Berufliches Gymnasium

Original-Prüfungs...

MEHR ERFAHREN

Fachbereich Wir... NRW

Mathematik

+ Übungsaufgaben zu den Schwerpunktthemen
+ CAS-Abitur als PDF

PDF

STARK

Inhalt

Lineare Algebra

Stochastik

Zentrale Abitur-Prüfungsaufgaben

Abiturprüfung Grundkurs 2016

Abiturprüfung Leistungskurs 2016

Abiturprüfung Grundkurs 2017

Abiturprüfung Leistungskurs 2017

Abiturprüfung Grundkurs 2018

Abiturprüfung Leistungskurs 2018

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Als PDF zum Download stehen Ihnen auf www.stark-verlag.de/mystark eine Probeklausur für den Aufgabenteil B mit CAS im Leistungskurs und die Original-Prüfungsaufgaben für Grund- und Leistungskurs der Jahre 2013 bis 2015 (ohne CAS) sowie 2013 bis 2018 (mit CAS) zur Verfügung.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen im Abitur vom Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter: www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Autoren der Übungsaufgaben und Lösungen der Abituraufgaben:

2013: Andreas Höing (Paul-Spiegel-Berufskolleg, Dorsten); Hubertus Schulte Huxel (Paul-Spiegel-Berufskolleg, Dorsten)
2014, 2015: Andreas Berg (Berufskolleg Kaufmännische Schulen Düren); Anja Esser (Städtisches Berufskolleg Wirtschaft und Verwaltung, Leverkusen)
ab 2016: Andreas Berg (Berufskolleg Kaufmännische Schulen Düren)

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Sie haben Mathematik als Grund- oder Leistungskurs gewählt und planen, in diesem Fach Ihr Abitur im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung an einem Beruflichen Gymnasium in NRW abzulegen. Dieses Buch hilft Ihnen, sich gezielt und effektiv auf die zentralen Abschlussprüfungen in Grund- und Leistungskurs vorzubereiten:

- Im ersten Teil finden Sie zahlreiche **Informationen zum Abitur**, deren Kenntnisse für die gezielte Vorbereitung hilfreich und wichtig sind. Dazu gehören die **Hinweise zum Ablauf der Prüfung** und der **Bewertung**, vor allem aber die **Schwerpunktthemen für 2020** und die inhaltlichen Tipps.
- Seit dem Abitur 2017 besteht die schriftliche Abiturprüfung aus zwei Aufgabenteilen: dem Aufgabenteil A (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) sowie dem Aufgabenteil B (Bearbeitung mit Hilfsmitteln). In diesem Buch finden Sie **Übungsaufgaben** zu diesen beiden Aufgabenteilen, sowohl für den **Grundkurs als auch für den Leistungskurs**, wobei einzelne Teilaufgaben primär für den Leistungskurs gedacht sind. Im Übungsteil zum Aufgabenteil B sind diese mit einem $*$ gekennzeichnet. Die Aufgaben sind auf den Stil und die Form der Prüfungsaufgaben abgestimmt. Der Schwierigkeitsgrad entspricht dem der Prüfungsaufgaben.
- Vom Schulministerium veröffentlichte Beispielaufgaben für den Aufgabenteil A finden Sie unter: www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/upload/abitur-bk/Ergaenzende_Handreichung_zum_Fach_Mathematik.pdf
- Zusätzlich finden Sie in diesem Band bzw. als PDF zum Download die vollständigen **Original-Abituraufgaben von 2013 bis 2018** sowie deren Lösungen. Damit können Sie sich ein genaueres Bild davon machen, wie die Prüfungen bisher ausgesehen haben. Als PDF zum Download steht Ihnen außerdem eine Probeklausur für den Aufgabenteil B der Prüfung mit CAS im Leistungskurs zur Verfügung.
- Sämtliche Aufgaben im Buch enthalten **vollständige, kommentierte Lösungsvorschläge**. Zu allen Aufgaben, die mit Hilfsmitteln zu bearbeiten sind, gibt es **separate Tipps zum Lösungsansatz**, die das selbstständige Lösen der Aufgaben erleichtern. Teilweise fließen Hintergrundinformationen ein, die für das jeweilige Verständnis der Anwendungssituation hilfreich sind. In jedem Fall sollten Sie die Tipps und Hinweise zu einer Aufgabe nach der Bearbeitung abschließend durchdenken.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!
Die Autoren

