

2021

# Abitur

Original-Prüfung  
mit Lösungen

**MEHR  
ERFAHREN**

Gymnasium Mathematik Klasse 12 NRW

## Mathematik LK

- + Übungsaufgaben
- + Zusätzliche Aufgaben als PDF
- + Lernvideos zur GTR/CAS-Nutzung

**ActiveBook**  
• Interaktives  
Training



**STARK**

# Inhalt

## Vorwort

## Stichwortverzeichnis

## Hinweise und Tipps zum Abitur 2021

1	Ablauf der Prüfung .....	I
2	Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2021 .....	II
3	Leistungsanforderung und Bewertung .....	III
4	Operatoren und Anwendungsbereiche .....	IV
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung .....	VII
6	Hinweise zum Lösen mit dem GTR bzw. CAS .....	XII

## Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung

Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel .....	1
Prüfungsteil B – Analysis B1 .....	9
Prüfungsteil B – Analysis B2 .....	19
Prüfungsteil B – Vektorielle Geometrie B3 .....	30
Prüfungsteil B – Stochastik B4 .....	39

## Abiturprüfung 2017\*

Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel .....	2017-1
Prüfungsteil B – Analysis B1 (GTR): $f_a(x) = x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$ .....	2017-9
Prüfungsteil B – Analysis B2 (CAS): $g(t) = -0,08 \cdot t^3 + 0,6324 \cdot t^2 + 0,54432 \cdot t + 8$ .....	2017-19
Prüfungsteil B – Vektorielle Geometrie B3 (GTR/CAS) .....	2017-27
Prüfungsteil B – Stochastik B5 (GTR) .....	2017-40

## Abiturprüfung 2018\*

Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel .....	2018-1
Prüfungsteil B – Analysis B1 (GTR): $Q_k(t) = 1000(1 - e^{-k \cdot t})$ .....	2018-9
Prüfungsteil B – Analysis B2 (GTR/CAS): $f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$ .....	2018-18
Prüfungsteil B – Vektorielle Geometrie B3 (GTR/CAS) .....	2018-28
Prüfungsteil B – Stochastik B5 (GTR/CAS) .....	2018-44

## Abiturprüfung 2019\*

Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel .....	2019-1
Prüfungsteil B – Analysis B1 (GTR): $f(t) = 296 \cdot e^{0,17 \cdot t}$ $k_a(t) = 296 \cdot e^{2,55} + 50,32(t-15) \cdot e^{2,55 - a(t-15)}$ .....	2019-9
Prüfungsteil B – Analysis B2 (CAS): $f_k(x) = x^3 - 3 \cdot k^2 \cdot x$ .....	2019-16
Prüfungsteil B – Vektorielle Geometrie B3 (GTR/CAS) .....	2019-24
Prüfungsteil B – Stochastik B5 (GTR/CAS) .....	2019-35

## Abiturprüfung 2020\*

Online als PDF zum Download ..... [www.stark-verlag.de/mystark](http://www.stark-verlag.de/mystark)

Das Corona-Virus hat im vergangenen Schuljahr auch die Prüfungsabläufe durcheinandergebracht und manches verzögert. Daher sind die Aufgaben und Lösungen zur Prüfung 2020 in diesem Jahr nicht im Buch abgedruckt, sondern erscheinen in digitaler Form. Sobald die Original-Prüfungsaufgaben 2020 zur Veröffentlichung freigegeben sind, können Sie sie als PDF auf der Plattform MyStark herunterladen.

\* Da die Aufgabe B4 in den Jahrgängen 2017 bis 2020 für das Abitur ab 2021 nicht mehr prüfungsrelevant ist, wird diese nicht mehr abgedruckt.



