

Inhaltsverzeichnis

1    **Elementares Handwerkszeug..... 17**

1.1    Klammersetzung..... 17

1.1.1    Punkt- vor Strichrechnung..... 17

1.1.2    Potenz- vor Punktrechnung..... 17

1.1.3    Klammern..... 17

1.2    Bruchrechnung..... 18

1.2.1    Grundsätzliches..... 18

1.2.2    Multiplikation und Division von Brüchen..... 19

1.2.3    Addition und Subtraktion von Brüchen ..... 20

1.3    Größenverhältnisse bei Brüchen..... 21

1.4    Fakultät, Binomialkoeffizient, binomischer Satz..... 22

1.4.1    Fakultät..... 22

1.4.2    Binomialkoeffizient..... 23

1.4.3    Binomischer Satz ..... 23

2    **Erweitertes Handwerkszeug..... 25**

2.1    Potenzen, Wurzeln, Logarithmen..... 25

2.1.1    Potenzen ..... 25

2.1.2    Potenzgesetze..... 25

2.1.3    Wurzeln ..... 26

2.1.4    Wurzelgesetze..... 27

2.1.5    Der Begriff des Logarithmus ..... 28

2.1.6    Dualer, dekadischer und natürlicher Logarithmus..... 29

2.1.7    Logarithmengesetze..... 30

2.2    Gleichungen, Ungleichungen, Beträge ..... 31

2.2.1    Allgemeines zu Gleichungen..... 31

2.2.2    Quadratische Gleichungen..... 33

2.2.3	Ungleichungen – Begriff und Lösungsmenge .....	34
2.2.4	Ungleichungen – Multiplikation mit bekannten Zahlen .....	35
2.2.5	Ungleichungen – Division durch Zahlen .....	36
2.2.6	Ungleichungen – Multiplikation/Division ohne Vorzeicheninformation .....	36
2.2.7	Beträge .....	40
2.2.8	Betragsgleichungen und -ungleichungen .....	41
2.3	Umgang mit dem Summenzeichen .....	42
2.3.1	Einfache Summen .....	42
2.3.2	Rechenregeln für einfache Summen .....	44
2.3.3	Doppelsummen .....	45
2.3.4	Weitere Rechenregeln für Doppelsummen .....	46
2.4	Sinus, Kosinus und so weiter .....	46
2.4.1	Begriffe am rechtwinkligen Dreieck .....	46
2.4.2	Sinus und Kosinus .....	47
2.4.3	Tangens und Kotangens .....	50
2.4.4	Der Einheitskreis .....	50
2.4.5	Grad- und Bogenmaß .....	55
2.4.6	Verwirrung bei Taschenrechner-Benutzung .....	57
2.4.7	Additionstheoreme .....	58
<b>3</b>	<b>Funktionen I: Begriff und Aufgabe der Analysis .....</b>	<b>59</b>
3.1	Funktionen .....	59
3.1.1	Begriff .....	59
3.1.2	Nutzen von Funktionen .....	61
3.1.3	Graph der Funktion .....	61
3.2	Beschreibungsformen von Funktionen .....	63
3.3	Aufgaben der Analysis .....	64
<b>4</b>	<b>Funktionen II: Rationale Funktionen .....</b>	<b>65</b>
4.1	Ganzrationale Funktionen: Polynome .....	65
4.1.1	Allgemeines .....	65
4.1.2	Berechnung von Funktionswerten von Polynomen .....	65

4.1.3	Graphen von Polynomen $n$ -ten Grades, wenn $n$ ungerade ist.....	66
4.1.4	Graphen von Polynomen $n$ -ten Grades, wenn $n$ gerade ist .....	68
4.1.5	Graphen von Polynomen zweiten Grades.....	69
4.1.6	Parabeln zeichnen .....	71
4.1.7	Graphen von Polynomen ersten Grades.....	74
4.1.8	Polynome nullten Grades und ihre Graphen .....	75
4.2	Gebrochen rationale Funktionen.....	75
4.2.1	Begriffe.....	75
4.2.2	Unendlichkeitsstellen und Lücken bei gebrochen rationalen Funktionen.....	76
4.2.3	Verhalten im Unendlichen.....	79
4.2.4	Vereinfachung echt gebrochen rationaler Funktionen.....	79
4.2.5	Partialbruchzerlegung .....	81
<b>5</b>	<b>Einschub: Komplexe Zahlen.....</b>	<b>83</b>
5.1	Ein Ausgangspunkt (einer von vielen).....	83
5.2	Komplexe Zahlen in arithmetischer Form .....	85
5.2.1	Real- und Imaginärteil, rein imaginäre und konjugiert komplexe Zahlen .....	85
5.2.2	Addition und Subtraktion komplexer Zahlen.....	86
5.2.3	Multiplikation komplexer Zahlen.....	86
5.2.4	Division komplexer Zahlen .....	87
5.2.5	Potenzieren einer komplexen Zahl .....	87
5.3	GAUSSsche Zahlenebene .....	87
5.4	Trigonometrische Darstellung komplexer Zahlen.....	88
5.5	Übergänge von einer Darstellungsform zur anderen Darstellungsform.....	90
5.5.1	Von der trigonometrischen zur arithmetischen Form.....	90
5.5.2	Von der arithmetischen zur trigonometrischen Form.....	92
5.6	Multiplikation und Division bei trigonometrischer Form .....	95
5.7	Potenzieren und Radizieren bei trigonometrischer Form.....	96
5.7.1	Potenzen .....	96
5.7.2	Wurzeln aus komplexen Zahlen .....	96
5.8	Die EULERSche Formel.....	98

