

Inhaltsverzeichnis

1	Elementares Handwerkszeug	17
1.1	Klammersetzung	17
1.1.1	Punkt- vor Strichrechnung	17
1.1.2	Potenz- vor Punktrechnung	17
1.1.3	Klammern	17
1.2	Bruchrechnung	18
1.2.1	Grundsätzliches	18
1.2.2	Multiplikation und Division von Brüchen	19
1.2.3	Addition und Subtraktion von Brüchen	20
1.3	Größenverhältnisse bei Brüchen	21
1.4	Fakultät, Binomialkoeffizient, binomischer Satz	22
1.4.1	Fakultät	22
1.4.2	Binomialkoeffizient	23
1.4.3	Binomischer Satz	23
2	Erweitertes Handwerkszeug	25
2.1	Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	25
2.1.1	Potenzen	25
2.1.2	Potenzgesetze	25
2.1.3	Wurzeln	26
2.1.4	Wurzelgesetze	27
2.1.5	Der Begriff des Logarithmus	28
2.1.6	Dualer, dekadischer und natürlicher Logarithmus	29
2.1.7	Logarithmengesetze	30
2.2	Gleichungen, Ungleichungen, Beträge	31
2.2.1	Allgemeines zu Gleichungen	31
2.2.2	Quadratische Gleichungen	33

2.2.3	Ungleichungen – Begriff und Lösungsmenge.....	34
2.2.4	Ungleichungen – Multiplikation mit bekannten Zahlen	35
2.2.5	Ungleichungen – Division durch Zahlen.....	36
2.2.6	Ungleichungen – Multiplikation/Division ohne Vorzeicheninformation	36
2.2.7	Beträge	40
2.2.8	Betragsgleichungen und -ungleichungen	41
2.3	Umgang mit dem Summenzeichen.....	42
2.3.1	Einfache Summen.....	42
2.3.2	Rechenregeln für einfache Summen	44
2.3.3	Doppelsummen	45
2.3.4	Weitere Rechenregeln für Doppelsummen	46
2.4	Sinus, Kosinus und so weiter	46
2.4.1	Begriffe am rechtwinkligen Dreieck	46
2.4.2	Sinus und Kosinus.....	47
2.4.3	Tangens und Kotangens.....	50
2.4.4	Der Einheitskreis	50
2.4.5	Grad- und Bogenmaß	55
2.4.6	Verwirrung bei Taschenrechner-Benutzung	57
2.4.7	Additionstheoreme	58
3	Funktionen I: Begriff und Aufgabe der Analysis.....	59
3.1	Funktionen.....	59
3.1.1	Begriff.....	59
3.1.2	Nutzen von Funktionen	61
3.1.3	Graph der Funktion	61
3.2	Beschreibungsformen von Funktionen.....	63
3.3	Aufgaben der Analysis	64
4	Funktionen II: Rationale Funktionen.....	65
4.1	Ganzrationale Funktionen: Polynome	65
4.1.1	Allgemeines.....	65
4.1.2	Berechnung von Funktionswerten von Polynomen.....	65

4.1.3	Graphen von Polynomen n-ten Grades, wenn n ungerade ist.....	66
4.1.4	Graphen von Polynomen n-ten Grades, wenn n gerade ist	68
4.1.5	Graphen von Polynomen zweiten Grades.....	69
4.1.6	Parabeln zeichnen	71
4.1.7	Graphen von Polynomen ersten Grades.....	74
4.1.8	Polynome nullten Grades und ihre Graphen	75
4.2	Gebrochen rationale Funktionen.....	75
4.2.1	Begriffe.....	75
4.2.2	Unendlichkeitsstellen und Lücken bei gebrochen rationalen Funktionen.....	76
4.2.3	Verhalten im Unendlichen.....	79
4.2.4	Vereinfachung echt gebrochen rationaler Funktionen.....	79
4.2.5	Partialbruchzerlegung	81
5	Einschub: Komplexe Zahlen.....	83
5.1	Ein Ausgangspunkt (einer von vielen)	83
5.2	Komplexe Zahlen in arithmetischer Form	85
5.2.1	Real- und Imaginärteil, rein imaginäre und konjugiert komplexe Zahlen	85
5.2.2	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen.....	86
5.2.3	Multiplikation komplexer Zahlen.....	86
5.2.4	Division komplexer Zahlen	87
5.2.5	Potenzieren einer komplexen Zahl	87
5.3	GAUSSsche Zahlenebene	87
5.4	Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen	88
5.5	Übergänge von einer Darstellungsform zur anderen Darstellungsform.....	90
5.5.1	Von der trigonometrischen zur arithmetischen Form.....	90
5.5.2	Von der arithmetischen zur trigonometrischen Form.....	92
5.6	Multiplikation und Division bei trigonometrischer Form	95
5.7	Potenzieren und Radizieren bei trigonometrischer Form.....	96
5.7.1	Potenzen	96
5.7.2	Wurzeln aus komplexen Zahlen	96
5.8	Die EULERsche Formel.....	98

