# 2020

# Abitur

Original-Prüf
mit Lösunger

MEHR ERFAHREN

Sachsen

## Mathematik L

+ *Online-Glossar*

ActiveBook
Interaktives Training

STARK

# Inhalt

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

**Lösungen der Aufgaben:**

Steffi Hultsch, Radebeul

# Vorwort

Liebe zukünftige Abiturientinnen und Abiturienten,

im vorliegenden Band finden Sie die **Original-Abituraufgaben ab Jahrgang 2012** für den **Leistungskurs Mathematik** im Freistaat Sachsen zur zentralen Abiturprüfung.

Diese Aufgaben helfen Ihnen bei der individuellen **Vorbereitung auf das Abitur**. Darüber hinaus kann das Material aber auch zur **Vorbereitung auf Klausuren** verwendet werden. Dazu bietet Ihnen dieses Buch **sehr ausführliche Lösungen mit Zwischenergebnissen** zur Selbstkontrolle. Die angegebenen Lösungswege sind freilich oft nicht die einzig möglichen.

Zu jeder Aufgabe sind **„Tipps und Hinweise“** aufgeführt. Sie sollen im Problemfall den Einstieg in die Aufgabe erleichtern und dazu beitragen, die Aufgabe **möglichst selbstständig** zu lösen.

**Noch ein Wort an die zukünftigen Abiturientinnen und Abiturienten:** Sicher benötigt man erst einmal mehr Zeit, als für die Aufgabe eigentlich vorgesehen ist. Aber mit der Übung stellen sich Fertigkeiten ein und Standardaufgaben werden bald sicher gelöst, sodass mehr Zeit für die anspruchsvolleren Aufgabenteile bleibt. In unmittelbarer Vorbereitung auf das Abitur sollte aber schon der Zeitfaktor eine zunehmende Rolle spielen. Nutzen Sie auch die Selbstkontrolle mit der Bewertungstabelle.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung 2020 vom Sächsischen Staatsministerium für Kultus bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
**www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell**

Ihnen viel Erfolg bei Ihrer Arbeit und Spaß beim Üben sowie ein gutes Abiturzeugnis!

*Steffi Hultsch*

# Hinweise und Tipps zum Zentralabitur

## Ablauf der Prüfung

### Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

In Sachsen gibt es zentrale schriftliche Abiturprüfungen, die im Auftrag des Ministeriums für Kultus erstellt und begutachtet werden. Die Inhalte richten sich nach den einheitlichen Prüfungsanforderungen aller Länder (EPA) bzw. den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012) sowie dem Lehrplan für das allgemeinbildende Gymnasium in Sachsen.

Seit dem **Schuljahr 2009/2010** besteht die Prüfungsarbeit aus den zu bearbeitenden **Prüfungsteilen A** und **B**. Die Gesamtarbeitszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt 300 Minuten.

Seit dem Abitur 2014 wird im Leistungskurs von den Bundesländern Bayern, Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein im Teil A gemeinsam ein Aufgabenpool erarbeitet und bereitgestellt. Aus diesem werden dann von den Ländern Aufgaben für einen Zeitumfang von 45 Minuten ausgewählt. Speziell für diesen Prüfungsteil erscheint im Stark Verlag unter der Bestellnummer 105000 ein eigenes Übungsbuch.

Jede*r Prüfungsteilnehmer*in hat
- im Prüfungsteil A mehrere Pflichtaufgaben zu grundlegenden Problemen der Analysis, Geometrie/Algebra und Stochastik,
- im Prüfungsteil B bis zu drei Pflichtaufgaben, die Probleme der Analysis, Geometrie/Algebra und Stochastik enthalten,

zu bearbeiten.

Die Aufgaben im Prüfungsteil B berücksichtigen auch Aspekte der
- Vernetzung von Inhalten unterschiedlicher mathematischer Teilgebiete,
- Anwendung mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten auf praxisorientierte Sachverhalte,
- selbstständigen Auswahl und flexiblen Anwendung grundlegender mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten bei offeneren Fragestellungen.

Die Materialien und alle vom Prüfling angefertigten Aufzeichnungen zum **Prüfungsteil A** werden **70 Minuten** nach Arbeitsbeginn von der Aufsicht führenden Lehrkraft eingesammelt.

In den Aufgabenstellungen werden Kompetenzen im
- mathematischen Modellieren,
- algorithmisch-kalkülmäßigen Arbeiten sowie
- Interpretieren und Beurteilen von Lösungen und Lösungswegen

in einem ausgewogenen Verhältnis berücksichtigt.