<b>6</b>	<b>Funktionen III: Rationale bis trigonometrische Funktionen .....</b>	<b>99</b>
6.1	Echt gebrochen rationale Funktionen (Fortsetzung) .....	99
6.1.1	Lösung der Gleichung: Nennerpolynom gleich Null.....	99
6.1.2	Ansätze für die Partialbrüche .....	104
6.1.3	Bestimmung der Ansatzkoeffizienten .....	106
6.2	Unecht gebrochen rationale Funktionen .....	109
6.3	Exponentialfunktionen .....	111
6.3.1	Begriff.....	111
6.3.2	Graphen von Exponentialfunktionen.....	111
6.3.3	Zeichnen des Graphen.....	113
6.4	Hyperbelfunktionen.....	113
6.5	Logarithmusfunktionen.....	114
6.5.1	Begriff.....	114
6.5.2	Graphen von Logarithmusfunktionen .....	114
6.6	Trigonometrische Funktionen.....	115
6.6.1	Zugang zum Graph von $y=\sin x$ .....	115
6.6.2	Zugang zum Graph von $y=\cos x$ .....	118
6.6.3	Zugang zu den Graphen von $y=\tan x$ und $y=\cot x$ .....	119
6.6.4	Ergänzung: Tangens und Kotangens am Einheitskreis .....	121
<b>7</b>	<b>Funktionen IV: Verwandte Funktionen und ihre Graphen .....</b>	<b>123</b>
7.1	Begriffserklärung .....	123
7.2	Additionen und Subtraktionen.....	124
7.2.1	Addition und Subtraktion zur Funktion.....	124
7.2.2	Addition und Subtraktion zum Argument.....	125
7.3	Multiplikationen.....	126
7.3.1	Multiplikation der Funktion mit $(-1)$ .....	126
7.3.2	Multiplikation des Arguments mit $(-1)$ .....	126
7.4	Betragsbildungen.....	127
7.4.1	Betragsbildung im Argument.....	127
7.4.2	Von der Funktion zum Betrag der Funktion .....	128
7.5	Trigonometrische Funktionen und ihre Verwandten.....	131
7.5.1	Betragsbildungen .....	131

7.5.2	Waagerechte Verschiebungen mit und ohne Spiegelung .....	132
7.5.3	Waagerechte Streckungen und Stauchungen .....	134
<b>8</b>	<b>Funktionen V: Stetigkeit, Beschränktheit, Monotonie .....</b>	<b>135</b>
8.1	Stetigkeit .....	135
8.1.1	Definition .....	135
8.1.2	Konsequenzen von Stetigkeit und Unstetigkeit .....	136
8.1.3	Arten der Unstetigkeit .....	137
8.1.4	Suche nach Unstetigkeitsstellen .....	138
8.2	Beschränktheit .....	140
8.2.1	Definitionen .....	140
8.2.2	Stetigkeit und Beschränktheit .....	141
8.3	Monotonie .....	142
8.3.1	Definitionen .....	142
8.3.2	Rechnerische Bestimmung des Monotonieverhaltens .....	144
8.3.3	Stetigkeit und Monotonie .....	145
8.4	Mittelbare Funktionen: Funktionen von Funktionen .....	146
<b>9</b>	<b>Funktionen VI: Inverse Funktionen (Umkehrfunktionen) .....</b>	<b>151</b>
9.1	Fragestellung .....	151
9.2	Berechnung der Umkehrfunktion .....	153
9.3	Taschenrechner-Verwirrungen .....	155
9.3.1	Funktion ohne Taste .....	155
9.3.2	Tasten ohne Funktionen .....	156
<b>10</b>	<b>Kurvendiskussion: Erste Schritte .....</b>	<b>161</b>
10.1	Begriff und Aufgabenstellung .....	161
10.2	Definitionsbereich .....	162
10.2.1	Bestimmung des Definitionsbereiches .....	162
10.2.2	Beschreibung des Definitionsbereiches .....	163
10.2.3	Definitionsbereich als Lösung einer Ungleichung .....	163
10.2.4	Definitionsbereich als Lösung von Betragsgleichungen .....	165
10.2.5	Definitionsbereiche der Grundfunktionen .....	165
10.2.6	Definitionsbereiche verwandter Funktionen .....	166