Hinweise und Tipps zum Abitur

1 Ablauf der Prüfung

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung

An den Beruflichen Gymnasien in NRW werden seit dem Schuljahr 2007/08 zentrale Abiturprüfungen sukzessive eingeführt. Im Leistungskurs Mathematik wird die Abschlussklausur seit dem Schuljahr 2008/09 und im Grundkurs seit 2009/10 zentral gestellt. Die Aufgaben werden im Auftrag des Ministeriums für Schule und Weiterbildung von einer Fachkommission erstellt, die als Grundlage hierfür Aufgabenvorschläge ausgewählter Mathematiklehrer nutzt. Diese richten sich nach den für das jeweilige Jahr gültigen inhaltlichen Schwerpunkten (siehe 2), die während der Qualifikationsphase (12. und 13. Klasse) erarbeitet werden. Durch die Schwerpunktsetzung soll gesichert sein, dass alle Schülerinnen und Schüler über die gleichen inhaltlichen Voraussetzungen verfügen.

Aufbau der Prüfungsaufgaben

Seit dem Schuljahr 2014/15 ist ab der Jahrgangsstufe 11 der verpflichtende Einsatz grafikfähiger Taschenrechner (GTR oder CAS) vorgesehen. Aus diesem Grund besteht die Abiturprüfung im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung seit dem Jahr 2017 aus insgesamt vier Aufgaben, gegliedert in **zwei Aufgabenteile**.
Aufgabenteil A (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) enthält jeweils Teilaufgaben zur Analysis, Linearen Algebra und Stochastik. Er besteht dabei aus einer Aufgabe mit vier Teilaufgaben (Leistungskurs) bzw. drei Teilaufgaben (Grundkurs), die jeweils voneinander unabhängig lösbar sind. Im Leistungskurs sind zwei der vier Teilaufgaben der Analysis zugeordnet.
Aufgabenteil B (Bearbeitung mit Hilfsmitteln) enthält jeweils eine Aufgabe zu den oben genannten drei Teilgebieten, wobei jede Aufgabe in Teilaufgaben gegliedert ist.
Für die Abiturprüfung im **Grundkurs** erhält die Schule, unabhängig von der jeweils verwendeten Rechnertechnologie, einen einzigen Aufgabensatz, für die im **Leistungskurs** erhält sie insgesamt zwei Aufgabensätze, die sich jeweils durch die Art der verwendeten Rechnertechnologie unterscheiden: den Aufgabensatz 1 (GTR) und den Aufgabensatz 2 (CAS). Im Leistungskurs ist der Aufgabenteil A für die beiden Aufgabensätze identisch.
Die Schule muss zu Beginn der Qualifikationsphase festlegen, welche der zwei Technologiekategorien angewendet werden soll. Durch diese Entscheidung wird ein Aufgabensatz für die Prüfungsgruppe festgelegt. Es findet keine Aufgabenauswahl durch die Fachlehrerin oder den Fachlehrer statt. Die Prüflinge haben ebenfalls keine Auswahlmöglichkeit.

Durchführung der Abschlussklausur

Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt **180 Minuten (Grundkurs)** bzw. **255 Minuten (Leistungskurs)**. Die Schülerinnen und Schüler erhalten zu Beginn der Bearbeitungszeit beide Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel werden zu diesem Zeitpunkt **noch nicht** ausgegeben.
Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung, jedoch nach spätestens 35 Minuten (GK) bzw. 50 Minuten (LK) der Bearbeitungszeit, ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln.

Zugelassene Hilfsmittel

- Seit dem Abitur 2017 sind für alle Prüflinge grafikfähige Taschenrechner (GTR) bzw. Computeralgebrasysteme (CAS) zugelassen.
- Zur Bearbeitung des Aufgabenteils A sind keine Hilfsmittel zugelassen, beispielsweise auch keine Formelsammlungen.
- Zur Bearbeitung des Aufgabenteils B sind **im Grundkurs** grafikfähige Taschenrechner (GTR) *oder* computeralgebrafähige Taschencomputer bzw. Computeralgebrasysteme auf einem PC zugelassen. Die Aufgaben werden dabei so gestaltet, dass bei der Nutzung eines Computeralgebrasystems (CAS) kein wesentlicher Vorteil gegenüber der Nutzung eines grafikfähigen Taschenrechners (GTR) entsteht.
  Zur Bearbeitung des Aufgabenteils B sind **im Leistungskurs** grafikfähige Taschenrechner (GTR) für den Aufgabensatz 1 *bzw.* Computeralgebrasysteme für den Aufgabensatz 2 zugelassen.
- Zur Bearbeitung des Aufgabenteils B sind ferner gedruckte Formelsammlungen der Schulbuchverlage (ohne Beispielaufgaben) zugelassen.

