

Robert Hafner

**Wahrscheinlichkeits-
rechnung
und Statistik**

Springer-Verlag Wien New York

Inhaltsverzeichnis

Teil I: Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Zufallsexperimente

| | |
|--|----|
| 1.1 Einführung | 3 |
| 1.2 Ereignisse..... | 7 |
| Beschreibung von Versuchsausgängen | 7 |
| Aussagen über Versuchsausgänge | 9 |
| Verknüpfung von Aussagen | 11 |
| Ereignisse..... | 13 |
| Die konjunktive Normalform für Ereignisse | 15 |
| Rechnen mit Ereignissen | 21 |
| 1.3 Die Grundaxiome der Wahrscheinlichkeitstheorie | 23 |
| 1.4 Folgerungen aus den Grundaxiomen | 29 |

2. Eindimensionale Verteilungen

| | |
|--|----|
| 2.1 Diskrete und stetige Verteilungen | 34 |
| Beschreibung diskreter Verteilungen..... | 35 |
| Beschreibung stetiger Verteilungen | 39 |
| 2.2 Die diskrete Gleichverteilung | 44 |
| 2.3 Die hypergeometrische Verteilung..... | 46 |
| 2.4 Die Binomialverteilung..... | 51 |
| 2.5 Die Poisson-Verteilung..... | 56 |
| 2.6 Die stetige Gleichverteilung..... | 62 |
| 2.7 Die Normalverteilung | 63 |
| 2.8 Die Gammaverteilung..... | 67 |
| Zusammenhang mit der Poisson-Verteilung | 71 |
| 2.9 Die Betaverteilung..... | 72 |
| Zusammenhang mit der Binomialverteilung | 74 |
| 2.10 Funktionen von Zufallsvariablen | 75 |
| 2.11 Lage- und Skalenfamilien von Verteilungen | 87 |
| 2.12 Simulation eindimensionaler Verteilungen..... | 92 |

3. Mehrdimensionale Verteilungen

| | |
|---|-----|
| 3.1 Diskrete und stetige Verteilungen | 96 |
| 3.2 Randverteilungen..... | 102 |

| | |
|---|-----|
| 3.3 Die polyhypergeometrische Verteilung | 106 |
| 3.4 Die Multinomialverteilung..... | 109 |
| 3.5 Die mehrdimensionale Normalverteilung | 113 |
| 3.6 Funktionen von mehrdimensionalen Zufallsvariablen | 120 |
| | |
| 4. Stochastische Unabhängigkeit | |
| 4.1 Unabhängige Experimente..... | 128 |
| 4.2 Unabhängige Zufallsvariable | 136 |
| 4.3 Unabhängige Ereignisse | 143 |
| | |
| 5. Stochastische Abhängigkeit | |
| 5.1 Abhängige Experimente..... | 146 |
| 5.2 Bedingte Verteilungen | 152 |
| 5.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten..... | 157 |
| 5.4 Das Theorem von Bayes..... | 160 |
| | |
| 6. Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen | |
| 6.1 Die Erwartung | 166 |
| 6.2 Momente eindimensionaler Verteilungen | 176 |
| Existenz von Momenten..... | 177 |
| Zusammenhänge zwischen Momenten..... | 180 |
| 6.3 Lage- und Streuungsparameter..... | 186 |
| 6.4 Momente mehrdimensionaler Verteilungen | 201 |
| 6.5 Die bedingte Erwartung | 211 |
| Regression | 212 |
| | |
| 7. Gesetze der großen Zahlen | |
| 7.1 Das schwache Gesetz der großen Zahlen | 216 |
| 7.2 Das starke Gesetz der großen Zahlen | 220 |
| | |
| 8. Summen von unabhängigen Zufallsvariablen | |
| 8.1 Die Faltung | 223 |
| 8.2 Die charakteristische Funktion | 230 |
| 8.3 Verteilungskonvergenz | 241 |
| 8.4 Der zentrale Grenzverteilungssatz | 247 |

Teil II: Statistik**9. Was ist Statistik?**

| | |
|--|-----|
| 9.1 Modellbildung..... | 256 |
| 9.2 Grundaufgaben der mathematischen Statistik | 262 |