Bei MyStark finden Sie:

- **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs
- **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
- **Jahrgang 2020**, sobald dieser zum Download bereit steht
- alle **Original-Prüfungsaufgaben** der Jahre **2017 bis 2020** mit Lösungen, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im Interaktiven Training und unter [www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/](http://www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/) finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik in Nordrhein-Westfalen als Leistungskurs belegt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur abzulegen. Mit diesem Buch helfen wir Ihnen, sich effektiv auf das **Zentralabitur 2021** vorzubereiten:

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches viele Informationen zur **gezielten Vorbereitung auf die Abiturprüfung**. Dazu gehören u. a. eine Aufstellung der für die Prüfung 2021 relevanten inhaltlichen Schwerpunkte und Fokussierungen, Hinweise zum Ablauf der Prüfung sowie alles Wissenswerte zur Struktur und zu den Anforderungen der Prüfungsaufgaben.
- Sie finden darüber hinaus zahlreiche **praktische Hinweise**, die Ihnen sowohl bei der Vorbereitung auf das Abitur als auch während der Prüfung dazu verhelfen, Prüfungsaufgaben gut zu lösen.
- Die schriftliche Abiturprüfung besteht seit 2017 aus folgenden beiden Teilen:  
**Prüfungsteil A:** Aufgaben **ohne Hilfsmittel**  
**Prüfungsteil B:** Aufgaben mit realitätsnahem Kontext und innermathematische Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**
- Das Buch enthält **Übungsaufgaben**, die diese Struktur der schriftlichen Abiturprüfung abbilden, sowie die vom Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gestellten **Original-Abituraufgaben 2017 bis 2019**.
- Zu sämtlichen Aufgaben wurden von unseren Autoren **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge** sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz** ausgearbeitet, die Ihnen das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern.
- Zudem ist dieses Buch ein **ActiveBook** – das bedeutet, Sie erhalten zusätzliches Übungsmaterial **online bei MyStark**:
  - **Interaktives Training** zum hilfsmittelfreien Teil A des Abiturs.
  - **Lernvideos** zum Einsatz Ihres GTR bzw. CAS
  - **Jahrgang 2020**, sobald dieser zum Download bereit steht
  - **Original-Abituraufgaben** der Jahre **2017 bis 2020**, die nicht im Buch abgedruckt sind

Ausführliche Infos dazu inkl. Zugangscode zu MyStark finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.



Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2021 vom Schulministerium bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu ebenfalls bei MyStark.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Ihr Stark Verlag

## **Autoren:**

---

### **Georg Breitenfeld**

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B4;  
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: d; Prüfungsteil B: B5 (GTR);  
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B5 (GTR/CAS);  
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: b, d; Prüfungsteil B: B5 (GTR/CAS);  
Lösungen zur Abiturprüfung 2020;  
Download: 2017 – B5 (CAS)

### **Herbert Kompernaß**

Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1, B2, B3;  
Lösungen zur Abiturprüfung 2017 – Prüfungsteil A: a, b, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR/CAS);  
Lösungen zur Abiturprüfung 2018 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (GTR/CAS), B3 (GTR/CAS);  
Lösungen zur Abiturprüfung 2019 – Prüfungsteil A: a, c; Prüfungsteil B: B1 (GTR), B2 (CAS), B3 (GTR/CAS);  
Lösungen zur Abiturprüfung 2020;  
Download: 2017 – B1 (CAS), B2 (GTR); 2018 – B1 (CAS); 2019 – B1 (CAS), B2 (GTR)

### **Kristin Menke**

Lösungen zur Abiturprüfung 2020



# Hinweise und Tipps zum Abitur 2021

## 1 Ablauf der Prüfung

---

### Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Nordrhein-Westfalen gibt es im Fach Mathematik zentrale schriftliche Abiturprüfungen. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Bildung erstellt. Grundlage für die zentral gestellten Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung sind die verbindlichen Vorgaben der Kernlehrpläne für die gymnasiale Oberstufe.

Die schriftliche Abiturprüfung in Mathematik setzt sich seit dem Abitur 2017 zusammen aus einem **Prüfungsteil A**, der **hilfsmittelfrei** zu bearbeitende Aufgaben umfasst, und einem **Prüfungsteil B**, bestehend aus Aufgaben mit realitätsnahe Kontext und innermathematischen Argumentationsaufgaben **mit Hilfsmitteln**.