Der eingesetzte GTR soll über die Funktionalitäten gemäß
https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/gtr/gtr.php
verfügen.

Das eingesetzte CAS soll mindestens folgende Funktionen umfassen:

- algebraische Ausdrücke vereinfachen und vergleichen
- Gleichungen symbolisch und numerisch lösen
- lineare Gleichungssysteme lösen und Matrizenberechnungen durchführen
- Funktionen symbolisch und numerisch differenzieren und integrieren
- Funktionen und Daten zweidimensional grafisch darstellen
- Werte der Binomialverteilung und Normalverteilung bestimmen

2 Inhalte und Schwerpunktthemen 2020

Die inhaltlichen **Schwerpunkte für den Grundkurs Mathematik** in der Abiturprüfung 2020 sind in der Tabelle angeführt. Zu den Schwerpunkten werden Übungsaufgaben und Original-Abituraufgaben aufgelistet, die Beispiele enthalten.

Schwerpunkte für den GK Mathematik im Abitur 2020	Beispiele
Analysis	
• Ganzrationale Funktionen	
– Ableitungs- und Integrationsregeln	Übung A4, B1, B2, B4, B5, B6; GK 18: 2.1, 2.3.2
– globale und lokale Eigenschaften	Übung B1, B2, B4, B5, B6; GK 17: 1.1, 2.2, 2.3; GK 18: 2.1, 2.2
– Herleitung von Funktionsgleichungen aus vorgegebenen Bedingungen	Übung A2, B1; GK 16: 2.1; GK 17: 2.1; GK 18: 2.1
• Exponentialfunktionen	
– Funktionen der Form $f(x) = p(x) \cdot e^{k \cdot x}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und p ganzrational	Übung A3, B3, B7; GK 16: 2.3; GK 18: 1.1
– Ableitungsregeln	Übung A3, B3; GK 16: 2.3; GK 18: 1.1
– globale und lokale Eigenschaften	Übung A3, B3; GK 16: 2.3; GK 18: 1.1
– bestimmte Integrale mit GTR/CAS	Übung B3, B7; GK 18: 2.3
• Ökonomische Anwendungen	
– Modell der vollständigen Konkurrenz (inklusive Betriebsminimum und Betriebsoptimum)	Übung A1, A2, A4, B1, B2, B4, B5; GK 16: 2.1, 2.2; GK 17: 1.1, 2; GK 18: 2.1, 2.2
– Produzenten- und Konsumentenrente	Übung A5, B3, B7; GK 18: 2.3
– Absatz-/Umsatzentwicklung	Übung A3, B3, B7; GK 16: 2.3; GK 18: 1.1
Stochastik	
• Bedingte Wahrscheinlichkeit	
– Vierfeldertafel und Baumdiagramm	Übung A1, A3, A5, B1, B2, B3; GK 16: 2.3; GK 17: 4.2; GK 18: 1.3, 4.1
• Zufallsgrößen	
– Wahrscheinlichkeitsverteilung – Erwartungswert	Übung A6, B1, B2; GK 18 1.3

Aufgabe 1

Die folgende Tabelle gibt die Grenzkosten K', die Stückkosten k sowie die variablen Stückkosten k_v zu einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K (ganzrational vom Grad 3) an (x in ME; K(x) in GE):

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
K'(x)	3,9	2,4	1,5	1,2	1,5	2,4	3,9	6	8,7	12
k(x)	14,7	8,9	6,57	5,25	4,46	4,03	3,9	4,03	4,39	4,98
k_v(x)	4,9	4	3,3	2,8	2,5	2,4	2,5	2,8	3,3	4

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Die Fixkosten belaufen sich auf 9,8 GE.

1.2 Die Kosten steigen zwischen 4 und 10 ME progressiv.

1.3 Die kurzfristige Preisuntergrenze beträgt 3,9 GE/ME.

Aufgabe 2

Die bei einem Produktionsprozess anfallenden Kosten lassen sich durch eine ganzrationale Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ beschreiben, zu der die folgende Wertetabelle für einen bestimmten Produktionszeitraum gehört.

