GYMNASIUM

TRAINING

MATHEMATIK

MEHR ERFAHREN

Grundwissen

Algebra 7. Klasse

STARK

Inhalt

Autor: Markus Fiederer

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit diesem Buch kannst du den **gesamten Unterrichtsstoff** für die **Algebra** in der **7. Klasse** selbstständig wiederholen und dich optimal auf Klassenarbeiten bzw. Schulaufgaben vorbereiten.

- Im **Grundwissen** werden alle relevanten Themen aufgegriffen und anhand von ausführlichen **Beispielen** veranschaulicht. **Kleinschrittige Hinweise** erklären dir die einzelnen Rechen- oder Denkschritte genau. Die Zusammenfassungen der **zentralen Inhalte** sind außerdem in blauer Schrift hervorgehoben.
- **Zahlreiche Übungsaufgaben** mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad bieten dir die Möglichkeit, die verschiedenen Themen einzuüben. Hier kannst du überprüfen, ob du den gelernten Stoff auch anwenden kannst.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit **zusätzlichen Hinweisen**, die dir den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.

Besonders effektiv kannst du mit dem Buch **arbeiten**, wenn du dich an einer der beiden folgenden Vorgehensweisen orientierst:

- Bearbeite **zunächst das Grundwissen mit den Beispielen** und löse anschließend selbstständig die Übungsaufgaben in der angegebenen Reihenfolge. Wichtig: Schlage erst dann in den Lösungen nach, wenn du mit einer Aufgabe wirklich fertig bist! Solltest du mit eine Aufgabe gar nicht zurechtkommen, dann markiere sie und bearbeite zunächst die zugehörige Lösung. Versuche, die Aufgabe nach ein paar Tagen noch einmal selbstständig zu lösen.
- Alternativ kannst du damit beginnen, **einige Übungsaufgaben** in einem Kapitel zu lösen und danach deine Lösungen mit den angegebenen Lösungen zu vergleichen. Wenn alle Aufgaben richtig sind, bearbeitest du die weiteren Aufgaben des Kapitels. Bei Unsicherheiten oder Schwierigkeiten wiederholst du die entsprechenden Inhalte im Grundwissen.

Ich wünsche dir gute Fortschritte bei der Arbeit mit diesem Buch und viel Erfolg in der Mathematik.

Markus Fiederer

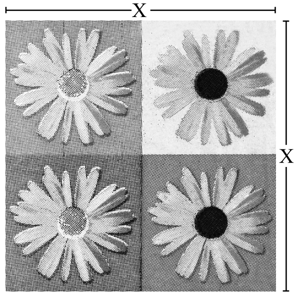
Gleichungen

Gleichungen sind Aussageformen. Die Aussage ist wahr, wenn auf der linken und rechten Seite der Gleichung gleiche Termwerte stehen.
Die zwei Terme links und rechts des Gleichheitszeichens befinden sich sozusagen im Gleichgewicht.

Wie muss man die Seitenlänge x eines Quadrates wählen, um den Umfang 60 cm zu erhalten?

$$U = 4 \cdot x$$
$$60\text{ cm} = 4 \cdot x$$

Diese Aussageform nennt man eine Gleichung. Bei dieser einfachen Gleichung kann man die Lösung $x = 15$ cm erraten, die eine wahre Aussage ergibt.



- **Gleichungen** bestehen aus **zwei** mit einem **Gleichheitszeichen verbundenen Termen** und mindestens einer **Variablen**. Ziel ist es, eine (oder mehrere) Zahl(en) für x zu finden, mit der (bzw. denen) die Gleichung erfüllt wird und die **Aussage wahr** ist.
- Die **Grundmenge $\mathbb{G}$** einer Gleichung gibt alle Zahlen an, die als Lösung der Gleichung infrage kommen. **Die Grundmenge aller hier verwendeten Gleichungen sei $\mathbb{Q}$.**
- Falls eine Lösung existiert, heißt die Gleichung lösbar. Löst genau eine Zahl die Gleichung, so heißt die Gleichung eindeutig lösbar. Die **Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{\ldots\}$** enthält die Zahlen der Grundmenge, die die Gleichung erfüllen.

Beispiel

$x - 4 = 5$

Lösung:

$x - 4 = 5; \quad \mathbb{G} = \mathbb{Q}$

Für x dürfen alle rationalen Zahlen eingesetzt werden: $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$

$x = 9$

Probe: $9 - 4 = 5$

9 ist Element der Grundmenge und erfüllt die Probe, also ist 9 Lösung.

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{9\}$.