Ab dem Abitur 2021 ändern sich die zeitlichen Vorgaben für die Bearbeitung. Die Aufgaben der früheren Abiturprüfungen sind inhaltlich (allerdings nicht unbedingt vom Umfang her) als Übungsmaterial weiterhin gut geeignet.

### Aufbau der Prüfungsaufgaben

Die schriftliche Abiturprüfung für den Leistungskurs gliedert sich in zwei Prüfungsteile:

- Für den **Prüfungsteil A** erhält die Schule einen Satz **hilfsmittelfrei** zu bearbeitender Aufgaben, die grundlegende mathematische Kompetenzen abfragen. Diese sind verbindlich zu bearbeiten, d. h., es findet keine Auswahl durch die Fachlehrkraft statt. Beim Lösen der Aufgaben darf **kein Taschenrechner** und **keine Formelsammlung** verwendet werden.
- Für den **Prüfungsteil B** erhält die Schule zwei Aufgabensätze – einen GTR-Aufgabensatz und einen CAS-Aufgabensatz. Jeder Aufgabensatz beinhaltet 2 Analysisaufgaben, 1 Aufgabe zur Vektoriellen Geometrie und 1 Stochastikaufgabe. Die **Fachlehrkraft** stellt aus einem der beiden Aufgabensätze (GTR oder CAS) die Aufgaben für den Prüfungsteil B nach folgenden Vorgaben zusammen:  
Der Prüfungsteil B wird aus **3 Aufgaben** gebildet, wobei eine **Analysisaufgabe**, die Aufgabe zur **Vektoriellen Geometrie** und die **Stochastikaufgabe** zu wählen sind.

Zugelassene **Hilfsmittel** für den Prüfungsteil B:

- GTR (grafikfähiger Taschenrechner) **oder** CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Deutsches Wörterbuch

## Dauer der Prüfung

Für die Bearbeitung stehen Ihnen im Leistungskurs insgesamt **270 Minuten** zur Verfügung. Dabei beträgt die Arbeitszeit für den Prüfungsteil A, der von Ihnen zu Beginn der Prüfung bearbeitet wird, maximal 70 Minuten. Sobald Sie mit dem Prüfungsteil A fertig sind, können Sie Ihre Ausarbeitungen bei der Aufsicht führenden Lehrkraft abgeben. Sie erhalten dann die Aufgaben des Prüfungsteils B, einschließlich der zugelassenen Hilfsmittel. Sollten Sie den Prüfungsteil A schneller bearbeiten können, dürfen Sie auch schon früher mit dem Prüfungsteil B beginnen. Sie haben dann für diesen entsprechend mehr Zeit.

## 2 Inhaltliche Schwerpunkte und Fokussierungen 2021

Die inhaltlichen **Schwerpunkte und Fokussierungen** für den **Leistungskurs Mathematik** in der **Abiturprüfung 2021** sind folgende:

Schwerpunkte und Fokussierungen	Beispiele
<b>Funktionen und Analysis</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Funktionen als mathematische Modelle</li><li>• Fortführung der Differenzialrechnung<ul style="list-style-type: none"><li>– Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern</li><li>– notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)</li></ul></li><li>• Grundverständnis des Integralbegriffs</li><li>• Integralrechnung</li></ul>	2018 – Aufgabe B1 (GTR)  2017 – Aufgabe B1 (GTR)  2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe a 2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe c 2019 – Aufgabe A, Teilaufgabe b
<b>Analytische Geometrie und Lineare Algebra</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• lineare Gleichungssysteme</li><li>• Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte</li><li>• Lagebeziehungen und Abstände</li><li>• Skalarprodukt</li></ul>	2017 – Aufgabe A, Teilaufgabe c 2019 – Aufgabe B3 (GTR/CAS) 2017 – Aufgabe B3 (GTR/CAS) 2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe a