Im Prüfungsteil B können für einzelne Aufgaben zwei Varianten vorgegeben werden:
- Variante I für Schüler*innen, die einen GTR ohne CAS benutzen.
- Variante II für Schüler*innen, die einen GTR mit CAS bzw. ein CAS auf der Grundlage einer anderen Plattform benutzen.

Seit dem Schuljahr 2014/2015 ist erstmals der Lernbereich Matrizen verpflichtend im Lehrplan vorgeschrieben und kann demnach in der Abiturprüfung abgefragt werden. Da dieser Bereich zuvor nicht verpflichtend war und bisher nicht abgefragt wurde, ist er in den Aufgaben in diesem Buch nicht berücksichtigt.

**Hilfsmittel**

Bei der Bearbeitung der Prüfung stehen folgende Hilfsmittel zur Verfügung:
- Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung
- Zeichengeräte

Zusätzlich im Prüfungsteil B:
- Tabellen- und Formelsammlung
- grafikfähiger, programmierbarer Taschenrechner (GTR) mit oder ohne Computer-Algebra-System (CAS)

## Bewertung

Die Durchführung der Prüfung und die Korrektur der Arbeiten sind in der Oberstufen- und Abiturprüfungsverordnung (OAVO) vom Sächsischen Staatsministerium für Kultus festgelegt und werden durch eine Verwaltungsvorschrift zu jeder Abiturprüfung konkretisiert.
Die Bewertung der Abiturarbeit erfolgt unabhängig durch die eigene Fachlehrkraft (Erstkorrektor) sowie eine weitere Fachlehrkraft eines anderen Gymnasiums (Zweitkorrektor). Weichen deren Punktzahlen um mehr als drei Punkte voneinander ab, erfolgt eine Drittkorrektur.
Gegenstand der Bewertung ist die **sachliche Richtigkeit** der Beantwortung. **Sinnvolle Gedankenführung** und angemessene **sprachliche Darstellung** fließen dabei in die Bewertung ein.
Für die Bewertung der Prüfungsarbeiten werden fachbezogene Korrekturhinweise ausgegeben. Bei schwerwiegenden und gehäuften Verstößen gegen die sprachliche Richtigkeit in der Muttersprache oder gegen die äußere Form kann jeweils ein Punkt der einfachen Wertung abgezogen werden.
An den jeweiligen Aufgabenstellungen sind die verbindlichen Bewertungsmaßstäbe ersichtlich. Im Prüfungsteil A sind 30 Bewertungseinheiten (BE) und im Teil B 90 Bewertungseinheiten erreichbar. Bis einschließlich Abitur 2013 gab es im Teil A 15 Bewertungseinheiten und im Prüfungsteil B 45 Bewertungseinheiten.

## Leistungskurs Mathematik (Sachsen): Abiturprüfung 2018
## Teil B – Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt ein Modell eines Obelisken. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 Meter) beschreibt die x-y-Ebene den ebenen Untergrund, auf dem der Obelisk steht.
Das Modell des Obelisken besteht aus zwei Teilkörpern.
Der untere Teilkörper ABCDEFGH mit $B(0{,}45\,|\,0{,}45\,|\,0{,}00)$ ist ein Stumpf einer geraden Pyramide. Dieser Stumpf entsteht, indem man von einer geraden Pyramide mit einer quadratischen Grundfläche parallel zur Grundfläche eine kleinere Pyramide abschneidet.
Die Grundfläche ABCD des unteren Teilkörpers liegt in der x-y-Ebene, der Mittelpunkt des Quadrats ABCD ist der Koordinatenursprung.
Der obere Teilkörper $EFGHS_t$ mit $E(0{,}35\,|\,-0{,}35\,|\,7{,}16)$ ist eine gerade Pyramide mit der Spitze $S_t(0{,}00\,|\,0{,}00\,|\,7{,}16+t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $t > 0$.

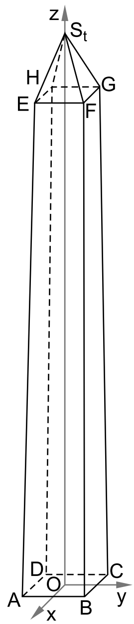

Abbildung
(nicht maßstäblich)

2.1 Ermitteln Sie die Länge einer Diagonalen der Grundfläche des unteren Teilkörpers.

Begründen Sie, dass der Punkt F die Koordinaten $F(0{,}35\,|\,0{,}35\,|\,7{,}16)$ hat.

Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels einer Seitenkante des unteren Teilkörpers gegenüber der x-y-Ebene.

Erreichbare BE-Anzahl: 9

2.2 Es gibt Ebenen, zu denen das Modell des Obelisken symmetrisch ist. Entscheiden Sie für jede der folgenden Gleichungen I bis IV, ob sie eine derartige Ebene beschreibt.