1 Lösen einfacher Gleichungen

Betrachte die Gleichung $2x + 3 = 25$. Schon bei dieser relativ einfachen Gleichung ist es schwierig, eine Lösung zu erraten.
Um die Gleichung zu lösen, isolierst du die Variable mittels Umformungen auf eine Seite des Gleichheitszeichens. Allerdings dürfen die Umformungen die Lösung der ursprünglichen Gleichung nicht verändern. Das kannst du verstehen, wenn du an eine Balkenwaage denkst:

Sie bleibt im Gleichgewicht, wenn auf beiden Waagschalen das gleiche Gewicht aufgelegt oder weggenommen wird. Überträgt man dies auf eine Gleichung, muss auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens das Gleiche (das Äquivalente) verändert werden.

Um **Gleichungen zu lösen**, **isolierst** du die **Variable** auf eine Seite des Gleichheitszeichens. Damit die Lösung der neuen Gleichung mit der Lösung der ursprünglichen Gleichung übereinstimmt, darfst du ausschließlich die folgenden **Äquivalenzumformungen** durchführen:

- die **Addition bzw. Subtraktion auf beiden Seiten** der Gleichung mit denselben Zahlen,
- die **Multiplikation bzw. Division** derselben Zahl ungleich null **auf beiden Seiten** der Gleichung.

Beispiel

$2x + 3 = 25$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
2x + 3 &= 25 \qquad | -3 \\
2x + \underbrace{3 - 3}_{=0} &= 25 - 3 \\
2x &= 22 \qquad | :2 \\
2x : 2 &= 22 : 2 \\
x &= 11
\end{aligned}
$$

Isoliere x auf eine Seite des Gleichheitszeichens durch Subtraktion von –3. Gib die **Äquivalenzumformungen** stets **hinter einem senkrechten Strich** in der jeweiligen Zeile der Gleichung an. So kannst du später leichter nachvollziehen, was du gerechnet hast.

Probe:

$$
\begin{aligned}
2x + 3 &= 25 \\
2 \cdot 11 + 3 &= 25 \\
22 + 3 &= 25 \\
25 &= 25
\end{aligned}
$$

Überprüfe deine Lösung durch Einsetzen in die Anfangsgleichung.

Ergebnis: Die Lösungsmenge der Gleichung ist $\mathbb{L} = \{11\}$.

Aufgaben

84. Bestimme die Lösungsmengen der Gleichungen.

a) $3x - 1 = -11$

b) $-3x + 1 - (2x + 7) = 24$

c) $x : (-12) = 5$

d) $x : 1{,}2 - \frac{4}{5} = \frac{1}{10}$

e) $(-x):3-\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$

f) $5=-\frac{4}{3}-19x$

g) $-\left(1\frac{2}{3}+3x\right)-2+\frac{1}{3}\cdot x=2$

h) $\frac{1}{8}-\left(7x+\frac{2}{8}\right)-\frac{1}{2}=0$

i) $2-\left(11\frac{2}{3}-x\right):2+0{,}5\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$

j) $-2\frac{1}{3}\cdot\left(5\frac{1}{2}x+1{,}2x\right)-\left(\frac{1}{2}x-4\right)=1\frac{2}{5}$

85. Prüfe, ob die angegebene Zahl eine Lösung der Gleichung ist.

a) $5x+3=-4;\quad x=-\frac{7}{5}$

b) $\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}+2x=1;\quad x=-2$

c) $x^2+3x-1=3;\ x_1=1;\ x_2=-4$

d) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{1}{3};\quad x=4$

e) $6x^3-11x^2=14x-24;$
$x_1=2;\ x_2=-\frac{3}{2};\ x_3=\frac{4}{3}$

f) $\frac{3x^2-4x+5}{2x-3}=3x+\frac{1}{2};$
$x_1=2;\ x_2=0$

g) $-x^2+\frac{2}{36}x=-\frac{2}{3}x^2-\frac{15}{36}x+\frac{1}{6};$
$x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{1}{2};\ x_3=0$

h) $\frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x}=-2;$
$x_1=\frac{1}{2};\ x_2=-\frac{1}{3}$

i) $\left(x+\frac{2}{5}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0{,}63;$
$x_1=-1;\ x_2=\frac{2}{5}$

j) $\frac{1}{3}x-\frac{5}{2}+3x-\frac{2}{3}=6\frac{5}{6};$
$x=3$

k) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\cdot(-x-1)=0;$
$x_1=\frac{2}{3};\ x_2=\frac{4}{3};\ x_3=1$

l) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)=14{,}625;$
$x_1=-6;\ x_2=\frac{1}{3}$

2 Lösungsstrategie für komplizierte Gleichungen

Oft sind die Gleichungen, für die die Lösungsmenge gesucht wird, sehr komplex und du musst viele einzelne Rechenschritte nacheinander ausführen. Wenn du die angegebene Reihenfolge streng beachtest, gelangst du sicher ans Ziel.