<b>Stochastik</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen</li> <li>• Binomialverteilung und Normalverteilung</li> <li>• Testen von Hypothesen</li> </ul>	2018 – Aufgabe A, Teilaufgabe d 2017 – Aufgabe B5 (GTR) 2018 – Aufgabe B5 (GTR/CAS)
--	---

### 3 Leistungsanforderung und Bewertung

---

Im Leistungskurs beläuft sich die Höchstpunktzahl für den Prüfungsteil A (ohne Hilfsmittel) auf 30 Punkte und für den Prüfungsteil B (mit Hilfsmitteln) auf 90 Punkte (Analysis 40 Punkte, Vektorielle Geometrie und Stochastik jeweils 25 Punkte).

Die Bewertung der Klausuraufgaben erfolgt auf der Grundlage eines der Aufgabenstellung beigegefügtten Bewertungsschemas. Darin sind Teilleistungen ausgewiesen, die die mit der jeweiligen Aufgabe verbundenen Anforderungen aufschlüsseln. Das Bewertungsschema ist Grundlage der Beurteilung. Von der Modelllösung abweichende Lösungen werden entsprechend bewertet, die für die Aufgabenstellung vorgesehene Höchstpunktzahl kann aber nicht überschritten werden. Ferner können nur ganze Punktzahlen vergeben werden. Ausschlaggebend ist hier die fachliche Richtigkeit und Vollständigkeit.

Ein weiteres wichtiges Bewertungskriterium ist die Darstellungsleistung, in welche der richtige Einsatz der Fachsprache und die Strukturiertheit der Ausführungen einfließen. Die Bewertung der Darstellungsleistung wird in die Bewertung der inhaltlichen Leistungen integriert. Punktabzug aufgrund von gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit (Rechtschreibung und Grammatik) kann im Anschluss an die Bewertung der inhaltlichen Leistungen erfolgen.



# Übungsaufgaben im Stil der Abiturprüfung

## Prüfungsteil B – Analysis B1

Eingeschlossen von der Bundesstraße B 480, die in einem geeigneten Koordinatensystem entlang der x-Achse verläuft, und dem Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{8}(x-2)^2 \cdot (x+2)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

befindet sich ein See. Der Sachverhalt ist in Abbildung 1 skizziert.

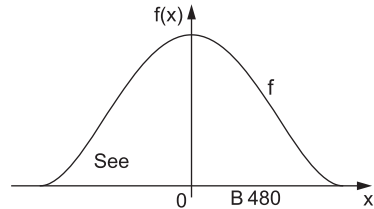


Abbildung 1

- a) (1) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die Funktion f auch in der Form

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$$

darstellen lässt und dass der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

- (2) Es wird vermutet, dass im Punkt S des Sees, der am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist, eine Verschmutzung stattgefunden hat.

Bestimmen Sie unter Angabe der Ableitungen der Funktion f und des rechnerischen Nachweises der hinreichenden Bedingung die Koordinaten von S.

- b) An der Stelle des Sees, an dem die Verschmutzung vermutet wird, werden Wasserproben entnommen und die Anzahl der Kleinlebewesen in den Proben wird ermittelt. Die Ergebnisse der Proben sind in der Tabelle dargestellt:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250

Tabelle

- (1) Begründen Sie, warum im angegebenen Zeitraum von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden kann.
- (2) Die Anzahl der Kleinlebewesen in den Proben soll durch eine Funktion der Form  $a(t) = b \cdot e^{kt}$ ,  $0 \leq t \leq 21$  modelliert werden, wobei die Parameter b und k geeignet zu wählen sind und t als Maßzahl zur Einheit 1 Tag sowie a(t) als die Anzahl der Kleinlebewesen zum Zeitpunkt t aufgefasst wird. Bestimmen Sie die Parameter b und k unter Berücksichtigung, dass zu Beginn der Beobachtung 2 000 Kleinlebewesen und nach 21 Tagen nur noch 250 Kleinlebewesen vorhanden sind.