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
K(x)	6	11	14,2	16,2	17,6	19	21
K'(x)	6,1	4	2,5	1,6	1,3	1,6	2,5
K''(x)	–2,4	–1,8	–1,2	–0,6	0	0,6	1,2

Die Werte für x sind in Mengeneinheiten (ME) und die Funktionswerte von K in Geldeinheiten (GE) angegeben. Die Kapazitätsgrenze liegt bei 6 ME im betrachteten Produktionszeitraum.

2.1 Zeigen Sie mit den Tabellenwerten, dass $b = -1{,}2$, $c = 6{,}1$ und $d = 6$ gilt.

2.2 Leiten Sie rechnerisch her, dass $a = 0{,}1$ gilt.

2.3 Berechnen Sie das Betriebsminimum und die kurzfristige Preisuntergrenze.

Lösung

1.1 Für die Produktionsmenge $x = 1$ gilt offenbar:
$K(1) = k(1) = 14{,}7$ GE
$K_v(1) = k_v(1) = 4{,}9$ GE
Es gilt: $K_{fix} = K(1) - K_v(1) = 14{,}7 - 4{,}9 = 9{,}8$ GE

Die Aussage ist wahr.

1.2 Bei der Grenzkostenfunktion K' handelt es sich um eine quadratische Funktion, deren Graph eine Parabel ist. Aus Symmetriegründen kann man der Tabelle entnehmen, dass sich der Scheitelpunkt von K' im Punkt $GK_{min}(4\,|\,1{,}2)$ befindet. Damit ist K' ab 4 ME monoton steigend, der Kostenverlauf ist ab da also progressiv. Die Aussage stimmt.

1.3 Das Betriebsminimum befindet sich im Schnittpunkt von Grenzkostenfunktion K' und variabler Stückkostenfunktion k_v. Der Tabelle kann man entnehmen, dass dies der Punkt $BM(6\,|\,2{,}4)$ ist. Daher beträgt die kurzfristige Preisuntergrenze 2,4 GE/ME. Die Aussage ist falsch.

Alternativ können Sie auch wie in Teilaufgabe 1.2 begründen, dass $BM(6\,|\,2{,}4)$ der Scheitelpunkt von k_v ist.

2.1 Es gilt: $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ und $K''(x) = 6ax + 2b$

Der Tabelle entnimmt man:
$d = K(0) = 6$ (Fixkosten)
$c = K'(0) = 6{,}1$
$2b = K''(0) = -2{,}4 \quad \Rightarrow \quad b = -1{,}2$

2.2 Es gilt beispielsweise mit $K(x) = ax^3 - 1{,}2x^2 + 6{,}1x + 6$:
$K(1) = 11 \quad \Leftrightarrow \quad a - 1{,}2 + 6{,}1 + 6 = 11 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0{,}1$

2.3 Notwendige und hinreichende Bedingung für das Betriebsminimum:
$k'_v(x) = 0$ und $k''_v(x) > 0$

Hier gilt:

$k_v(x) = 0{,}1x^2 - 1{,}2x + 6{,}1, \quad k'_v(x) = 0{,}2x - 1{,}2 \quad k''_v(x) = 0{,}2 > 0$

Damit ergibt sich:

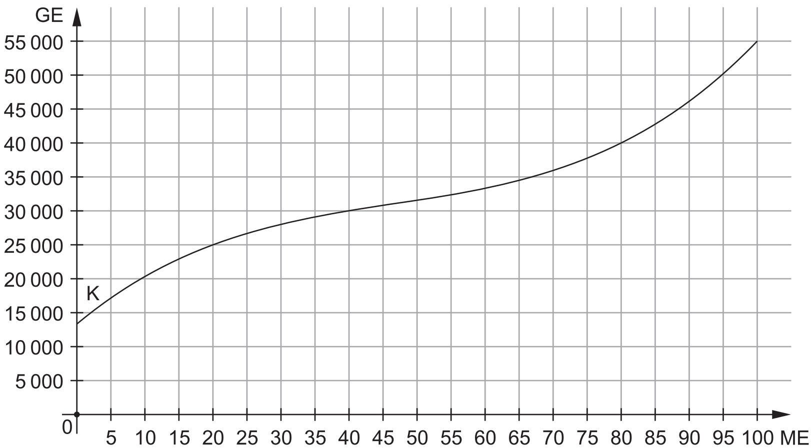
$k'_v(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}2x - 1{,}2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}2x = 1{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$

Die betriebsminimale Menge ist 6 ME.