10. Punktschätzung

| | |
|--|-----|
| 10.1 Methoden zur Konstruktion von Punktschätzern | 269 |
| Die Minimum- χ^2 -Methode | 271 |
| Die Momenten-Methode | 273 |
| Die Maximum-Likelihood-Methode | 280 |
| Die Bayes-Methode | 286 |
| 10.2 Erwartungstreue und Konsistenz von Schätzern | 293 |
| Transformation von ML-, Min- χ^2 -, Momenten- und Bayes-Schätzern | 299 |
| 10.3 Die Ungleichung von Rao-Cramér..... | 300 |
| Exponentialfamilien | 305 |
| 10.4 Asymptotische Eigenschaften von Schätzern..... | 307 |

11. Suffizienz und Vollständigkeit

| | |
|---|-----|
| 11.1 Suffiziente Statistiken | 313 |
| 11.2 Suffizienz bei Exponentialfamilien..... | 323 |
| 11.3 Vollständige Verteilungsfamilien | 328 |
| 11.4 Varianzminimale erwartungstreue Schätzer..... | 332 |
| Die Sätze von Rao-Blackwell und Lehmann-Scheffé | 334 |

12. Die Prüfverteilungen der Normalverteilung

| | |
|---|-----|
| 12.1 Die χ^2 -Verteilung | 347 |
| Die nichtzentrale χ^2 -Verteilung..... | 355 |
| 12.2 Die t -Verteilung..... | 357 |
| Die nichtzentrale t -Verteilung..... | 362 |
| 12.3 Die F -Verteilung..... | 363 |
| Die nichtzentrale F -Verteilung..... | 366 |

13. Testen von Hypothesen

| | |
|---|-----|
| 13.1 Grundbegriffe der Testtheorie..... | 368 |
| Die allgemeine Form eines Testproblems..... | 370 |
| Die allgemeine Form einer Teststrategie | 372 |
| Fehlentscheidungen erster und zweiter Art | 373 |

| | |
|--|-----|
| Die Gütefunktion einer Teststrategie | 374 |
| Asymmetrie der Beweislast | 378 |
| Qualitätsmerkmale von Teststrategien | 383 |
| 13.2 Das Lemma von Neyman und Pearson | 385 |
| Die Risikofunktion | 390 |
| Trennbarkeit zweier Verteilungen | 396 |
| 13.3 Verteilungsfamilien mit monotonen Dichtequotienten | 397 |
| 13.4 Unverfälschte Tests für Hypothesen vom Typ: $H_0: \vartheta = \vartheta_0 \quad H_1: \vartheta \neq \vartheta_0$.. | 402 |
| 13.5 Der Likelihood-Quotienten-Test | 408 |
| Asymptotische Eigenschaften des Likelihood-Quotienten-Tests | 435 |
| 13.6 Der entscheidungstheoretische Ansatz | 436 |
| | |
| 14. Bereichsschätzung | |
| 14.1 Konstruktion von Bereichsschätzern | 443 |
| Eine Konstruktionsmethode für einparametrische Modelle | 446 |
| Bereichsschätzer — der allgemeine Begriff | 450 |
| Die allgemeine Konstruktionsmethode für Bereichsschätzer | 451 |
| 14.2 Zusammenhänge zwischen Bereichsschätzung und Testen von Hypothesen . | 459 |
| Qualitätskriterien für Bereichsschätzer | 461 |
| 14.3 Konfidenzintervalle und Konfidenzschranken | 464 |
| 14.4 Bayes'sche Konfidenzbereiche | 479 |
| | |
| 15. Modellanpassung | |
| 15.1 Vom Supermodell Wahrscheinlichkeitstheorie zum plausiblen Modellansatz | 483 |
| 15.2 Modelle ohne Struktur- und Verteilungshypothesen | 485 |
| 15.3 Modelle mit Verteilungsannahmen — der χ^2 -Test | 486 |
| 15.4 Modelle mit Struktur- und Verteilungsannahmen | 494 |
| Strukturangepassung durch Rückwärtselimination | 499 |
| Strukturangepassung durch Vorwärtsselektion | 501 |
| Prüfung der Verteilungsannahmen — Residualanalyse | 502 |
| | |
| Literatur | 505 |
| | |
| Sachverzeichnis | 507 |