## Lösung

- a) (1) Der Funktionsterm von  $f$  wird ausmultipliziert.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{8}(x-2)^2 \cdot (x+2)^2 = \frac{1}{8}((x-2) \cdot (x+2))^2 \\ &= \frac{1}{8}(x^2-4)^2 = \frac{1}{8}(x^4-8x^2+16) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2 \end{aligned}$$

Der Funktionsterm von  $f$  weist nur Potenzen von  $x$  mit geraden Exponenten auf. Daher gilt:

$$f(-x) = \frac{1}{8}(-x)^4 - (-x)^2 + 2 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2 = f(x)$$

Der Graph der Funktion  $f$  ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.

- (2) Der Punkt, der am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist, ist der lokale (relative) Hochpunkt des Graphen der Funktion  $f$ .

Die 1. Ableitung der Funktion  $f$  wird mit der Summen- und Potenzregel bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{8} \cdot 4x^3 - 2x \\ &= \frac{1}{2}x^3 - 2x \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung für eine Maximalstelle:  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -2 \text{ oder } x_2 = 0 \text{ oder } x_3 = 2$$

Die Stellen  $x_1 = -2$  und  $x_3 = 2$  kommen für ein Maximum nicht infrage, da sie die gemeinsamen Punkte des Graphen der Funktion  $f$  mit der  $x$ -Achse sind.

Somit bleibt nur  $x_2 = 0$  als Kandidat für eine Maximalstelle.

Für die 2. Ableitung der Funktion  $f$  gilt:

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$$

Hinreichende Bedingung für eine Maximalstelle:  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$

$$f''(0) = -2 < 0$$

Durch Berechnung des Funktionswertes  $f(0) = 2$  ergibt sich, dass der Punkt  $S(0|2)$  am weitesten von der Bundesstraße entfernt ist.

### GTR

$f(x) := \frac{1}{8} \cdot x^4 - x^2 + 2$	Fertig
$a1f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^3 - 2 \cdot x$	Fertig
$\text{polyRoots}(a1f(x), x)$	$\{-2, 0, 2\}$
$a2f(x) := \frac{3}{2} \cdot x^2 - 2$	Fertig
$a2f(0)$	-2

### CAS

$f(x) := \frac{1}{8} \cdot x^4 - x^2 + 2$	Fertig
$a1f(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$	Fertig
$a1f(x)$	$\frac{x^3}{2} - 2 \cdot x$
$\text{solve}(a1f(x)=0, x)$	$x=-2 \text{ or } x=0 \text{ or } x=2$
$a2f(x) := \frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	Fertig
$a2f(x)$	$\frac{3 \cdot x^2}{2} - 2$
$a2f(0)$	-2

### GTR/CAS

$f(0)$	2
--------	---

- b) (1) Von einer exponentiellen Abnahme kann dann ausgegangen werden, wenn der Abnahmefaktor je Zeiteinheit annähernd gleich ist.

Ist  $B_0$  der Anfangsbestand und  $q$  der Abnahmefaktor, so erhält man zu den angegebenen Zeiten bei einer exponentiellen Abnahme folgende allgemeine Werte:

Zeit in Tagen nach Beobachtungsbeginn	0	1	4	10	21
Anzahl der Kleinlebewesen	2 000	1 810	1 350	740	250
Werte bei exponentieller Abnahme	$B_0$	$B_0 \cdot q^1$	$B_0 \cdot q^4$	$B_0 \cdot q^{10}$	$B_0 \cdot q^{21}$

