MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Stochastik

Bayern

STARK

Inhalt

Vorwort

Zufallsexperimente **1**
1 Einstufige und mehrstufige Zufallsexperimente 2
2 Ereignisse und ihre Verknüpfungen 11

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff **23**
1 Absolute und relative Häufigkeit 24
2 Veranschaulichung von Häufigkeiten durch Mengendiagramm und Vierfeldertafel 28
3 Eigenschaften der relativen Häufigkeit 31
4 Definition der Wahrscheinlichkeit 36
5 Laplace-Experimente und ihre Wahrscheinlichkeit 40
6 Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm 43

Kombinatorische Hilfsmittel **49**
1 Allgemeines Zählprinzip 50
2 Besondere Abzählvorgänge 53
2.1 Anzahl der k-Tupel aus einer Menge mit n Elementen (mit Reihenfolge und mit Wiederholung) 53
2.2 Anzahl der k-Tupel aus einer Menge mit n Elementen (mit Reihenfolge und ohne Wiederholung) 54
2.3 Anzahl der k-Mengen aus einer Menge mit n Elementen (ohne Reihenfolge und ohne Wiederholung) 56
2.4 Zusammenfassung und vermischte Aufgaben 59

Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit **61**
1 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Vierfeldertafel 62
2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Baumdiagramm 66
3 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen 70

Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung **73**
1 Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung 74
2 Darstellung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 78
3 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße . 79

Die Binomialverteilung **85**
1 Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette 86
2 Die Binomialverteilung – Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer 89
3 Einfluss von n und p auf das Histogramm 95
4 Kumulative Binomialverteilung –
Wahrscheinlichkeit eines Trefferbereichs 97
5 Erwartungswert und Varianz einer binomialverteilten Zufallsgröße 106

Testen von Hypothesen **109**

Lösungen **119**

Stichwortverzeichnis **191**

Autoren:
Franz Wieand, Ingeborg Goller

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dem vorliegenden Trainingsband für die **Stochastik** halten Sie ein Buch in Händen, das Sie bei der Vorbereitung auf Klausuren und auf die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik umfassend unterstützt.

Aufgrund des modularen Aufbaus müssen Sie das Buch nicht von vorne nach hinten lesen. Beginnen Sie Ihr Training in dem Stoffgebiet, in dem Sie noch Probleme haben. Folgende strukturelle Maßnahmen erleichtern dabei Ihre Arbeit:

- Die wichtigen **Definitionen** eines Lernabschnitts werden schülergerecht und doch mathematisch präzise formuliert in blauen Feldern hervorgehoben. Die unterrichtsrelevanten **Regeln** werden in blau umrandeten Kästen verständlich zusammengefasst.
- An jeden Theorieteil schließen passgenaue **Beispiele** an, die die einzelnen Rechen- und Denkschritte genau und gut nachvollziehbar erläutern.
- Zu den wichtigsten Themenbereichen gibt es **Lernvideos**, in denen die typischen Beispiele Schritt für Schritt erklärt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, den Sie mithilfe Ihres Smartphones oder Tablets scannen können – Sie gelangen so schnell und einfach zum zugehörigen Lernvideo.

- Jeder Lernabschnitt schließt mit zahlreichen **Übungsaufgaben**, mit deren Hilfe Sie die verschiedenen Themen einüben können. Hier können Sie überprüfen, ob Sie den gelernten Stoff auch anwenden können.
- Zu allen Aufgaben gibt es am Ende des Buches **vollständig vorgerechnete Lösungen** mit ausführlichen Hinweisen, die Ihnen den Lösungsansatz und die jeweiligen Schwierigkeiten genau erläutern.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg für die gesamte Abiturprüfung und alles erdenklich Gute für Ihren weiteren Lebensweg.

Franz Wieand Ingeborg Goller

4 Definition der Wahrscheinlichkeit

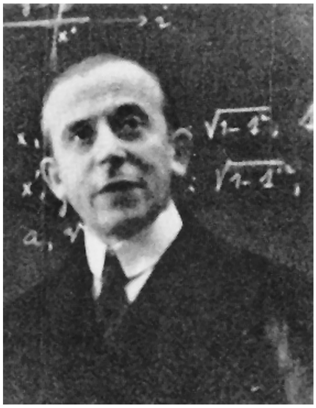
Die Frage, wie man Wahrscheinlichkeiten finden oder definieren kann, hat viele Mathematiker lange beschäftigt. 1919 versuchte der österreichische Mathematiker Richard von Mises den Begriff „Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A" mithilfe der relativen Häufigkeit zu definieren:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} h_n(A)$$

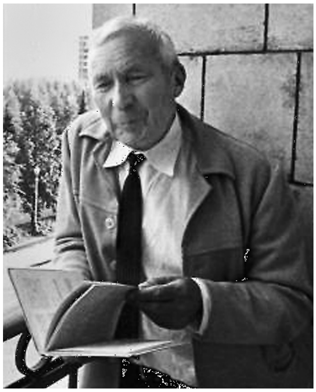
Wahrscheinlich heißt auf Englisch *probably*. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A wird deshalb mit P(A) abgekürzt.

