2021

Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Gymnasium ... NRW

Mathematik GK

+ *Übungsaufgaben*
+ *Zusätzliche Aufgaben als PD*
+ *Lernvideos zur GTR/CAS-Nutz*

ActiveBook
Interaktives Training

STARK

Inhalt

Abiturprüfung 2019*

Abiturprüfung 2020*

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

* Da die Aufgabe B4 in den Jahrgängen 2017 bis 2020 für das Abitur ab 2021 nicht mehr prüfungsrelevant ist, wird diese nicht mehr abgedruckt.

Bei MyStark finden Sie:

– **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs
– **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
– **Jahrgang 2020**, sobald dieser zum Download bereit steht
– alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2020** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Grundkurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2021** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2021 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.

- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.

- Die schriftliche Abiturprüfung besteht seit 2017 aus folgenden beiden Teilen:
  Prüfungsteil A: Aufgaben **ohne Hilfsmittel**
  Prüfungsteil B: Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematische Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**

- Das Buch enthält **Übungsaufgaben**, die diese Struktur der schriftlichen Abiturprüfung abbilden, sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2019**.

- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.

- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  – **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs.
  – **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  – **Jahrgang 2020**, sobald dieser zum Download bereit steht
  – **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2020**, die nicht im Buch abgedruckt sind

  Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2021 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr Stark Verlag

Autoren:

Georg Breitenfeld
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B4;
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: d; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B5 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020;
Download: 2017 – B1 (CAS); 2018 – B1 (CAS); 2019 – B1 (CAS)

Herbert Kompernaß
Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1, B2, B3;
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: a, b, c; Prüfungsteil B: B2 (CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B2 (GTR / CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B2 (CAS), B3 (GTR / CAS);
Lösungen zur Abiturprüfung 2020;
Download: 2017 – B2 (GTR); 2019 – B2 (GTR)

Kristin Menke
Lösungen zur Abiturprüfung 2020

Hinweise und Tipps zum Abitur 2021

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.
Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik setzt sich seit dem Abitur 2017 zusammen aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**.
Ab dem Abitur 2021 ändern sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Grundkurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

- Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Diese sind verbindlich zu bearbeiten, d. h., es findet keine Auswahl durch die Fachlehrkraft statt. Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.
- Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet 2 Analysisaufgaben, 1 Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und 1 Stochastikaufgabe.
  Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:
  Der Prüfungsteil B wird aus **3 Aufgaben** gebildet, wobei eine **Analysisaufgabe**, die Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und die **Stochastikaufgabe** zu wählen sind.

  Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:
  - GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
  - Mathematische Formelsammlung
  - Deutsches Wörterbuch

Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen Ihnen im Grundkurs insgesamt **225 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit für den Prüfungsteil A, der von Ihnen zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 60 Minuten. Sobald Sie mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel. Sollten Sie den Prüfungsteil A schneller bearbeiten können, dürfen Sie auch schon früher mit dem Prüfungsteil B beginnen. Sie haben dann für diesen entsprechend mehr Zeit.

2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2021

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Grundkurs** Mathematik in der **Abiturprüfung 2021** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	Beispiele
Funktionen und Analysis	
• Funktionen als mathematische Modelle	2019 – Aufgabe B1 (GTR)
• Fortführung der Differenzialrechnung	
– Untersuchung von ganzrationalen Funktionen	2018 – Aufgabe B2 (GTR/CAS)
– Untersuchung von Funktionen des Typs $f(x) = p(x)e^{ax+b}$, wobei p(x) ein Polynom höchstens zweiten Grades ist	2018 – Aufgabe B1 (GTR)
– Untersuchung von Funktionen, die sich als einfache Summe der oben genannten Funktionstypen ergeben	2017 – Aufgabe B1 (GTR)
– Interpretation und Bestimmungen von Parametern der oben genannten Funktionen	2019 – Aufgabe B2 (CAS), Teilaufgabe a
– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
• Grundverständnis des Integralbegriffs	2017 – Aufgabe B2 (CAS), Teilaufgabe b
• Integralrechnung	2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe a
Analytische Geometrie und Lineare Algebra	
• lineare Gleichungssysteme	2017 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte	2019 – Aufgabe B3 (GTR/CAS)
• Lagebeziehungen	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe c
• Skalarprodukt	2018 – Aufgabe B3 (GTR/CAS), Teilaufgabe b

Stochastik • Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen • Binomialverteilung	 2017 – Aufgabe B5 (GTR/CAS) 2018 – Aufgabe B5 (GTR/CAS)

3 Leistungsanforderung und Bewertung

Im Grundkurs beläuft sich die Höchstpunktzahl für den Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) auf 25 Punkte und für den Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) auf 75 Punkte (Analysis 35 Punkte, Vektorielle Geometrie und Stochastik jeweils 20 Punkte).