Komplizierte Gleichungen kannst du mit folgender Strategie lösen:

1. **Vereinfache** die Gleichung, indem du Klammern auflöst und gleichartige Glieder zusammenfasst.
2. **Isoliere** die gesuchte Variable mittels Äquivalenzumformungen.
3. **Überprüfe**, ob die gefundene Lösung Element der Grundmenge ist, und mache die **Probe** durch Einsetzen der Lösung in die Gleichung.
4. Gib die **Lösungsmenge** an.

Beispiele

1. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $9x-2-(7x+2)=-4x$.

Lösung:

Schritt 1: Vereinfache die Gleichung.

$$\begin{aligned} 9x-2-(7x+2) &= -4x \\ 9x-2-7x-2 &= -4x \\ 9x-7x-2-2 &= -4x \\ 2x-4 &= -4x \end{aligned}$$

Löse die Klammer auf und fasse zusammen.

Schritt 2: Isoliere die Variable.

$$\begin{aligned} 2x-4 &= -4x && \mid +4x \\ 2x+\mathbf{4x}-4 &= -4x+\mathbf{4x} \\ 6x-4 &= 0 && \mid +4 \\ 6x &= 4 && \mid :6 \\ 6x\,\mathbf{:6} &= 4\,\mathbf{:6} \\ x &= \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} \end{aligned}$$

Isoliere die Variable x, indem du 4x addierst und anschließend die Zahl 4 addierst. Dividiere dann durch den Vorfaktor 6 der Variablen.

Schritt 3: Überprüfung

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$$

$\frac{2}{3}$ ist eine rationale Zahl und damit in der Grundmenge $\mathbb{Q}$ enthalten. Die Probe zeigt, dass die gefundene Lösung richtig ist.

c) Lösungsweg 1:
$(a+b+c+d)\cdot(a+b+c)$

	a	b	c	d
a	**a^2**	**ab**	**ac**	**ad**
b	**ba**	**b^2**	**bc**	**bd**
c	**ac**	**cb**	**c^2**	**cd**

Lösungsweg 2:

$a^2+ab+ac+ad+ba+b^2+bc+bd+$
$ac+cb+c^2+cd=$
$a^2+ab+ab+ac+ac+ad+$
$b^2+bc+bc+bd+c^2+cd=$
$a^2+2ab+2ac+ad+b^2+2bc+bd+c^2+cd$

Ergebnis:
$\mathbf{(a+b+c+d)\cdot(a+b+c)=a^2+2ab+2ac+ad+b^2+2bc+bd+c^2+cd}$

84. a)

$$
\begin{aligned}
3x-1&=-11 && \mid \mathbf{+1}\\
3x-1\mathbf{+1}&=-11\mathbf{+1}\\
3x&=-10 && \mid \mathbf{:3}\\
3x\mathbf{:3}&=-10\mathbf{:3}\\
x&=-\frac{10}{3}\\
x&=-3\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Isoliere 3x durch die Äquivalenzumformung + 1.

Dividiere durch den Vorfaktor 3. Das ist wieder eine Äquivalenzumformung.

$x=-3\frac{1}{3}$ ist Element der Grundmenge $\mathbb{Q}$.

Probe: $x=\mathbf{-3\frac{1}{3}}$ in die Gleichung einsetzen.

$$
\begin{aligned}
3\cdot\left(\mathbf{-3\frac{1}{3}}\right)-1&=-11\\
-9\frac{3}{3}-1&=-11\\
-10-1&=-11\\
-11&=-11
\end{aligned}
$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left\{\mathbf{-3\frac{1}{3}}\right\}$.

b)

$$
\begin{aligned}
-3x+1-(2x+7)&=24\\
-3x+1-2x-7&=24\\
-3x-2x+1-7&=24\\
-5x-6&=24 && \mid \mathbf{+6}\\
-5x&=30 && \mid \mathbf{:(-5)}\\
x&=-6
\end{aligned}
$$

Probe: $x = \mathbf{-6}$ in die Gleichung einsetzen.

$$-3\cdot(\mathbf{-6})+1-(2(\mathbf{-6})+7)=24$$
$$18+1-(-12+7)=24$$
$$19-(-5)=24$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{-6\}$.

c) $x:(-12)=5 \qquad \big|\cdot(-12)$

$$\frac{x}{-12}\cdot(-12)=5\cdot(-12)$$
$$x=-60$$

Probe: $x = \mathbf{-60}$ in die Gleichung einsetzen.

$$\mathbf{-60}:(-12)=5$$
$$60:12=5$$
$$5=5$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{-60\}$.

d) $x:1{,}2-\frac{4}{5}=\frac{1}{10} \qquad \big|+\frac{4}{5}$

Achte auf Punkt vor Strich.