Aus der ersten Spalte der Tabelle kann der Anfangsbestand  $B_0 = 2\,000$  abgelesen werden. Aus den weiteren Spalten erhält man dann:

$$1\,810 = 2\,000 \cdot q^1 \Rightarrow q = \frac{1\,810}{2\,000} = 0,905$$

$$1\,350 = 2\,000 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt[4]{\frac{1\,350}{2\,000}} \approx 0,906$$

$$740 = 2\,000 \cdot q^{10} \Rightarrow q = \sqrt[10]{\frac{740}{2\,000}} \approx 0,905$$

$$250 = 2\,000 \cdot q^{21} \Rightarrow q = \sqrt[21]{\frac{250}{2\,000}} \approx 0,906$$

### GTR/CAS

$\text{approx}\left(\frac{1810}{2000}\right)$	0.905
$\text{approx}\left(\sqrt[4]{\frac{1350}{2000}}\right)$	0.906413
$\text{approx}\left(\sqrt[10]{\frac{740}{2000}}\right)$	0.905358
$\text{approx}\left(\sqrt[21]{\frac{250}{2000}}\right)$	0.905724

Der Wachstumsfaktor  $q$  ist annähernd gleich. Daher kann von einer exponentiellen Abnahme ausgegangen werden.

- (2) Unter Berücksichtigung der beiden im Aufgabentext angegebenen Probenergebnisse ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\text{I } a(0) = b \cdot e^{k \cdot 0} \Leftrightarrow 2\,000 = b \cdot e^0 \Leftrightarrow 2\,000 = b$$

$$\text{II } a(21) = b \cdot e^{k \cdot 21} \Leftrightarrow 250 = b \cdot e^{k \cdot 21}$$

Einsetzen von  $b = 2\,000$  aus Gleichung I in Gleichung II führt auf:

$$250 = 2\,000 \cdot e^{k \cdot 21}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$k \approx -0,099$$

Die Modellierung führt also auf eine Funktion mit der Gleichung:

$$a(t) = 2\,000 \cdot e^{-0,099t}, \quad 0 \leq t \leq 21$$

### GTR

$\text{nSolve}(250=2000 \cdot e^{k \cdot 21}, k)$	-0.099021
---	-----------

### CAS

$\text{solve}(250=2000 \cdot e^{k \cdot 21}, k)$	$k=-0.099021$
--	---------------



**Abiturprüfung 2019 Mathematik Leistungskurs (Nordrhein-Westfalen)**  
**Prüfungsteil A – Aufgaben ohne Hilfsmittel**

Punkte

- a) Gegeben ist die Funktion  $f$  durch die Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-x+2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (1) Bestimmen Sie die erste Ableitung.

$$[\text{Zur Kontrolle: } f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) \cdot e^{-x+2}]$$

2

Ohne Nachweis kann im Folgenden benutzt werden:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right) \cdot e^{-x+2}$$

- (2) Weisen Sie nach, dass ein lokaler Hochpunkt existiert, und geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes an.

4

- b) Gegeben ist die Funktion  $f$  durch die Gleichung

$$f(x) = x^4 - 2 \cdot x^3 - x^2 + 2 \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In der Abbildung 1 ist der Graph der Funktion  $f$  dargestellt.

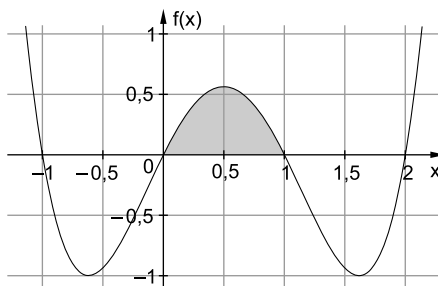


Abbildung 1

- (1) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche. Die Nullstellen von  $f$  dürfen Sie dabei in der Abbildung ablesen.
- (2) Der Graph der Funktion  $f$  schließt mit der  $x$ -Achse eine Fläche ein. Der Inhalt dieser Fläche soll durch einen Term beschrieben werden. Entscheiden Sie für jeden der folgenden Terme A, B und C, ob er dazu geeignet ist oder nicht.