6	Funktionen III: Rationale bis trigonometrische Funktionen	99
6.1	Echt gebrochen rationale Funktionen (Fortsetzung)	99
6.1.1	Lösung der Gleichung: Nennerpolynom gleich Null.....	99
6.1.2	Ansätze für die Partialbrüche	104
6.1.3	Bestimmung der Ansatzkoeffizienten	106
6.2	Unecht gebrochen rationale Funktionen	109
6.3	Exponentialfunktionen	111
6.3.1	Begriff.....	111
6.3.2	Graphen von Exponentialfunktionen.....	111
6.3.3	Zeichnen des Graphen.....	113
6.4	Hyperbelfunktionen.....	113
6.5	Logarithmusfunktionen.....	114
6.5.1	Begriff.....	114
6.5.2	Graphen von Logarithmusfunktionen	114
6.6	Trigonometrische Funktionen.....	115
6.6.1	Zugang zum Graph von $y=\sin x$	115
6.6.2	Zugang zum Graph von $y=\cos x$	118
6.6.3	Zugang zu den Graphen von $y=\tan x$ und $y=\cot x$	119
6.6.4	Ergänzung: Tangens und Kotangens am Einheitskreis	121
7	Funktionen IV: Verwandte Funktionen und ihre Graphen	123
7.1	Begriffserklärung	123
7.2	Additionen und Subtraktionen.....	124
7.2.1	Addition und Subtraktion zur Funktion.....	124
7.2.2	Addition und Subtraktion zum Argument.....	125
7.3	Multiplikationen	126
7.3.1	Multiplikation der Funktion mit (-1)	126
7.3.2	Multiplikation des Arguments mit (-1)	126
7.4	Betragsbildung.....	127
7.4.1	Betragsbildung im Argument.....	127
7.4.2	Von der Funktion zum Betrag der Funktion	128
7.5	Trigonometrische Funktionen und ihre Verwandten.....	131
7.5.1	Betragsbildung	131

7.5.2	Waagerechte Verschiebungen mit und ohne Spiegelung.....	132
7.5.3	Waagerechte Streckungen und Stauchungen.....	134
8	Funktionen V: Stetigkeit, Beschränktheit, Monotonie.....	135
8.1	Stetigkeit	135
8.1.1	Definition.....	135
8.1.2	Konsequenzen von Stetigkeit und Unstetigkeit.....	136
8.1.3	Arten der Unstetigkeit	137
8.1.4	Suche nach Unstetigkeitsstellen	138
8.2	Beschränktheit.....	140
8.2.1	Definitionen	140
8.2.2	Stetigkeit und Beschränktheit.....	141
8.3	Monotonie.....	142
8.3.1	Definitionen	142
8.3.2	Rechnerische Bestimmung des Monotonieverhaltens	144
8.3.3	Stetigkeit und Monotonie.....	145
8.4	Mittelbare Funktionen: Funktionen von Funktionen	146
9	Funktionen VI: Inverse Funktionen (Umkehrfunktionen)	151
9.1	Fragestellung.....	151
9.2	Berechnung der Umkehrfunktion	153
9.3	Taschenrechner-Verwirrungen.....	155
9.3.1	Funktion ohne Taste.....	155
9.3.2	Tasten ohne Funktionen	156
10	Kurvendiskussion: Erste Schritte	161
10.1	Begriff und Aufgabenstellung	161
10.2	Definitionsbereich.....	162
10.2.1	Bestimmung des Definitionsbereiches	162
10.2.2	Beschreibung des Definitionsbereiches	163
10.2.3	Definitionsbereich als Lösung einer Ungleichung.....	163
10.2.4	Definitionsbereich als Lösung von Betragsgleichungen.....	165
10.2.5	Definitionsbereiche der Grundfunktionen	165
10.2.6	Definitionsbereiche verwandter Funktionen.....	166