Die Bewertung der Klausuraufgaben erfolgt auf der Grundlage eines der Aufgabenstellung beigefügten Bewertungsschemas. Darin sind Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Das Bewertungsschema ist Grundlage der Beurteilung. Von der Modelllösung abweichende Lösungen werden entsprechend bewertet, die für die Aufgabenstellung vorgesehene Höchstpunktzahl kann aber nicht überschritten werden. Ferner können nur ganze Punktzahlen vergeben werden. Ausschlaggebend ist hier die fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit.

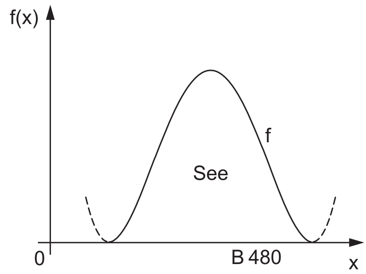
Ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium ist die Darstellungsleistung, in welche der richtige Einsatz der Fachsprache und die Strukturiertheit der Ausführungen einfließen. Die Bewertung der Darstellungsleistung wird in die Bewertung der inhaltlichen Leistungen integriert. Punktabzug aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (Rechtschreibung und Grammatik) kann im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen erfolgen.

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung
Prüfungsteil B – Analysis B1

Eingeschlossen von der Bundesstraße B 480, die in einem geeigneten Koordinatensystem entlang der x-Achse verläuft, und dem Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 16, \ x \in \mathbb{R}$

befindet sich ein See. Der Sachverhalt ist in der Abbildung skizziert.



Abbildung

a) (1) Berechnen Sie die Größe des Sees unter der Annahme, dass 1 Längeneinheit 50 m sind.

(2) Es wird vermutet, dass im Punkt A des Sees, der am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist, eine Verschmutzung stattgefunden hat.
Bestimmen Sie unter Angabe der Ableitungen der Funktion f und des rechnerischen Nachweises der hinreichenden Bedingung die Koordinaten von A.

b) An der Stelle des Sees, an dem die Verschmutzung vermutet wird, werden Wasserproben entnommen und die Anzahl der Kleinlebewesen in den Proben wird ermittelt. Die Ergebnisse der Proben sind in der Tabelle dargestellt:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250

Tabelle

(1) Begründen Sie, warum im angegebenen Zeitraum von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden kann.

(2) Unter Berücksichtigung, dass zu Beginn der Beobachtung 2 000 Kleinlebewesen und nach 21 Tagen nur noch 250 Kleinlebewesen in den entsprechenden Proben gezählt werden, soll die exponentielle Abnahme nun durch eine Funktion modelliert werden.
Zeigen Sie durch Lösen eines Gleichungssystems, dass die Modellierung auf eine Funktion mit der Gleichung

$a(t) = 2\,000 \cdot e^{-0{,}099t}, \ 0 \leq t \leq 21$

führt. Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Tag und a(t) als Anzahl der Kleinlebewesen zum Zeitpunkt t aufgefasst.

Lösung

a) (1) Zur Berechnung des Flächeninhaltes des Sees werden die gemeinsamen Punkte des Graphen der Funktion f, durch den der See begrenzt wird, mit der Bundesstraße B 480 ermittelt. Dies sind die Schnitt- bzw. Berührpunkte des Graphen mit der x-Achse, also die Nullstellen der Funktion f.

GTR

$f(x):=x^4-10\cdot x^3+33\cdot x^2-40\cdot x+16$	*Fertig*
polyRoots$(f(x),x)$	$\{1,1,4,4\}$

CAS

$f(x):=x^4-10\cdot x^3+33\cdot x^2-40\cdot x+16$	*Fertig*
solve$(f(x)=0,x)$	$x=1$ or $x=4$

Die Funktion f hat die doppelten Nullstellen $x_1=1$ und $x_2=4$.

Die Größe des Sees entspricht im Modell dem Inhalt der Fläche, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse einschließt. Dieser Flächeninhalt ist gleich dem Wert des Integrals der Funktion f im Bereich [1; 4].

$$\int_1^4 f(x)\,dx = 8{,}1\,[\text{FE}]$$

GTR/CAS

$\int_1^4 f(x)\,dx$	8.1
$8.1\cdot 2500$	20250.

Da 1 Längeneinheit 50 m sind, entspricht 1 Flächeneinheit folgende Quadratmeterzahl:
$50\text{ m}\cdot 50\text{ m}=2\,500\text{ m}^2$

Die Fläche des Sees beträgt somit:
$8{,}1\cdot 2\,500\text{ m}^2=20\,250\text{ m}^2$

[Umgerechnet in Ar sind dies 202,5 a.]

(2) Der Punkt, der am weitesten von der Bundesstraße B 480 entfernt ist, ist der lokale (relative) Hochpunkt des Graphen der Funktion f.

