

Siegfried Gottwald

# Mehrwertige Logik

Eine Einführung  
in Theorie  
und Anwendungen



Akademie-Verlag Berlin 1989

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	IX
1. Einleitung .....	1
1.1. Klassische und mehrwertige Logik .....	1
1.2. Zur Geschichte der mehrwertigen Logik .....	5
1.3. Weiterhin benutzte Begriffe und Bezeichnungen .....	9
2. Mehrwertige Aussagenlogik .....	12
2.1. Die formale Sprache der Aussagenlogik .....	12
2.2. Ausgezeichnete Quasiwahrheitswerte, Tautologien und Folgerungen .....	18
2.3. Spezielle Junktoren und Mengen von Quasiwahrheitswerten ..	27
2.3.1. Wahrheitswertfunktionen für Negationen .....	30
2.3.2. Wahrheitswertfunktionen für Konjunktionen .....	31
2.3.3. Wahrheitswertfunktionen für Alternativen .....	32
2.3.4. Wahrheitswertfunktionen für Implikationen .....	34
2.3.5. Die Wahrheitswertfunktionen $j_t$ .....	35
2.4. Die Entscheidbarkeit mehrwertiger aussagenlogischer Systeme ..	36
2.5. Die Axiomatisierbarkeit mehrwertiger aussagenlogischer Systeme .....	37
2.6. Die formale Erfassung der Folgerungsbeziehung .....	53
2.7. Funktionale Vollständigkeit .....	69
2.8. Normalformdarstellungen .....	81
3. Spezielle Systeme mehrwertiger Aussagenlogik .....	84
3.1. Die ŁUKASIEWICZSchen aussagenlogischen Systeme .....	84
3.1.1. Wichtige Tautologien der $\mathbb{L}$ -Systeme .....	86
3.1.2. Charakterisierbarkeit der Anzahl der Quasiwahrheitswerte ..	90
3.1.3. Axiomatisierbarkeit .....	99
3.1.4. Entscheidbarkeit von $\mathbb{L}_{\infty}$ .....	105
3.1.5. Darstellbarkeit von Wahrheitswertfunktionen .....	107

3.2. Algebrische Strukturen für die ŁUKASIEWICZSchen Systeme	121
3.2.1. MV-Algebren	122
3.2.2. MV-Algebren und Axiomatisierungen der $\mathbf{L}$ -Systeme	134
3.2.3. ŁUKASIEWICZ-Algebren	144
3.3. Die Postschen aussagenlogischen Systeme	146
3.4. Die GöDELSchen aussagenlogischen Systeme	155
3.5. Spezielle dreiwertige aussagenlogische Systeme	165
3.6. Allgemeinere Junktorenklassen und Quasiwahrheitswertstrukturen	170
3.6.1. Eine Charakterisierung der Wahrheitswertfunktionen $\text{et}_1$ und $\text{vel}_1$	170
3.6.2. T-Normen als Wahrheitswertfunktionen für Konjunktionen	172
3.6.3. Mehrdimensionale Quasiwahrheitswertstrukturen	179
 4. Mehrwertige Prädikatenlogik	183
4.1. Mehrwertige Prädikate	183
4.2. Die formale Sprache der Prädikatenlogik und ihre mehrwertigen Interpretationen	184
4.3. Zur Erfüllbarkeit prädikatenlogischer Ausdrucksmengen	192
4.4. Die Axiomatisierbarkeit mehrwertiger prädikatenlogischer Systeme	207
4.5. Die ŁUKASIEWICZSchen prädikatenlogischen Systeme	218
4.5.1. Wichtige allgemeingültige Ausdrücke	219
4.5.2. Resultate über die $\mathbf{L}$ -Systeme	223
4.5.3. Das unendlichwertige $\mathbf{L}$ -System	230
4.6. Prädikatenlogische Systeme mit mehrwertiger Identität	237
4.6.1. Mehrwertige Identitätsbeziehungen	238
4.6.2. „Absolute“ Identitätsbeziehungen	240
4.6.3. „Echt mehrwertige“ Identitätsbeziehungen	243
 5. Anwendungen der mehrwertigen Logik	251
5.1. Das Anwendungsproblem	251
5.2. Quasiwahrheitswerte und alethische Modalitäten	252
5.3. Mehrwertige und intuitionistische Logik	258
5.4. Mehrwertige Logik und Präspositionstheorie	261
5.5. Unabhängigkeitsbeweise I: aussagenlogisch	267
5.6. Unabhängigkeitsbeweise II: prädikatenlogisch	271
5.7. Konsistenzuntersuchungen zur Mengenlehre	291
5.8. Unscharfe Mengen, Vagheit von Begriffen und mehrwertige Logik	298

5.8.1. Vagheit von Begriffen und unscharfe Mengen .....	298
5.8.2. Grundeigenschaften unscharfer Mengen .....	303
5.8.3. Gleichungen für unscharfe Zahlen .....	315
5.8.4. Unscharfe Relationen .....	324
5.9. Zwei außergewöhnliche Verallgemeinerungen .....	333
5.9.1. Unscharfe Folgerungsbeziehung .....	334
5.9.2. Approximatives Schließen .....	337
Literaturverzeichnis .....	346
Symbolverzeichnis .....	366
Namenverzeichnis .....	369
Sachverzeichnis .....	373