10.3	Randuntersuchungen.....	168
10.3.1	Grundfunktionen	168
10.3.2	Beliebige Funktionen	169
10.3.3	Unbestimmte Ausdrücke	171
10.4	Wertebereich	172
10.4.1	Begriff und Bedeutung	172
10.4.2	Wertebereiche der Grundfunktionen	173
10.4.3	Wertebereiche verwandter Funktionen	174
10.4.4	Wertebereiche beliebiger Funktionen.....	177
10.5	Schnittpunkte mit den Achsen.....	177
10.5.1	Schnittpunkt mit der senkrechten Achse	177
10.5.2	Schnittpunkte mit der waagerechten Achse.....	178
10.6	Ausblick	180
11	Differentialrechnung.....	181
11.1	Vorbemerkung, Bilanz, Ausblick	181
11.2	Der erste Ableitungswert.....	181
11.2.1	Begriff und Bedeutung	181
11.2.2	Symbolik.....	182
11.3	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Theorie.....	183
11.4	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Praxis	184
11.4.1	Erster Ableitungswert und erste Ableitungsfunktion.....	184
11.4.2	Erste Ableitungsfunktion von wichtigen Grundfunktionen.....	184
11.4.3	Faktor- und Summenregel	186
11.4.4	Produktregel	187
11.4.5	Quotientenregel.....	188
11.5	Kettenregel.....	188
11.6	Logarithmisches Differenzieren	191
12	Anwendungen der Ableitungsfunktionen	193
12.1	Bedeutung des ersten Ableitungswertes für den Graphen.....	193
12.1.1	Anstieg der Tangente.....	193
12.1.2	Waagerechte Tangente	196
12.1.3	Existenz des ersten Ableitungswertes	197

12.2	Bedeutung der ersten Ableitungsfunktion für den Graphen	200
12.2.1	Grundsätzliches.....	200
12.2.2	Nullstellen der ersten Ableitung.....	202
12.3	Zweite Ableitungsfunktion	203
12.3.1	Begriff und Berechnung	203
12.3.2	Bedeutung für die Kurvendiskussion	203
12.3.3	Kriterien und hinreichende Bedingungen für relative Extrema.....	206
12.3.4	Lösung von Extremwertaufgaben.....	206
12.3.5	Höhere Ableitungsfunktionen.....	208
12.4	Ableitungsfunktionen nicht überall differenzierbarer Funktionen.....	208
12.5	Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke	209
12.6	TAYLOR-Polynome	211
12.6.1	Einführung	211
12.6.2	TAYLOR-Polynome	213
12.6.3	Die TAYLOR-Formel	214
12.6.4	TAYLOR-Polynome der Sinusfunktion um $x_0=0$	214
12.6.5	Eigenschaften der TAYLOR-Polynome.....	215
12.6.6	Schmiegeparabeln	215
12.6.7	Einige TAYLOR-Polynome bekannter Funktionen mit $x_0=0$	216
12.6.8	TAYLOR-Polynome in der Gegenwart – Fragen und Antworten.....	217
12.6.9	Von komplizierten zu vereinfachten Formeln	218
13	Elemente der Integralrechnung	221
13.1	Das bestimmte Integral	221
13.2	Berechnung bestimmter Integrale: Theorie.....	223
13.3	Berechnung bestimmter Integrale: Praxis	228
13.3.1	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	228
13.3.2	Stammfunktionen und das unbestimmte Integral.....	229
13.3.3	Erste Integrationsregeln	232
13.3.4	Substitution, Transformation der Grenzen.....	234
13.4	Integration gebrochen rationaler Funktionen.....	236
13.4.1	Aufgabenstellung	236
13.4.2	Vorbetrachtungen	237