Es gilt außerdem:
$K_v(6) = K(6) - K_{fix} = K(6) - d = 21 - 6 = 15$ und somit $k_v(6) = \dfrac{K_v(6)}{6} = \dfrac{15}{6} = 2{,}5.$

Aufgabe 1

Der Graph einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K eines polypolistischen Anbieters mit $K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ sowie a, c, $d > 0$ und $b < 0$, x in ME und K(x) in GE ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



1.1 Ermitteln Sie grafisch näherungsweise die betriebsoptimale Menge sowie die langfristige Preisuntergrenze.

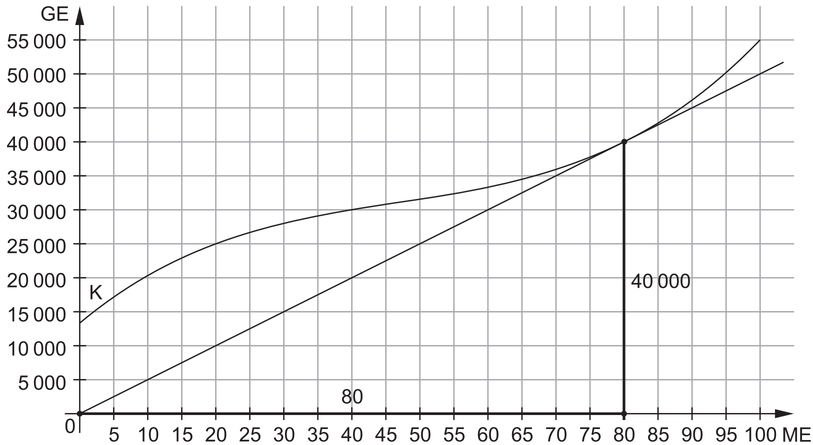
1.2 Beweisen Sie allgemein, dass die Grenzkosten bei der Produktionsmenge $x = -\frac{b}{3a}$ minimal sind.

Aufgabe 2

Der Preis eines Produkts entwickelt sich nach der Nachfragefunktion p mit $p(x) = -0{,}5x^2 + 18$ (x in ME, p(x) in GE/ME).
Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 zum Gleichgewichtspreis in Höhe von 10 GE/ME verkauft (vgl. nachfolgende Abbildung).

Lösung

1.1 Bei der betriebsoptimalen Menge werden alle anfallenden Kosten gerade noch gedeckt. Die zur langfristigen Preisuntergrenze gehörende Erlösgerade berührt an dieser Stelle den Graphen der Kostenfunktion tangential.



Die betriebsoptimale Menge ist demnach ca. 80 ME, während die langfristige Preisuntergrenze näherungsweise den bei dieser Menge anfallenden Stückkosten $p = \frac{40\,000}{80} = 500$ GE/ME entspricht.

1.2 Minimum der Grenzkosten K':

$K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad K''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b, \quad K'''(x) = 6a$ mit $a > 0$ und $b < 0$

Notwendig und hinreichend sind: $K''(x) = 0$ und $K'''(x) > 0$

$6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2 \cdot b}{6 \cdot a} = -\frac{b}{3 \cdot a} > 0$, da $a > 0$ und $b < 0$

Dabei ist $K'''(x) = 6a > 0$, da $a > 0$ gilt.

Somit ist die Behauptung nachgewiesen.

2.1 Da der Gleichgewichtspreis 10 GE/ME beträgt, gilt: $p(x) = 10$

$-0{,}5x^2 + 18 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 8 = 0{,}5x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4$

Daher beträgt die Gleichgewichtsmenge 4 ME.

2.2 Damit die Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, muss der Preis p_1 so gewählt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks unter dem Flächenstück der Konsumentenrente im Teilmarkt 1 maximal wird. Für diesen Flächeninhalt gilt mit $0 \le x \le 3$:

$A(x) = x \cdot (p(x) - 10) = x \cdot (-0{,}5x^2 + 8) = -0{,}5x^3 + 8x$

Berufliches Gymnasium NRW – Mathematik mit GTR (Wirtschaft/Verwaltung)
Zentrale Abiturprüfung 2018 Grundkurs – Teil B: Aufgabe 2 (Analysis)

Aufgabenstellung (Gesamtpunktzahl 24 Punkte)
Als einer von vielen Anbietern produziert die Bilster Möbel GmbH Holzmöbel aller Art. Hierzu gehören diverse Schrank- und Regalsysteme, Tische und Stühle.