Obige Definition scheint zwar logisch, bringt aber theoretische und praktische Schwierigkeiten mit sich. Wann liegt h_n innerhalb eines kleinen Intervalls? Wer kann unendlich viele Zufallsexperimente durchführen? Die Zahl n der Versuche soll nicht allzu groß sein (sonst ist das Experiment zu aufwendig und zu teuer), n darf aber auch nicht zu klein sein (sonst ist das Ergebnis zu ungenau). Größere Abweichungen können immer wieder auftreten, werden aber immer „unwahrscheinlicher".

1933 verzichtete der russische Mathematiker Andrei Kolmogorow (1903–1987) auf eine zahlenmäßige Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses. Er stellte lediglich drei Forderungen **(Axiome)** auf, aus denen dann weitere Eigenschaften gefolgert werden können.



Richard von Mises



Andrei Kolmogorow

Definition

Eine Funktion P, die jedem Ereignis $A \subset \Omega$ eine reelle Zahl P(A) zuordnet, ist eine **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn gilt:

Axiom 1: Die Wahrscheinlichkeit für jedes Ereignis $A \subset \Omega$ ist nie negativ:
$P(A) \geq 0$

Axiom 2: Die Wahrscheinlichkeit des sicheren Ereignisses ist 1:
$P(\Omega) = 1$

Axiom 3: Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei unvereinbaren Ereignissen ($A \cap B = \{\ \}$) entweder das eine oder das andere eintritt, ist gleich der Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Wie die Zuordnung P(A) aussieht, wird dadurch jedoch nicht beantwortet. Aus den Axiomen lassen sich aber einige Folgerungen beweisen. Diese Folgerungen stehen im Einklang mit den Eigenschaften der relativen Häufigkeit. Kennt man die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments, so kann man die Wahrscheinlichkeit aller Ereignisse von Ω berechnen.

Regel

Folgerung 1: $0 \leq P(\omega) \leq 1$

Folgerung 2: $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$

Folgerung 3: $P(A) = \sum\limits_{\omega \in A} P(\omega)$

Folgerung 4: $P(\{\ \}) = 0$

Folgerung 5: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Folgerung 6: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Beispiele

1. Eine Pyramide hat vier verschiedenfarbige Seitenflächen. Eine ist rot, eine blau, eine grün und eine gelb. Beim Würfeln bleibt in 28 % aller Fälle die grüne Seite auf dem Tisch liegen. Die blaue Seite liegt viermal und die gelbe Seite dreimal so oft auf dem Tisch wie die rote.
   a) Stellen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf.
   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
      A: „Die gewürfelte Seite ist blau oder grün.“
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
      B: „Es wird nicht rot gewürfelt.“

Lösung:

a) Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit für die rote Seite mit x, so sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung wie folgt aus:

ω	rot	blau	grün	gelb
$P(\omega)$	x	4x	0,28	3x

Mithilfe von Folgerung 2 erhält man:

$$\begin{aligned} x+4x+0,28+3x &= 1 \\ 8x+0,28 &= 1 \\ 8x &= 0,72 \\ x &= 0,09 \end{aligned}$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments ist 1. Die daraus entstehende Gleichung wird nach x aufgelöst.

Also gilt:

ω	rot	blau	grün	gelb
$P(\omega)$	0,09	0,36	0,28	0,27

b) $P(A) = P(\{\text{blau; grün}\}) = 0,36 + 0,28 = 0,64$ Folgerung 3

c) $P(B) = P(\text{nicht rot}) = 1 - P(\text{rot}) = 1 - 0,09 = 0,91$ Folgerung 5

2. Von den Schülern des Viscardi-Gymnasiums gehen 30 % in einen Sportverein; 80 % besitzen ein Handy. 20 % besitzen ein Handy und gehen in einen Sportverein.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler im Sportverein ist oder ein Handy besitzt.

Lösung:
Mit S: „Schüler geht in den Sportverein“ und H: „Schüler besitzt ein Handy“ ist gegeben:
$P(S) = 0,30$; $P(H) = 0,80$; $P(S \cap H) = 0,20$

Mit Folgerung 6 folgt:

$P(S \cup H) = P(S) + P(H) - P(S \cap H) = 0,30 + 0,80 - 0,20 = 0,90$

90 % der Schüler sind im Sportverein oder besitzen ein Handy.

3. Katja hat einen sechsseitigen Würfel durch Beschweren verschiedener Seiten so gezinkt, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten jeder Augenzahl proportional zu dieser ist.
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 3.
   b) Ina und Felix würfeln einmal mit Katjas Würfel. Ina wettet darauf, dass die Augenzahl gerade oder nicht prim ist. Felix wettet dagegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Ina gewinnt.
   c) Entscheiden Sie, wie sich die Wetteinsätze von Ina und Felix verhalten müssen, damit die Wette fair ist.

