

Markus Brodmann
Algebraische Geometrie
Eine Einführung

1989

Birkhäuser Verlag
Basel · Boston · Berlin

Inhalt

I. Affine Hyperflächen	1
1. Algebraische Mengen	2
Nullstellengebilde von Polynomen	2
Der Kreis im Komplexen	3
Komplexe, reelle und rationale Nullstellen	7
2. Elementare Eigenschaften von Polynomen	11
Der Identitätssatz für Polynome	11
Homogene Teile von Polynomen	13
Taylor-Entwicklung und Vielfachheit	17
Zerlegung in Linearfaktoren	19
Stetigkeit der Nullstellen	22
3. Vielfachheit und Singularitäten	24
Vielfachheit von Punkten auf Hyperflächen	24
Die Neillsche Parabel $z_1^3 = z_2^2$	27
Zur Entstehung von Singularitäten	31
Die Schnittvielfachheit mit Geraden	35
4. Tangentialkegel und Grad	37
Der Begriff der Tangente	37
Der Tangentialkegel	40
Die Vielfachheit von Tangenten	40
Einige Flächen in \mathbb{C}^3	42
Tangentialkegel ebener Kurven	45
Grad und Schnittvielfachheit	47
II. Affine Varietäten	52
5. Der Polynomring	53
Ringe	53
Ideale	55
Noethersche Ringe	57
Der Nullstellensatz	58
Zerlegung in Primfaktoren	62

6. Zariski-Topologie und Koordinatenringe	67
Die Zariski-Topologie	67
Noethersche Räume	68
Zerlegung in irreduzible Komponenten	69
Reguläre Funktionen	70
Der Koordinatenring einer affinen algebraischen Menge	72
Der relative Standpunkt	75
7. Morphismen	78
Der Begriff des Morphismus	78
Quasiaffine und affine Varietäten	81
Morphismen zwischen affinen Varietäten	83
Dominante Morphismen, abgeschlossene Einbettungen	84
Beispiele von Morphismen	85
Nenneraufnahme	88
Reguläre Funktionen und elementare offene Mengen	91
Affine Morphismen	95
8. Lokale Ringe, Produkte	96
Funktionskeime und lokale Ringe	96
Lokalisierung von Ringen	99
Die lokale Struktur quasiaffiner Varietäten	101
Produkte von quasiaffinen Varietäten	103
Produkte von Morphismen	105
Die Diagonaleinbettung	106
 III. Endliche Morphismen und Dimension	109
9. Ganze Erweiterungen	110
Ein Beispiel zur Problematik des Dimensionsbegriffs	110
Moduln	112
Noethersche Moduln	114
Ganze Erweiterungen	114
Ideale und ganze Erweiterungen	117
Primidealketten und ganze Erweiterungen	120
Normale Ringe	122
Ganze Erweiterungen von normalen Ringen	126
Endliche Morphismen	127
10. Dimensionstheorie	130
Der Transzendenzgrad	130
Das Normalisationslemma	133
Der Kettensatz	135

Die Dimension	137
Moduln endlicher Länge	139
Höhe und Kodimension	142
Zur Dimensionstheorie noetherscher Ringe	146
11. Topologische Eigenschaften von Morphismen	150
Der Hauptsatz über Morphismen	150
Konstruierbare Mengen	154
Parametersysteme	154
Die Faserdimension	157
Normale Varietäten	160
Morphismen und starke Topologie	161
12. Quasiendliche und birationale Morphismen	164
Quasiendliche Morphismen	164
Rationale Funktionenkörper	166
Der Grad eines quasiendlichen Morphismus	168
Die Diskriminante	169
Fasern von quasiendlichen Morphismen	173
Birationale Morphismen	176
Die Normalisierung einer Varietät	178
Der normale Ort einer Varietät	181
Reduziertheit von Fasern	182
Verzweigtheit von Morphismen	184
IV. Tangentialraum und Multiplizität	187
13. Der Tangentialraum	189
Tangentialvektoren und Richtungsableitungen	189
Tangentialraum und Differentiale	191
Die Einbettungsdimension	192
Die Rolle des lokalen Ringes	194
Tangentialräume von Fasern	196
Reguläre und singuläre Punkte	197
Normale und reguläre Punkte	199
Das Normalitätskriterium	201
14. Stratifikation	204
Strata von Varietäten	204
Strata als analytische Mannigfaltigkeiten	206
Determinantenvarietäten	210
15. Hilbert-Samuel-Polynome	217
Graduierte Ringe und Moduln	217