In allen Aufgaben gilt: ME $\widehat{=}$ Mengeneinheiten und GE $\widehat{=}$ Geldeinheiten

Die Bilster Möbel GmbH produziert den Computertisch Marseille und bietet diesen zu einem Verkaufspreis von 50 GE/ME an.

Die Kapazitätsgrenze für dieses Produkt liegt bei 10 ME.

Der Kostenverlauf für die Produktion des Computertisches Marseille wird beschrieben durch eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion dritten Grades.

		Punkte
2.1	Als Gewinnfunktion wurde $G(x) = -4x^3 + 16x^2 + 12x - 48$ ermittelt.	
2.1.1	Berechnen Sie den Gewinn, den das Unternehmen maximal erzielen kann.	3
2.1.2	Ermitteln Sie diejenigen Produktionsmengen, für die das Unternehmen einen Gewinn von mindestens 10 GE erzielt.	2
2.1.3	Leiten Sie die Funktionsgleichung der zugehörigen Kostenfunktion K her.	3

Gehen Sie im Folgenden von der Kostenfunktion $K(x) = 4x^3 - 16x^2 + 38x + 48$ aus.

2.2	Ein Konkurrenzunternehmen bietet ein vergleichbares Modell zu einem Preis von 45 GE/ME an. Daher wird überlegt, den Preis zu senken.	
2.2.1	Bestätigen Sie, dass das Betriebsminimum 2 ME beträgt, und geben Sie die kurzfristige Preisuntergrenze an.	3
2.2.2	Die Unternehmensleitung entschließt sich, den Preis ebenfalls auf 45 GE/ME zu senken. Bestimmen Sie alle Ausbringungsmengen, für die das Unternehmen einen Gewinn von mindestens 5 % der Gesamtkosten erzielt.	4

Tipps und Hinweise

Teilaufgabe 2.1.1

- Wenden Sie die notwendige und die hinreichende Bedingung für lokale Extrempunkte an.
- Sie dürfen Gleichungen auch mit den Funktionalitäten des GTR lösen.
- Ökonomisch irrelevante Lösungen müssen Sie nicht weiter betrachten.

Teilaufgabe 2.1.2

- Gesucht ist der Produktionsbereich, innerhalb dessen der Gewinn mindestens 10 GE beträgt.
- Sie können eine Ungleichung mit dem GTR grafisch lösen.

Teilaufgabe 2.1.3

- Stellen Sie zunächst die Gleichung der linearen Erlösfunktion E(x) bei einem konstanten Verkaufspreis auf.
- Stellen Sie die Grundgleichung $G(x) = E(x) - K(x)$ geeignet um.
- Beachten Sie die Notwendigkeit einer geeigneten Klammersetzung.

Teilaufgabe 2.2

- Stellen Sie zur Veranschaulichung die Grenzkostenfunktion sowie die variable Stückkostenfunktion grafisch dar.

Teilaufgabe 2.2.1

- Die kurzfristige Preisuntergrenze entspricht den minimalen variablen Stückkosten und liegt im Betriebsminimum vor. Mit diesem Preis können gerade noch die anfallenden variablen Kosten gedeckt werden.
- Sie können das Betriebsminimum grafisch oder rechnerisch bestimmen.
- Der Graph der Grenzkostenfunktion K' schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion k_v in deren Tiefpunkt, also im Betriebsminimum.
- Alternativ kann das Betriebsminimum mithilfe des Tiefpunktes der variablen Stückkostenfunktion bestimmt werden. Der Graph der variablen Stückkostenfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel, deren Scheitelpunkt in der Scheitelpunktform ablesbar ist.

Teilaufgabe 2.2.2

- Um den angestrebten Gewinn von mindestens 5 % zu erzielen, muss der Erlös die Gesamtkosten entsprechend übersteigen.
- Sie können eine Ungleichung mit dem GTR grafisch lösen.