13.4.3 Echt gebrochene Integranden.....	237
13.4.4 Unecht gebrochene Integranden	239
13.5 Hinweis auf numerische Methoden.....	240
14 Bestimmtes Integral: Anwendungen	241
14.1 Berechnung von Flächeninhalten	241
14.2 Berechnung von Bogenlängen ebener Kurven	243
14.3 Volumen und Mantelflächen von Rotationskörpern.....	246
14.4 Schwerpunkte von ebenen, homogen mit Masse belegten Flächenstücken.....	251
15 Gewöhnliche Differentialgleichungen	253
15.1 Einführung	253
15.2 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung	255
15.2.1 Konstante Koeffizienten und n-te Ordnung – homogener Fall	255
15.2.2 Konstante Koeffizienten und n-te Ordnung – inhomogener Fall	258
15.2.3 Partikuläre Lösung durch Ansatz.....	260
15.2.4 Nichtkonstante Koeffizienten und n-te Ordnung.....	262
15.3 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.....	262
15.3.1 Konstante Koeffizienten und 1.Ordnung, homogener Fall	262
15.3.2 Konstante Koeffizienten und 1. Ordnung, inhomogener Fall.....	263
15.3.3 Nichtkonstante Koeffizienten und 1.Ordnung – homogener Fall	263
15.3.4 Nichtkonstante Koeffizienten und 1.Ordnung – inhomogener Fall.....	264
15.4 Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung	264
15.4.1 Spezialfall $y'=f(x)$	265
15.4.2 Trennbare Variable.....	265
15.5 Anfangs- und Randwertaufgaben.....	269
15.5.1 Aufgabenstellung.....	269
15.5.2 Beispiel mit formelmäßiger Lösung.....	269
16 Matrizen und Determinanten.....	271
16.1 Allgemeines	271
16.1.1 Der Matrixbegriff	271
16.1.2 Der Matrixbegriff in der Mathematik.....	271
16.2 Matrizen-Begriffe.....	272

16.2.1	Zeilen und Spalten, Format.....	272
16.2.2	Vektoren als spezielle Matrizen	272
16.2.3	Beziehungen zwischen Matrizen	273
16.2.4	Transponieren.....	273
16.3	Quadratische Matrizen	274
16.3.1	Diagonalen	274
16.3.2	Diagonal- und Einheitsmatrix	274
16.3.3	Symmetrie	275
16.4	Einfache Rechenregeln für Matrizen.....	275
16.4.1	Addition und Subtraktion, Nullmatrix	275
16.4.2	Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl	276
16.5	Matrizenmultiplikation.....	277
16.5.1	Herstellbarkeit von Matrizenprodukten.....	277
16.5.2	Vertauschbarkeit	279
16.5.3	Rechenregeln.....	279
16.5.4	Besonderheiten der Nullmatrix.....	280
16.5.5	Einselement der Matrizenmultiplikation.....	280
16.5.6	Division von Matrizen.....	281
16.6	Inverse Matrix	282
16.6.1	Fragestellung.....	282
16.6.2	Definition der inversen Matrix.....	282
16.6.3	Inverse von Diagonalmatrizen	284
16.6.4	Lösung einer Matrixgleichung mit quadratischer Matrix	284
16.6.5	Einzigkeit der Inversen.....	286
16.7	Der Determinantenbegriff	287
16.8	Bedeutung der Determinante.....	287
16.9	Berechnung von Determinanten.....	287
16.9.1	Zweireihige Determinanten.....	287
16.9.2	Dreireihige Determinanten – die Regel von SARRUS.....	288
16.9.3	n-reihige Determinanten – Hinweis auf den Entwicklungssatz	289
16.10	Determinantengesetze	289
16.11	Anwendungen	290
16.11.1	CRAMERSche Regel.....	290
16.11.2	Berechnung der Inversen von (2,2)-Matrizen.....	291

17	Lineare Gleichungssysteme.....	293
17.1	Definition, Darstellungsformen und Begriffe	293
17.2	Quadratische Gleichungssysteme	296
17.2.1	Lösungssituationen	296
17.2.2	Theorie mit Determinanten.....	299
17.2.3	Praxis: Basisversion des GAUSSschen Algorithmus	300
18	Vektorrechnung und analytische Geometrie	309
18.1	Vektoren und ihre Anwendung	309
18.1.1	Einführung	309
18.1.2	Größe und Richtung	310
18.1.3	Das Skalarprodukt zweier Vektoren	314
18.1.4	Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren.....	316
18.2	Geraden und Ebenen.....	320
18.2.1	Beschreibung von Geraden.....	320
18.2.2	Beschreibung von Ebenen	324
	Weiterführende und vertiefende Literatur	331
	Sachwortverzeichnis	333