3

$$\int_{-1}^2 |f(x)| dx$$

A

$$\left| \int_{-1}^2 f(x) dx \right|$$

B

$$-\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

C

3





## Lösung

- a) (1) Eine Ableitung mithilfe der Produkt- und Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{-x+2} + \frac{1}{2} x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x+2} = e^{-x+2} \cdot \left( x - \frac{1}{2} x^2 \right)$$

- (2) Die notwendige Bedingung für eine Extremstelle lautet  $f'(x) = 0$ .

$$e^{-x+2} \cdot \left( x - \frac{1}{2} x^2 \right) = 0 \quad | : e^{-x+2} \neq 0$$

$$x - \frac{1}{2} x^2 = 0$$

$$x \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} x \right) = 0$$

Ein Produkt wird null, wenn wenigstens ein Faktor gleich null ist.

$$x = 0 \vee 1 - \frac{1}{2} x = 0$$

$$x = 0 \vee x = 2$$

Die hinreichende Bedingung für einen Hochpunkt lautet  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$ . Einsetzen der möglichen Extremstellen in die vorgegebene 2. Ableitung führt zu:

$$f''(0) = 1 \cdot e^2 > 0$$

$$f''(2) = (2 - 4 + 1) \cdot e^0 = -1 < 0$$

$x = 2$  ist eine Maximumstelle.

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot e^{-2+2} = 2$$

Der Graph der Funktion  $f$  hat den Hochpunkt  $H(2|2)$ .

- b) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x$ .

- (1) Die schraffierte Fläche liegt vollständig oberhalb der  $x$ -Achse; ihr Inhalt ergibt sich daher durch das bestimmte Integral über  $f(x)$  in den Grenzen von 0 bis 1:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \left[ \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_0^1 \\ &= \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 \right) - 0 \\ &= \frac{6-15-10+30}{30} = \frac{11}{30} \end{aligned}$$

Der Inhalt der schraffierten Fläche beträgt  $\frac{11}{30}$  FE.

- (2) Die Terme A und C sind zur Berechnung des Flächeninhaltes geeignet, Term B nicht.

*Mögliche Begründung* (nicht verlangt!):

Liegt der Graph einer Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  vollständig oberhalb der  $x$ -Achse, so gibt das bestimmte Integral  $\int_a^b f(x) dx$  den Flächeninhalt unter dem

Graphen im Intervall  $[a; b]$  an. Liegt der Graph einer Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  vollständig unterhalb der  $x$ -Achse, so gibt das bestimmte Integral den Flächeninhalt mit negativem Vorzeichen an.

Bei Term A werden durch die Betragsstriche die Teile des Graphen von  $f$ , die unterhalb der  $x$ -Achse liegen, an der  $x$ -Achse gespiegelt; der Graph liegt dann vollständig oberhalb der  $x$ -Achse.

Bei Term B wird das bestimmte Integral über dem Gesamtintervall  $[-1; 2]$  berechnet und dann der Betrag ermittelt. Dabei wird nicht berücksichtigt, dass der Graph von  $f$  in den Teilintervallen  $[-1; 0]$  und  $[1; 2]$  unterhalb der  $x$ -Achse liegt, das Integral dort folglich negativ wird.

Bei Term C wird das Gesamtintervall  $[-1; 2]$  in die drei Teilintervalle  $[-1; 0]$ ,  $[0; 1]$  und  $[1; 2]$  eingeteilt. Auf  $[-1; 0]$  und  $[1; 2]$  verläuft der Graph von  $f$  unterhalb der  $x$ -Achse, das bestimmte Integral wird hier also negativ. Um für den Flächeninhalt den positiven Wert zu ermitteln, werden diese Integrale zur Korrektur mit  $-1$  multipliziert.

- c) (1) Beim Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang und parallel.

$$\vec{d} = \overrightarrow{OA} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

oder:

$$\vec{d} = \overrightarrow{OB} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

**Alternativ** (zeitaufwendiger):

Die Diagonalen im Parallelogramm halbieren einander.

$$\overrightarrow{m_{AB}} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{o} + 2 \cdot \overrightarrow{OM_{AB}} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$$



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**