10.3	Randuntersuchungen.....	168
10.3.1	Grundfunktionen .....	168
10.3.2	Beliebige Funktionen .....	169
10.3.3	Unbestimmte Ausdrücke .....	171
10.4	Wertebereich .....	172
10.4.1	Begriff und Bedeutung .....	172
10.4.2	Wertebereiche der Grundfunktionen .....	173
10.4.3	Wertebereiche verwandter Funktionen .....	174
10.4.4	Wertebereiche beliebiger Funktionen.....	177
10.5	Schnittpunkte mit den Achsen.....	177
10.5.1	Schnittpunkt mit der senkrechten Achse .....	177
10.5.2	Schnittpunkte mit der waagerechten Achse.....	178
10.6	Ausblick .....	180
<b>11</b>	<b>Differentialrechnung.....</b>	<b>181</b>
11.1	Vorbemerkung, Bilanz, Ausblick .....	181
11.2	Der erste Ableitungswert.....	181
11.2.1	Begriff und Bedeutung .....	181
11.2.2	Symbolik.....	182
11.3	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Theorie.....	183
11.4	Berechnung des ersten Ableitungswertes: Praxis .....	184
11.4.1	Erster Ableitungswert und erste Ableitungsfunktion.....	184
11.4.2	Erste Ableitungsfunktion von wichtigen Grundfunktionen .....	184
11.4.3	Faktor- und Summenregel .....	186
11.4.4	Produktregel .....	187
11.4.5	Quotientenregel.....	188
11.5	Kettenregel.....	188
11.6	Logarithmisches Differenzieren .....	191
<b>12</b>	<b>Anwendungen der Ableitungsfunktionen.....</b>	<b>193</b>
12.1	Bedeutung des ersten Ableitungswertes für den Graphen.....	193
12.1.1	Anstieg der Tangente.....	193
12.1.2	Waagerechte Tangente .....	196
12.1.3	Existenz des ersten Ableitungswertes .....	197

12.2	Bedeutung der ersten Ableitungsfunktion für den Graphen .....	200
12.2.1	Grundsätzliches .....	200
12.2.2	Nullstellen der ersten Ableitung .....	202
12.3	Zweite Ableitungsfunktion .....	203
12.3.1	Begriff und Berechnung .....	203
12.3.2	Bedeutung für die Kurvendiskussion .....	203
12.3.3	Kriterien und hinreichende Bedingungen für relative Extrema .....	206
12.3.4	Lösung von Extremwertaufgaben .....	206
12.3.5	Höhere Ableitungsfunktionen .....	208
12.4	Ableitungsfunktionen nicht überall differenzierbarer Funktionen .....	208
12.5	Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke .....	209
12.6	TAYLOR-Polynome .....	211
12.6.1	Einführung .....	211
12.6.2	TAYLOR-Polynome .....	213
12.6.3	Die TAYLOR-Formel .....	214
12.6.4	TAYLOR-Polynome der Sinusfunktion um $x_0=0$ .....	214
12.6.5	Eigenschaften der TAYLOR-Polynome .....	215
12.6.6	Schmiegeparabeln .....	215
12.6.7	Einige TAYLOR-Polynome bekannter Funktionen mit $x_0=0$ .....	216
12.6.8	TAYLOR-Polynome in der Gegenwart – Fragen und Antworten .....	217
12.6.9	Von komplizierten zu vereinfachten Formeln .....	218
<b>13</b>	<b>Elemente der Integralrechnung .....</b>	<b>221</b>
13.1	Das bestimmte Integral .....	221
13.2	Berechnung bestimmter Integrale: Theorie .....	223
13.3	Berechnung bestimmter Integrale: Praxis .....	228
13.3.1	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung .....	228
13.3.2	Stammfunktionen und das unbestimmte Integral .....	229
13.3.3	Erste Integrationsregeln .....	232
13.3.4	Substitution, Transformation der Grenzen .....	234
13.4	Integration gebrochener rationaler Funktionen .....	236
13.4.1	Aufgabenstellung .....	236
13.4.2	Vorbetrachtungen .....	237