Homogene Ringe	220
Assoziierte Primideale	222
Torsionsmoduln und Quasi-Nichtnullteiler	224
Homogene K-Algebren	227
Das Hilbertpolynom	228
Rees-Ringe und graduierter Ringe zu Idealen	231
Hilbert-Samuel-Polynome und Multiplizität	234
Dimension und Additivität	238
16. Multiplizität und Tangentialkegel	241
Das Hilbert-Samuel-Polynom für einen Punkt	241
Der Multiplizitätsbegriff für Punkte	244
Multiplizität und Regularität	246
Affine algebraische Kegel	248
Tangentialkegel	251
Tangenten und deren Vielfachheit	256
V. Projektive Varietäten	263
17. Der projektive Raum	264
Der Begriff des projektiven Raumes	264
Der kanonische affine Atlas	270
Zariski-Topologie und affine Kegel	272
Projektiver Abschluss und Fernpunkte	276
Homogener Koordinatenring und graduierter Verschwindungsideal	278
Homogenisierung und Dehomogenisierung	279
Dimensionstheorie im projektiven Raum	283
18. Morphismen	285
Reguläre Funktionen	285
Quasiprojektive Varietäten und Morphismen	287
Topologische Eigenschaften quasiprojektiver Varietäten	292
Morphismen aus projektiven Varietäten	293
Die lokale Struktur quasiprojektiver Varietäten	294
Segre-Einbettungen und Produkte	296
Veronese-Einbettungen	300
Elementare affine Teilmengen projektiver Varietäten	306
Lokale Ringe in irreduziblen Mengen	309
Endliche Morphismen und affine Kegel	311
Normalisierung quasiprojektiver Varietäten	312
19. Grad und Schnittvielfachheit	315
Der Grad einer projektiven Varietät	315
Das homogene Normalisationslemma, generische Projektionen	319

Grad und generische Projektionen	323
Der Begriff der Schnittvielfachheit	325
Der Zusammenhang zwischen Grad und Schnittvielfachheit	329
20. Ebene projektive Kurven	332
Der Satz von Bézout für zwei homogene Polynome	332
Die Verzweigungsordnung	334
Eine ebene Kubik	337
Tangenten und Wendepunkte	342
Die Hesse-Form	344
Die Gruppenstruktur der kubischen Kurven	347
VI. Garben	354
21. Grundbegriffe der Garbentheorie	355
Der Garbenbegriff	355
Halme	357
Homomorphismen	362
Untergarben und Restklassengarben	366
Exakte Sequenzen	370
Einschränkung auf offene Untermengen	372
Direkte Bilder	374
22. Kohärente Garben	376
Moduln und Nenneraufnahme	376
Induzierte Garben über affinen Varietäten	380
Quasikohärente und kohärente Garben	387
Kriterien für die Kohärenz	392
Lokal freie Garben	394
23. Tangentialfelder und Kähler-Differentiale	398
Homomorphismen-Garben	398
Duale Garben	403
Die Tangentialgarbe	405
Die Garbe der Kähler-Differentiale	409
Die Beziehung zur Tangentialgarbe	414
24. Die Picard-Gruppe	417
Tensorprodukte von Moduln	417
Tensorprodukte von Garben	422
Invertierbare Garben und die Picard-Gruppe	426
Zur Picard-Gruppe affiner Varietäten	428

25. Kohärente Garben über projektiven Varietäten	432
Verdrehte Strukturgarben	432
Einbettung in die Picard-Gruppe	434
Verdrehte kohärente Garben	437
Totale Schnittmoduln	438
Induzierte Garben	442
Schnittmoduln induzierter Garben	446
Der Endlichkeitssatz	449
Hilbertpolynom und Grad für kohärente Garben	452
Ein Verschwindungskriterium für $\Gamma(X, \mathcal{F}(n))$	455
Bibliographie	459
Index	463