Lösung:

a) Aufgrund der Proportionalität folgt für die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	x	2x	3x	4x	5x	6x

$x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1$ Folgerung 2

$$x = \frac{1}{21}$$

Für P(3) gilt somit:

$P(3) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

b) Die vier Zahlen 1, 2, 4 und 6 sind gerade oder nicht prim.

$P(\text{Ina gewinnt}) = P(\{1; 2; 4; 6\}) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{4}{21} + \frac{6}{21} = \frac{13}{21}$

c) Da Ina in 13 von 21 Fällen gewinnt und Felix in den restlichen 8 Fällen, müssen sich die Wetteinsätze wie 13 : 8 verhalten.

Bemerkung: Die Vorgehensweise, relative Häufigkeiten in **Mengendiagrammen** oder **Vierfeldertafeln** zu veranschaulichen, lässt sich 1 : 1 auf **Wahrscheinlichkeiten** übertragen.

Aufgaben

28. Bei einem sechsseitigen Spielwürfel wird die Augenzahl 5 zur Augenzahl 6 und die Augenzahl 4 zur 2 abgeändert, ansonsten bleibt der Würfel unverändert.

a) Stellen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf:

Augenzahl	1	2	3	6
Wahrscheinlichkeit				

b) Bestimmen Sie jeweils die zugehörige Wahrscheinlichkeit.
A: „Die Augenzahl ist kleiner als 3."
B: „Die Augenzahl ist prim."
C: „Die Augenzahl ist nicht 3."
D: „Die Augenzahl ist Teiler von 6."
E: „Die Augenzahl ist prim oder gerade."

29. Eine Umfrage unter allen Reisenden eines IC-Zuges ergab: Jeder 3. Reisende ist kein Urlauber. Jeder 5. Urlauber ist allein unterwegs. 10 % der Reisenden sind weder Urlauber noch Alleinreisende. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine zufällig ausgewählte Person allein unterwegs ist.

b) Es gibt 8 Schüler, die keine der drei Sportarten betreiben.

c) Genau zwei Sportarten betreiben $6+2+1=9$ Schüler.

$h_{50}(A)=\frac{9}{50}=18\ \%$

Höchstens zwei Sportarten betreiben $50-4=46$ Schüler.

$h_{50}(B)=\frac{46}{50}=92\ \%$

d) $\overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B} \rightarrow$ **3 Sportarten**

$\downarrow$

0 oder 1 oder 3 Sportarten

Es handelt sich um das Ereignis „Schüler mit allen drei Sportarten“.

$h_{50}(\text{alle drei Sportarten})=\frac{4}{50}=8\ \%$

28. a) Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Augenzahl	1	2	3	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

b) **Ereignis A**

$A=\{1;2\}$

$P(A)=P(\{1;2\})=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Ereignis B

$B=\{2;3\}$

$P(B)=P(\{2;3\})=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Ereignis C

$C=\{1;2;6\}$

$P(C)=P(\{1;2;6\})=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

Ereignis D

$D=\{1;2;3;6\}$

$P(D)=P(\{1;2;3;6\})=1$ sicheres Ereignis

Ereignis E

$E=\{2;3;6\}$

$P(E)=P(\{2;3;6\})=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$

29. Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:
U – Urlauber
A – Alleinreisender

Da im Zug $\frac{2}{3}$ aller Reisenden Urlauber sind und von diesen jeder 5. alleine reist, gilt:

$P(U \cap A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15} = \frac{4}{30}$

Gegeben ist zudem:

$P(\overline{U} \cap \overline{A}) = 10\ \% = \frac{1}{10}$

Hieraus lässt sich eine Vierfeldertafel erstellen:

	A	$\overline{A}$	
U	$\mathbf{\frac{4}{30}}$	$\frac{16}{30}$	$\frac{20}{30}$
$\overline{U}$	$\frac{7}{30}$	$\mathbf{\frac{3}{30}}$	$\mathbf{\frac{10}{30}}$
	$\frac{11}{30}$	$\frac{19}{30}$	$\mathbf{1}$

Die farbig gedruckten Zahlen sind gegeben.

Somit: $P(A) = \frac{11}{30} \approx 36{,}7\ \%$

Eine zufällig ausgewählte Person ist also mit der Wahrscheinlichkeit 36,7 % allein unterwegs.

30. Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:
G – gegen Grippe geimpft
K – an Grippe erkrankt

Gegeben:

$P(K) = 0{,}25$

$P(\overline{G}) = 0{,}54$

$P(G \cap K) = 0{,}08$

Hieraus lässt sich eine Vierfeldertafel mit Wahrscheinlichkeiten erstellen:

	G	$\overline{G}$	
K	**0,08**	0,17	**0,25**
$\overline{K}$	0,38	0,37	0,75
	0,46	**0,54**	**1**

Die farbig gedruckten Zahlen sind gegeben.

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind nun direkt ablesbar.

a) $P(\overline{K} \cap G) = 0{,}38$