13.4.3	Echt gebrochene Integranden.....	237
13.4.4	Unecht gebrochene Integranden.....	239
13.5	Hinweis auf numerische Methoden.....	240
<b>14</b>	<b>Bestimmtes Integral: Anwendungen .....</b>	<b>241</b>
14.1	Berechnung von Flächeninhalten .....	241
14.2	Berechnung von Bogenlängen ebener Kurven .....	243
14.3	Volumen und Mantelflächen von Rotationskörpern.....	246
14.4	Schwerpunkte von ebenen, homogen mit Masse belegten Flächenstücken.....	251
<b>15</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen .....</b>	<b>253</b>
15.1	Einführung .....	253
15.2	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung .....	255
15.2.1	Konstante Koeffizienten und n-te Ordnung – homogener Fall .....	255
15.2.2	Konstante Koeffizienten und n-te Ordnung – inhomogener Fall.....	258
15.2.3	Partikuläre Lösung durch Ansatz.....	260
15.2.4	Nichtkonstante Koeffizienten und n-te Ordnung.....	262
15.3	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.....	262
15.3.1	Konstante Koeffizienten und 1.Ordnung, homogener Fall .....	262
15.3.2	Konstante Koeffizienten und 1. Ordnung, inhomogener Fall.....	263
15.3.3	Nichtkonstante Koeffizienten und 1.Ordnung – homogener Fall .....	263
15.3.4	Nichtkonstante Koeffizienten und 1.Ordnung – inhomogener Fall.....	264
15.4	Nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung .....	264
15.4.1	Spezialfall $y'=f(x)$ .....	265
15.4.2	Trennbare Variable.....	265
15.5	Anfangs- und Randwertaufgaben.....	269
15.5.1	Aufgabenstellung .....	269
15.5.2	Beispiel mit formelmäßiger Lösung.....	269
<b>16</b>	<b>Matrizen und Determinanten.....</b>	<b>271</b>
16.1	Allgemeines.....	271
16.1.1	Der Matrixbegriff.....	271
16.1.2	Der Matrixbegriff in der Mathematik.....	271
16.2	Matrizen-Begriffe.....	272



Inhaltsverzeichnis	15
16.2.1 Zeilen und Spalten, Format.....	272
16.2.2 Vektoren als spezielle Matrizen .....	272
16.2.3 Beziehungen zwischen Matrizen .....	273
16.2.4 Transponieren.....	273
16.3 Quadratische Matrizen .....	274
16.3.1 Diagonalen .....	274
16.3.2 Diagonal- und Einheitsmatrix .....	274
16.3.3 Symmetrie .....	275
16.4 Einfache Rechenregeln für Matrizen.....	275
16.4.1 Addition und Subtraktion, Nullmatrix .....	275
16.4.2 Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl .....	276
16.5 Matrizenmultiplikation.....	277
16.5.1 Herstellbarkeit von Matrizenprodukten.....	277
16.5.2 Vertauschbarkeit .....	279
16.5.3 Rechenregeln.....	279
16.5.4 Besonderheiten der Nullmatrix.....	280
16.5.5 Einselement der Matrizenmultiplikation.....	280
16.5.6 Division von Matrizen .....	281
16.6 Inverse Matrix .....	282
16.6.1 Fragestellung.....	282
16.6.2 Definition der inversen Matrix.....	282
16.6.3 Inverse von Diagonalmatrizen .....	284
16.6.4 Lösung einer Matrixgleichung mit quadratischer Matrix .....	284
16.6.5 Einzigkeit der Inversen.....	286
16.7 Der Determinantenbegriff .....	287
16.8 Bedeutung der Determinante.....	287
16.9 Berechnung von Determinanten.....	287
16.9.1 Zweireihige Determinanten.....	287
16.9.2 Dreireihige Determinanten – die Regel von SARRUS.....	288
16.9.3 n-reihige Determinanten – Hinweis auf den Entwicklungssatz .....	289
16.10 Determinantengesetze .....	289
16.11 Anwendungen .....	290
16.11.1 CRAMERsche Regel.....	290
16.11.2 Berechnung der Inversen von (2,2)-Matrizen.....	291

<b>17</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme.....</b>	<b>293</b>
17.1	Definition, Darstellungsformen und Begriffe.....	293
17.2	Quadratische Gleichungssysteme .....	296
17.2.1	Lösungssituationen.....	296
17.2.2	Theorie mit Determinanten.....	299
17.2.3	Praxis: Basisversion des GAUSSschen Algorithmus.....	300
<b>18</b>	<b>Vektorrechnung und analytische Geometrie .....</b>	<b>309</b>
18.1	Vektoren und ihre Anwendung .....	309
18.1.1	Einführung .....	309
18.1.2	Größe und Richtung .....	310
18.1.3	Das Skalarprodukt zweier Vektoren .....	314
18.1.4	Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren.....	316
18.2	Geraden und Ebenen.....	320
18.2.1	Beschreibung von Geraden.....	320
18.2.2	Beschreibung von Ebenen.....	324
	<b>Weiterführende und vertiefende Literatur .....</b>	<b>331</b>
	<b>Sachwortverzeichnis .....</b>	<b>333</b>