Teilaufgabe 2.3.1

- Beachten Sie, auf welcher Achse die Mengen bzw. die Preise angegeben werden.
- Im Marktgleichgewicht werden beim Gleichgewichtspreis gleich große Mengen angeboten bzw. nachgefragt. Somit befindet es sich im Schnittpunkt der beiden Graphen.
- Kennzeichnen Sie den Gleichgewichtspreis durch eine geeignete Gerade.
- Die Konsumentenrente beschreibt die potenzielle Ersparnis der Konsumenten. Sie wird daher mithilfe der Nachfragefunktion p_N beschrieben.

Teilaufgabe 2.3.2

- Sie können das Marktgleichgewicht sowie den zugehörigen Flächeninhalt grafisch oder rechnerisch bestimmen.
- Sie dürfen mit den entsprechenden Funktionalitäten des GTR Gleichungen lösen und bestimmte Integrale berechnen.

Teilaufgabe 2.3.3

- Stellen Sie die Situation für verschiedene Werte von b grafisch dar.

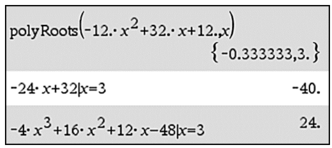
Lösung

2.1.1 Notwendige Bedingung:
$G'(x)=0$ mit $G'(x)=-12x^2+32x+12$

Somit gilt hier:
$-12x^2+32x+12=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$

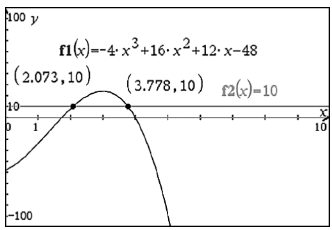
(Die zweite rechnerische Lösung $x=-\frac{1}{3}$ ist ökonomisch irrelevant.)

Mit $G''(x)=-24x+32$ ist dann:
$G''(3)=-40<0$ und
$G(3)=24$



Der maximale Gewinn wird also beim Verkauf von 3 ME erzielt und beträgt 24 GE.

2.1.2 Die Schnittstellen des Graphen der Gewinnfunktion mit der Geraden $y=10$ liegen bei ca. 2,073 ME und ca. 3,778 ME. Dazwischen verläuft der Graph von G oberhalb dieser Geraden. Zwischen diesen beiden Werten wird ein Gewinn von mindestens 10 GE erzielt.



Berufliches Gymnasium NRW – Mathematik mit GTR (Wirtschaft/Verwaltung)
Zentrale Abiturprüfung 2018 Leistungskurs – Teil A: Aufgabe 1 (ohne Hilfsmittel)

Aufgabenstellung (Gesamtpunktzahl 24 Punkte)
Das Unternehmen Miss Marble stellt seit über 30 Jahren Glasprodukte her. Dabei verbindet es traditionelle Glasbläserkunst mit neuester Massenproduktionstechnik. Das von Miss Marble vertriebene Sortiment reicht von einfachen Murmeln bis zu hochwertigem Glas.

Punkte

1.1 **Analysis**

In der Produktion von Spiegelglas hängen die Produktionskosten in hohem Maße vom Preis des verwendeten Rohstoffs Zinn ab. Da dieser nicht vorhersehbar ist, kalkuliert das Unternehmen mit einer parameterabhängigen Funktion:

$$K_c(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + c \cdot x + 30 \text{ mit } c \geq 0$$

1.1.1 Eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion besitzt keine lokalen Extrema.
Zeigen Sie, dass dies für $c > 36$ erfüllt ist. 4

1.1.2 Bestätigen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge nicht vom Parameter c abhängt. 2

1.2 **Analysis**

Zu Beginn jedes Jahres werden einige Produktionskapazitäten auf die Herstellung von Osterartikeln umgestellt.

Der Absatz der Osterartikel (in ME pro Monat) kann in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) durch die Funktion a_b mit der Gleichung $a_b(t) = e^{-0,5 \cdot t^2 + b \cdot t}$ mit $t \geq 0$ und $b > 0$ beschrieben werden.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt der Jahresbeginn. Der Parameter b beschreibt den Einfluss des Werbebudgets.

1.2.1 Der Absatz soll 1 ME pro Monat betragen.
Ermitteln Sie die zugehörigen Zeitpunkte in Abhängigkeit von b. 4

1.4.2 Für $k = 3{,}6$ lautet die zugehörige Leontief-Inverse

$$(E - A_{3,6})^{-1} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3{,}5 & 5 \end{pmatrix}$$

Werk A kann 1 ME und Werk C kann 2 ME an den Markt abgeben.