$$x:1{,}2-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{1}{10}+\frac{4}{5}$$
$$x:1{,}2=\frac{1}{10}+\frac{8}{10}$$
$$x:1{,}2=\frac{9}{10} \qquad \big|\cdot 1{,}2$$
$$(x:1{,}2)\cdot 1{,}2=\frac{9}{10}\cdot 1{,}2$$
$$x=\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{10}=\frac{108}{100}=1{,}08$$

Probe:

$$1{,}08:1{,}2-\frac{4}{5}=\frac{1}{10}$$
$$0{,}9-\frac{4}{5}=\frac{1}{10}$$
$$\frac{9}{10}-\frac{8}{10}=\frac{1}{10}$$
$$\frac{1}{10}=\frac{1}{10}$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{1{,}08\}$.

e) $$(-x):3-\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$$
$$(-x):3=\frac{6}{9}+\frac{1}{9}$$
$$(-x):3=\frac{7}{9}$$
$$-x=\frac{7}{9}\cdot 3$$
$$-x=\frac{7}{3}$$
$$x=-2\frac{1}{3}$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left\{-2\frac{1}{3}\right\}$.

f) $$5=-\frac{4}{3}-19x \quad \left|\,+\frac{4}{3}\right.$$
$$6\frac{1}{3}=-19x$$
$$\frac{19}{3}=-19x \quad |\,:(-19)$$
$$-\frac{19}{3}\cdot\frac{1}{19}=x$$
$$-\frac{1}{3}=x$$

Probe:
$$5=-\frac{4}{3}-19\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$5=-\frac{4}{3}+\frac{19}{3}$$
$$5=\frac{15}{3}$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

g) $$-\left(1\frac{2}{3}+3x\right)-2+\frac{1}{3}\cdot x=2$$
$$-1\frac{2}{3}-3x-2+\frac{1}{3}x=2$$
$$-3x+\frac{1}{3}x-1\frac{2}{3}-2=2$$
$$-2\frac{2}{3}x-3\frac{2}{3}=2 \qquad \Big| +3\frac{2}{3}$$
$$-2\frac{2}{3}x=5\frac{2}{3}$$
$$-\frac{8}{3}x=\frac{17}{3} \qquad \Big| :\left(-\frac{8}{3}\right)$$
$$x=-\frac{17}{3}:\frac{8}{3}$$
$$x=-\frac{17}{3}\cdot\frac{3}{8}$$
$$x=-\frac{17}{8}=-2\frac{1}{8}$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left\{-2\frac{1}{8}\right\}$.

h) $$\frac{1}{8}-\left(7x+\frac{2}{8}\right)-\frac{1}{2}=0$$
$$\frac{1}{8}-7x-\frac{2}{8}-\frac{1}{2}=0$$
$$-7x+\frac{1}{8}-\frac{2}{8}-\frac{4}{8}=0$$
$$-7x-\frac{5}{8}=0$$
$$-7x=\frac{5}{8}$$
$$-x=\frac{5}{8\cdot 7}$$
$$x=-\frac{5}{56}$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left\{-\frac{5}{56}\right\}$.

i) $2-\left(11\frac{2}{3}-x\right):2+0,5\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$

$$2-\left(11\frac{2}{3}-x\right):2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$2-\left(11\frac{2}{3}-x\right):2+\frac{1}{6}=-\frac{1}{6} \qquad \left|-\frac{1}{6}\right.$$

$$2-\left(11\frac{2}{3}-x\right):2=-\frac{2}{6} \qquad |-2$$

$$-\left(11\frac{2}{3}-x\right):2=-\frac{1}{3}-2$$

$$-\left(11\frac{2}{3}-x\right):2=-2\frac{1}{3} \qquad |\cdot 2$$

$$-\left(11\frac{2}{3}-x\right)=-4\frac{2}{3}$$

$$11\frac{2}{3}-x=4\frac{2}{3} \qquad \left|-11\frac{2}{3}\right.$$

$$-x=4\frac{2}{3}-11\frac{2}{3}$$

$$-x=-7$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\{7\}$.

j) $-2\frac{1}{3}\cdot\left(5\frac{1}{2}x+1,2x\right)-\left(\frac{1}{2}x-4\right)=1\frac{2}{5}$

$$-2\frac{1}{3}\cdot 6,7x-\frac{1}{2}x+4=1\frac{2}{5}$$

$$-15\frac{19}{30}x-\frac{15}{30}x+4=1\frac{2}{5}$$

$$-16\frac{2}{15}x+4=1\frac{2}{5}$$

$$-16\frac{2}{15}x=-2\frac{3}{5}$$

$$16\frac{2}{15}x=2\frac{3}{5}$$

$$\frac{242}{15}x=\frac{13}{5}$$

$$x=\frac{13}{5}:\frac{242}{15}=\frac{13}{5}\cdot\frac{15}{242}=\frac{39}{242}$$

Ergebnis: Die Lösungsmenge ist $\mathbb{L}=\left\{\frac{39}{242}\right\}$.