

D hat damit die Koordinaten $(-2 \mid 1 \mid 3)$.

1.2 Wegen

$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 - 2 - 2 = 0$

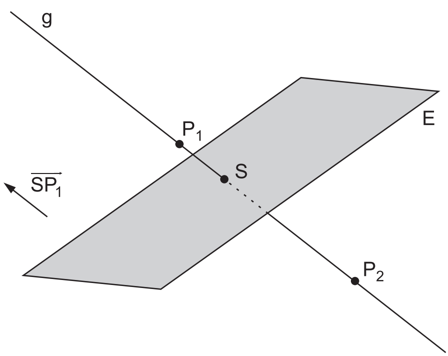
ist der Innenwinkel bei Eckpunkt B ein rechter Winkel.

1.3 Wegen $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{12} \neq \sqrt{6} = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ ist das Viereck ABCD kein Quadrat.

2.1 $2r + 2 \cdot (2 + 4r) - 2r = 2 \iff r = -\frac{1}{4}$, d. h.

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ und $S\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, 1 \,\middle|\, -\frac{1}{4}\right)$

2.2



3.1 Mit $x_1 = x_2 = x_3 = a$ ergibt sich $3a + 2a + 2a = 6 \iff a = \frac{6}{7}$.

3.2 Alle Punkte, deren drei Koordinaten übereinstimmen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Es gibt unendlich viele Ebenen, die parallel zu dieser Geraden sind und die Gerade nicht enthalten.

4.1 $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$

4.2 $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$

5.1

	M	$\overline{M}$	
Z	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{16}$
$\overline{Z}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{16}$
	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	1

5.2 Im grau hinterlegten Feld ist die Wahrscheinlichkeit dafür angegeben, dass der zufällig ausgewählte Fragebogen zu einer Person gehört, die sowohl weiblich als auch mit der Sauberkeit der Umkleideräume unzufrieden ist.

5.3 $P_{\overline{M}}(\overline{Z}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{Z})}{P(\overline{M})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$

6.1 Graph I gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f.
Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $(0 \mid f(0))$ nicht kleiner als –1 ist.

6.2 Für $1 \le x \le 3$ gilt $F'(x) = f(x) \le 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton fallend.

Alternative Lösung: Für $1 \le x \le 3$ gilt $F'(x) = f(x) < 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall streng monoton fallend.

7.1 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 - 4 = -3$

7.2 $1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot \left| \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx \right| = 3 + 2 \cdot \left| \left[x + \frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \right| = 3 + 2 \cdot \left| 2 - \frac{5}{2} \right| = 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$