Die 1. Ableitung der Funktion f wird mit der Summen- und Potenzregel bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\cdot x^3-10\cdot 3x^2+33\cdot 2x-40 \\ &= 4x^3-30x^2+66x-40 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für eine Maximalstelle: $f'(x)=0$

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_1=1 \text{ oder } x_2=\frac{5}{2} \text{ oder } x_3=4$$

GTR

$a1f(x):=4\cdot x^3-30\cdot x^2+66\cdot x-40$	*Fertig*
polyRoots$(a1f(x),x)$	$\left\{1,\frac{5}{2},4\right\}$

CAS

$a1f(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$4\cdot x^3-30\cdot x^2+66\cdot x-40$
solve$(a1f(x)=0,x)$	$x=1$ or $x=\frac{5}{2}$ or $x=4$

Die Stellen $x_1=1$ und $x_3=4$ kommen für ein Maximum nicht infrage, da sie die gemeinsamen Punkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse sind. Somit bleibt nur $x_2=\frac{5}{2}$ als Kandidat für eine Maximalstelle.

Für die 2. Ableitung der Funktion f gilt:

$$f''(x) = 4 \cdot 3x^2 - 30 \cdot 2x + 66$$
$$= 12x^2 - 60x + 66$$

Hinreichende Bedingung für eine Maximalstelle: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = -9 < 0$$

Durch Berechnung des entsprechenden Funktionswertes ergibt sich, dass der Punkt $A\left(\frac{5}{2} \,\middle|\, \frac{81}{16}\right)$ am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist.

GTR

$a2f(x) := 12 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 66$ Fertig

CAS

$a2f(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ Fertig

$a2f(x)$ $12 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 66$

GTR/CAS

$a2f\left(\frac{5}{2}\right)$ -9

$f\left(\frac{5}{2}\right)$ $\frac{81}{16}$

b) (1) Von einer exponentiellen Abnahme kann dann ausgegangen werden, wenn der Abnahmefaktor je Zeiteinheit annähernd gleich ist.

Ist B_0 der Anfangsbestand und q der Abnahmefaktor, so erhält man zu den angegebenen Zeiten bei einer exponentiellen Abnahme folgende allgemeine Werte:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250
Werte bei exponentieller Abnahme	B_0	$B_0 \cdot q^1$	$B_0 \cdot q^4$	$B_0 \cdot q^{10}$	$B_0 \cdot q^{21}$

Aus der ersten Spalte der Tabelle kann der Anfangsbestand $B_0 = 2\,000$ abgelesen werden. Aus den weiteren Spalten erhält man dann:

$$1\,810 = 2\,000 \cdot q^1 \Rightarrow q = \frac{1\,810}{2\,000} = 0{,}905$$

$$1\,350 = 2\,000 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1\,350}{2\,000}} \approx 0{,}906$$

$$740 = 2\,000 \cdot q^{10} \Rightarrow q = \sqrt[10]{\frac{740}{2\,000}} \approx 0{,}905$$

$$250 = 2\,000 \cdot q^{21} \Rightarrow q = \sqrt[21]{\frac{250}{2\,000}} \approx 0{,}906$$

GTR/CAS

$\text{approx}\left(\frac{1810}{2000}\right)$ 0.905

$\text{approx}\left(\sqrt[4]{\frac{1350}{2000}}\right)$ 0.906413

$\text{approx}\left(\sqrt[10]{\frac{740}{2000}}\right)$ 0.905358

$\text{approx}\left(\sqrt[21]{\frac{250}{2000}}\right)$ 0.905724

Der Wachstumsfaktor q ist annähernd gleich. Daher kann von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden.

Abiturprüfung 2019 Mathematik Grundkurs (Nordrhein-Westfalen)
Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel

Punkte

a) Gegeben sind die Funktionen g und h durch die Gleichungen

$g(x) = x^2 - x + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ und

$h(x) = -x^2 - 5x + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von g und h nur für $x = -2$ und $x = 0$ schneiden. 2

(2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Graphen von g und h einschließen. 4

b) Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = x \cdot e^{2x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) Bestimmen Sie die erste Ableitung. 3

Für die zweite Ableitung von f gilt: $f''(x) = (4x + 4) \cdot e^{2x+2}$

(2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.
Hinweis: Auf den Nachweis einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden. 3

c) In einer Urne befinden sich drei rote und sieben weiße Kugeln.