Berechnen Sie, wie viele ME Werk B an den Markt abgeben kann, wenn Werk B 25 ME produziert. 3

Tipps und Hinweise

Teilaufgabe 1.1.1

- Zeigen Sie, dass für $c > 36$ die notwendige Bedingung für lokale Extrempunkte nicht erfüllbar ist.
- Sie können auch verwenden, dass jede Kostenfunktion K mit $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sowie $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$ und $3ac > b^2$ ertragsgesetzlich ist.

Teilaufgabe 1.1.2

- Berechnen Sie die betriebsminimale Menge x_{BM} als x-Koordinate des Minimums bzw. Scheitelpunktes der zur (von c abhängigen) variablen Stückkostenfunktion $k_{v,c}$ gehörenden Parabel oder als Schnittstelle von Grenzkosten- und variabler Stückkostenfunktion.
- Sie können die Aussage auch mit der Formel zur Berechnung der betriebsminimalen Menge $x_{BM} = -\frac{b}{2a}$ bestätigen.

Teilaufgabe 1.2.1

- Lösen Sie die Gleichung $a_b(t) = 1$.
- Beachten Sie, dass $e^0 = 1$ gilt.
- Quadratische Gleichungen können beispielsweise mit der p-q-Formel und ggf. auch durch Ausklammern der Variablen gelöst werden.

Teilaufgabe 1.2.2

- Der Absatz innerhalb der ersten fünf Monate entspricht anschaulich dem Inhalt der Fläche, die der Graph der Absatzfunktion mit der waagerechten Zeitachse im Intervall von 0 bis 5 einschließt.
- Bestimmen Sie den gesuchten Flächeninhalt z. B. näherungsweise durch Zählen der Kästchen. Beachten Sie dabei, welcher Absatzmenge ein Kästchen entspricht.
- Der Jahresbeginn entspricht dem Zeitpunkt $t = 0$.

Lösung

1.1.1 $K'_c(x) = x^2 - 12x + c$

$K'_c(x) = 0 \iff x^2 - 12x + c = 0 \iff x = 6 + \sqrt{36-c} \lor x = 6 - \sqrt{36-c}$

Für $c > 36$ hat die Gleichung keine reelle Lösung und somit auch keine lokalen Extrema.

Alternativ: Die Kostenfunktion mit $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$ und $3ac \geq b^2$ ist ertragsgesetzlich, was im vorliegenden Fall auf die Ungleichung $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot c \geq (-6)^2$ und somit auf $c \geq 36$ führt, also insbesondere auf $c > 36$.

1.1.2 Die notwendige Bedingung für das Betriebsminimum lautet: $k'_{v,c}(x) = 0$
Hier gilt:

$$k_{v,c}(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - 6x + c$$

$$k'_{v,c}(x) = \frac{2}{3} \cdot x - 6$$

Da in der ersten Ableitung kein Parameter mehr vorhanden ist, hängt deren Nullstelle (betriebsminimale Ausbringungsmenge) nicht von c ab.

Sie können auch die exakte Lösung von $\frac{2}{3}x - 6 = 0$, also $x = 9$, berechnen. (Sie hängt nicht von c ab.)

Diese Lösung liefert ebenfalls der Ansatz $k_{v,c}(x) = K'_c(x)$ mit $\frac{1}{3}x^2 - 6x + c = x^2 - 12x + c$, der auf $0 = \frac{2}{3}x^2 - 6x$ und somit $0 = \frac{2}{3} \cdot x \cdot (x-9)$ führt.

Alternativ gilt unter Verwendung der Formel $x_{BM} = -\frac{b}{2a}$:

$$x_{BM} = -\frac{-6}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 9$$

1.2.1 Wenn der monatliche Absatz 1 ME beträgt, dann ergibt sich unter Verwendung von $e^0 = 1$ bzw. durch Anwenden des natürlichen Logarithmus:

$$a_b(t) = 1 \iff e^{-\frac{1}{2}t^2 + b \cdot t} = 1 \overset{\ln}{\iff} -\frac{1}{2}t^2 + b \cdot t = 0 \iff t \cdot \left(-\frac{1}{2}t + b\right) = 0$$

$$\iff t = 0 \lor -\frac{1}{2}t + b = 0 \iff t = 0 \lor t = 2b$$

Der monatliche Absatz beträgt daher sowohl am Jahresbeginn als auch zum Zeitpunkt 2b jeweils 1 ME.