I $x = 0{,}45$ II $y = 0$ III $x - y = 0$ IV $x - z = 0$

Begründen Sie für eine der Gleichungen I bis IV, dass sie keine derartige Ebene beschreibt.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

2.3 Zeigen Sie, dass die Seitenfläche $EFS_t$ in der Ebene $\varepsilon$ mit der Gleichung $\varepsilon\colon\ t \cdot x + 0{,}35 \cdot z = 0{,}35 \cdot t + 2{,}506$ liegt.

Die Seitenfläche $FGS_t$ liegt in der Ebene $\eta$ mit der Gleichung $\eta\colon\ t \cdot y + 0{,}35 \cdot z = 0{,}35 \cdot t + 2{,}506$.

Bestimmen Sie den Wert t, für welchen die Ebenen $\varepsilon$ und $\eta$ einen Winkel von 80° einschließen.

Erreichbare BE-Anzahl: 8

## Tipps und Hinweise

### Teilaufgabe 2.1

- Die Länge der Diagonale entspricht z. B. der doppelten Entfernung des Punktes B vom Koordinatenursprung.
- Wenden Sie die Tatsache an, dass das Quadrat EFGH parallel zur x-y-Ebene liegt und sein Mittelpunkt auf der z-Achse.
- Wenden Sie die Formel $\sin\sphericalangle(\overline{BF},\ E_{xy}) = \frac{|\vec{a}_{\overline{BF}} \circ \vec{n}_{Exy}|}{|\vec{a}_{\overline{BF}}| \cdot |\vec{n}_{Exy}|}$ an.

### Teilaufgabe 2.2

- Betrachten Sie die Besonderheiten der Ebenen bezüglich der Koordinatenachsen und -ebenen.
- Es ist auch dienlich herauszufinden, welche Punkte oder Kanten des Obelisken jeweils in der gegebenen Ebene liegen.

### Teilaufgabe 2.3

- Wenn die Seitenfläche $EFS_t$ in der Ebene $\varepsilon$ liegen soll, müssen alle 3 Punkte in der Ebene liegen, also die Ebenengleichung erfüllen.
- Verwenden Sie als Ansatz für den Winkel zwischen den Ebenen die Gleichung $\cos\sphericalangle(\varepsilon, \eta) = \frac{|\vec{n}_\varepsilon \circ \vec{n}_\eta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\eta|}$ und ermitteln Sie $t > 0$ aus dem gegebenen Winkel.

### Teilaufgabe 2.4

- Bilden Sie die Summe der vier kongruenten Dreiecksflächen mit $A_D = \frac{g_D \cdot h_D}{2}$, wobei die Dreieckshöhe der Abstand des Mittelpunktes von z. B. $\overline{EF}$ zur Spitze ist.

### Teilaufgabe 2.5

- Bestimmen Sie den Schattenpunkt der Spitze als Durchstoßpunkt der Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ durch die Spitze $S_t$ mit der x-y-Ebene.
- Nutzen Sie zur Zeitersparnis den Rechner zum Lösen der Wurzelgleichung für den Betrag der Strecke.

### Teilaufgabe 2.6

- Die Zufallsgröße „Anzahl Kunstexperten“ ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = a$.
- Stellen Sie die Gleichung für $P(X = 1)$ in Abhängigkeit von a auf und ermitteln Sie grafisch das lokale Maximum.

## Lösungen

1 LE $\hat{=}$ 1 m
$B(0{,}45 \mid 0{,}45 \mid 0{,}00)$, $E(0{,}35 \mid -0{,}35 \mid 7{,}16)$
$S_t(0{,}00 \mid 0{,}00 \mid 7{,}16+t)$; $t \in \mathbb{R}, t>0$

2.1 $\overline{DB} = 2 \cdot \overline{OB} = 2 \cdot \sqrt{0{,}45^2 + 0{,}45^2} \approx 1{,}27$

Die Diagonale hat eine Länge von $\underline{\underline{\text{ca. } 1{,}27 \text{ m}}}$.

EFGH ist ein Quadrat, das parallel zur x-y-Ebene verläuft und dessen Eckpunkte alle den gleichen Abstand zur z-Achse haben. Deshalb muss F die gleiche x- und z-Koordinate wie E besitzen und die umgekehrte y-Koordinate von E, also $\underline{\underline{F(0{,}35 \mid 0{,}35 \mid 7{,}16)}}$.