(1) Zweimal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens eine der entnommenen Kugeln weiß ist. 3

(2) Zehnmal nacheinander wird jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der entnommenen weißen Kugeln.
Begründen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass keine der folgenden Abbildungen 1 und 2 die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellt. 3

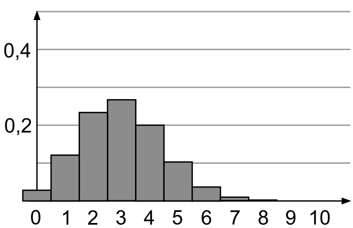


Abbildung 1

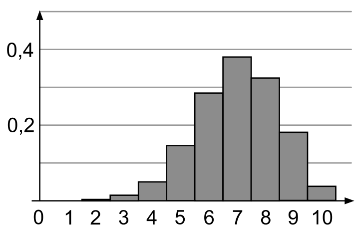


Abbildung 2

Lösung

a) (1) Zur Berechnung der Schnittstellen werden die Funktionsterme gleichgesetzt.

$$g(x) = h(x)$$
$$x^2 - x + 1 = -x^2 - 5x + 1$$
$$2x^2 + 4x = 0$$
$$2x \cdot (x + 2) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -2$$

(2) Zu berechnen ist das bestimmte Integral:

$$\int_{-2}^{0} (h(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{0} (-x^2 - 5x + 1 - (x^2 - x + 1))\, dx$$
$$= \int_{-2}^{0} (-2x^2 - 4x)\, dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$
$$= 0 - \left(\frac{16}{3} - 8\right) = 0 - \left(\frac{16}{3} - \frac{24}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beträgt $\frac{8}{3}$ FE.

Haben Sie die Differenzfunktion andersherum gewählt, also über $g(x) - h(x)$ integriert, ist der Wert des bestimmten Integrals negativ. Das Integral wird in diesem Fall negativ, da der Graph von g zwischen den Schnittstellen unterhalb des Graphen von h verläuft. (Der Graph von g ist eine nach oben geöffnete Parabel, der Graph von h eine nach unten geöffnete.)
Für den Flächeninhalt ist dann der entsprechende positive Wert anzugeben.

b) (1) Eine Ableitung mithilfe der Produkt- und Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x+2} + x \cdot 2 \cdot e^{2x+2} = e^{2x+2} \cdot (1 + 2x)$$

(2) Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle lautet $f''(x) = 0$.

$$(4x + 4) \cdot e^{2x+2} = 0 \qquad \Big|: e^{2x+2} \neq 0$$
$$4x + 4 = 0$$
$$x = -1$$

Die hinreichende Bedingung muss nicht überprüft werden.

Einsetzen der (möglichen) Wendestelle in den Funktionsterm ergibt:

$$f(-1) = -1 \cdot e^{2 \cdot (-1) + 2} = -e^0 = -1$$

Der Graph der Funktion f hat den Wendepunkt $W(-1 \mid -1)$.

c) (1) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich einfacher über die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses berechnen:

P(„höchstens eine Kugel ist weiß“) = 1 − P(„beide Kugeln sind weiß“)

$$= 1 - \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 1 - \frac{49}{100} = \frac{51}{100}$$

(2) Die beschriebene Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}7$.

Für den Erwartungswert von X gilt $E(X) = 10 \cdot 0{,}7 = 7$. Deshalb muss der größte Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in der Nähe von $k = 7$ liegen. Bei Abbildung 1 liegt das Maximum aber bei 3 Treffern vor, deshalb kann Abbildung 1 nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellen.

Abbildung 2 kann keine Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße darstellen, da die Summe der Werte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung genau 1 ist, während die Summe der Werte in Abbildung 2 deutlich größer als 1 ist.

d) (1) Einsetzen des Ortsvektors des Punktes B in die Geradengleichung ergibt die Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}75 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nach Umschreiben der Vektorgleichung in die Koordinatengleichungen erhält man das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4 = -r \qquad \Rightarrow \quad r = -4 \\ \text{II} & -1 = 2 + 0{,}75r \\ \text{III} & z = 2 - 2r \end{array}$$

Einsetzen von $r = -4$ in III ergibt:

$z = 2 - 2 \cdot (-4) = 10$

Der Punkt B hat die Koordinaten $B(4\,|\,-1\,|\,10)$.

Da laut Aufgabenstellung der Punkt B auf der Geraden g liegt, muss keine Probe mit Gleichung II durchgeführt werden.

(2) Für den Abstand der Punkte $A(0\,|\,2\,|\,2)$ und $C(-3\,|\,y\,|\,6)$ gilt:

$$d(A;C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (y-2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9 + (y-2)^2 + 16} = \sqrt{25 + (y-2)^2}$$

Für $y = 2$ ist der Term $(y-2)^2$ gleich 0 und der Abstand beträgt $\sqrt{25} = 5$.

Für $y \neq 2$ ist der Term $(y-2)^2$ größer als 0 und somit $\sqrt{25 + (y-2)^2} > 5$.

Der Abstand der Punkte A und C beträgt daher mindestens 5 [LE].