Seitenkante $\overline{BF} \ldots \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}45 \\ 0{,}00 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -0{,}10 \\ -0{,}10 \\ 7{,}16 \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 1; \ t \in \mathbb{R}$

x-y-Ebene: $z = 0$ mit $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\sin \sphericalangle(\overline{BF}, E_{xy}) = \frac{|\vec{a}_{\overline{BF}} \circ \vec{n}_{Exy}|}{|\vec{a}_{\overline{BF}}| \cdot |\vec{n}_{Exy}|} = \frac{|0+0+7{,}16|}{\sqrt{0{,}10^2 + 0{,}10^2 + 7{,}16^2} \cdot 1}$$

$$\sphericalangle(\overline{BF}, E_{xy}) \approx \underline{\underline{88{,}9^\circ}}$$

Man könnte auch den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{BO}$ und $\overrightarrow{BF}$ ermitteln.

2.2

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | $x = 0{,}45$ | Nein. | Diese Ebene enthält $\overline{AB}$ und ist orthogonal zur x-y-Ebene (außerhalb des Obelisken). |
| II | $y = 0$ | Ja. | Es ist die x-z-Ebene und diese halbiert den Obelisken symmetrisch (senkrecht). |
| III | $x - y = 0$ | Ja. | Die Ebene enthält die z-Achse und die Punkte B und D sowie F und H, halbiert den Obelisken also diagonal. |
| IV | $x - z = 0$ | Nein. | Die Ebene enthält die y-Achse und ist praktisch die Winkelhalbierende zur x-z-Ebene. Nur ein kleiner Teil des Obelisken mit $\overline{AB}$ liegt vor bzw. unter der Ebene, der Rest darüber bzw. dahinter. |

Die Aufgabenstellung fordert nur eine Begründung für eines der „Nein“.

2.3 $\varepsilon \ldots\ t \cdot x + 0{,}35z = 0{,}35t + 2{,}506$

Seitenfläche $EFS_t \subseteq \varepsilon$, wenn $E \in \varepsilon$, $F \in \varepsilon$ und $S_t \in \varepsilon$:

E: $t \cdot 0{,}35 + 0{,}35 \cdot 7{,}16 = 0{,}35t + 2{,}506 \quad \left| -0{,}35t \right.$

$$2{,}506 = 2{,}506 \quad \text{w. A.} \quad \Rightarrow \quad E \in \varepsilon$$

F: $t \cdot 0{,}35 + 0{,}35 \cdot 7{,}16 = 0{,}35t + 2{,}506$

$$2{,}506 = 2{,}506 \quad \text{w. A.} \quad \Rightarrow \quad F \in \varepsilon$$

$S_t$: $t \cdot 0 + 0{,}35 \cdot (7{,}16 + t) = 0{,}35t + 2{,}506$

$$2{,}506 + 0{,}35t = 0{,}35t + 2{,}506 \quad \text{w. A.} \quad \Rightarrow \quad S_t \in \varepsilon$$

Damit liegt die Seitenfläche $EFS_t$ in der Ebene $\varepsilon$.

$\eta \ldots\ t \cdot y + 0{,}35z = 0{,}35t + 2{,}506$

$FGS_t$ liegt in $\eta$.

$$\vec{n}_\varepsilon = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0{,}35 \end{pmatrix}; \quad \cos 80^\circ \approx 0{,}17365$$

$$\cos \sphericalangle(\varepsilon, \eta) = \frac{|\vec{n}_\varepsilon \circ \vec{n}_\eta|}{|\vec{n}_\varepsilon| \cdot |\vec{n}_\eta|} = \frac{|t \cdot 0 + 0 \cdot t + 0{,}35 \cdot 0{,}35|}{\sqrt{t^2 + 0{,}35^2} \cdot \sqrt{t^2 + 0{,}35^2}}$$

$$0{,}17365 = \frac{0{,}1225}{t^2 + 0{,}1225}$$

$$t^2 + 0{,}1225 = \frac{0{,}1225}{0{,}17365}$$

$$t^2 = \frac{0{,}1225}{0{,}17365} - 0{,}1225$$

$$\underline{\underline{t \approx 0{,}76}} \quad (t > 0 \text{ gefordert})$$

Für $t \approx 0{,}76$ schließen die Ebenen einen Winkel von $80^\circ$ ein.

2.4 $A_M = 4 \cdot A_D$

NR: $h_D = \overline{M_{\overline{EF}} S_t}$ mit $M_{\overline{EF}}(0{,}35 | 0{,}00 | 7{,}16)$

$= \sqrt{0{,}35^2 + t^2}$

$g_D = \overline{EF} = 0{,}70$

$$A_M = 4 \cdot \frac{g_D \cdot h_D}{2}$$

$$= 2 \cdot 0{,}7 \cdot \sqrt{0{,}35^2 + t^2}$$

$$A_M = 1{,}4 \cdot \sqrt{0{,}1225 + t^2}$$

Die Mantelfläche beträgt $\underline{\underline{1{,}4 \cdot \sqrt{0{,}1225 + t^2}\ m^2}}$.