GYMNASIUM

STARK in KLASSENARBEITEN

Potenzen und Potenzfunktionen

Alfred Müller

STARK

Inhaltsverzeichnis

Fortsetzung nächste Seite

Auf einen Blick!

Inhaltsverzeichnis

Autor: Alfred Müller

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

Terme mit Potenzen begegnen dir schon früh in deiner gymnasialen Laufbahn, und sie werden dich über die **Mittelstufe** hinweg bis zum Abitur begleiten. Aber auch darüber hinaus – und zwar nicht nur in Studium und Beruf – werden dir Potenzen als elementares mathematisches Gebilde immer wieder und vor allen Dingen in nahezu allen Lebensbereichen begegnen. Es lohnt sich also schon allein für den schulischen **Erfolg**, über Potenzen gut Bescheid zu wissen.

Das vorliegende Buch hilft dir, dein bereits bestehendes Wissen über Potenzen und Potenzfunktionen **auszuweiten**, zu **vertiefen** und zu **testen**.

- Klar hervorgehobene **Rechenregeln** vermitteln dir auf einen Blick, was du wissen und anwenden können musst.
- Jede Rechenregel wird durch mindestens ein anschauliches **Beispiel** so ergänzt, dass du sofort sehen kannst, wann und wie die betreffende Regel typischerweise angewendet wird.
- Vielfältige **Aufgaben** helfen dir dabei, den neu gelernten Stoff einzuüben.
- Mithilfe von **Tests** kannst du bei jedem Kapitel selbstständig deinen Leistungsstand abprüfen.
- Ausführliche **Lösungsvorschläge** ermöglichen es dir, deine Rechenwege selbst zu kontrollieren und gegebenenfalls selbst zu korrigieren.

Von all diesen Merkmalen profitierst du, wenn du mit diesem Buch arbeitest – vor allem, wenn du das Buch parallel zum Unterricht einsetzt. Spätestens dann nämlich wird sich dein Einsatz sicher auch positiv auf dein Abschneiden in Tests und Klassenarbeiten auswirken, sodass du dir beruhigt sagen kannst: Ich bin **stark in Klassenarbeiten**!

In diesem Sinne wünsche ich dir viel Erfolg beim Arbeiten mit diesem Buch!

Alfred Müller

So arbeitest du mit diesem Buch

Jedes Kapitel in diesem Buch ist wie folgt aufgebaut:

- Wichtige Begriffe und Rechenregeln werden in **Wissenskästen** erklärt und im Anschluss durch anschauliche Beispiele verdeutlicht. Lies die Erklärungen und Rechnungen aufmerksam durch, damit du die folgenden Aufgaben selbstständig angehen kannst.

- Um die Anwendung der Rechenregeln zu üben und so dein Wissen über die Begriffe zu sichern, stehen dir auf den folgenden Seiten zahlreiche **Aufgaben** zur Verfügung. Setze den Taschenrechner **nur** bei entsprechend gekennzeichneten Aufgaben ein.

  30 Besonders **knifflige** Aufgaben sind mit einem Stern gekennzeichnet. Lass dich nicht entmutigen, wenn du sie nicht auf Anhieb lösen kannst.

- Nachdem du ein ganzes Kapitel durchgearbeitet hast, solltest du dich an den zugehörigen **Test** zur Überprüfung deines Leistungsstandes wagen. Aufgaben wie die in den Tests können dir auch in einer deiner nächsten Klassenarbeiten begegnen. Versuche daher, jeden Test in der vorgegebenen Zeit zu lösen und setze den Taschenrechner als Hilfsmittel ausschließlich bei den entsprechend gekennzeichneten (Teil-)Aufgaben ein.
  Die Punkteverteilung zeigt dir, wie gut du das Thema beherrschst:

  Du bist in diesem Themenbereich fit, gehe zum nächsten Kapitel über.

  Es sitzt noch nicht alles, wiederhole die für dich schwierigen Themen.

  Du hast noch größere Lücken, schaue dir alle Wissenskästen erneut an und arbeite die Aufgaben dazu noch einmal durch.

- Am Ende des Buches findest du zu allen Aufgaben ausführlich vorgerechnete **Lösungen**, mit denen du deine Ergebnisse überprüfen kannst. Versuche aber stets, bei jeder Aufgabe zuerst auch tatsächlich zu einem eigenen Ergebnis zu gelangen, denn nur durch das Überprüfen deiner eigenen Lösungswege bleibt dir die Vorgehensweise im Gedächtnis. Und nur so kannst du eventuell auftretende Fehler in deinen Rechnungen effektiv und lernwirksam korrigieren, um sie in Zukunft zu vermeiden.

Hier kannst du eintragen, wie gut du bei den Tests zu den einzelnen Kapiteln abgeschnitten hast. Auf diese Weise behältst du immer den **Überblick** über deinen aktuellen Leistungsstand.

Testergebnisse			
1 Der Begriff der Potenz			
2 Rechnen mit Potenzen			
3 Erweiterung des Potenzbegriffs			
4 Potenzfunktionen			

Rechnen mit Potenzen

1 Rechenregeln für Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

1.1 Die Potenzgesetze

Das Produkt $a^m \cdot b^n$ zweier Potenzen lässt sich als Term im Allgemeinen nicht weiter vereinfachen. (Abgesehen von der „trivialen Möglichkeit“, die beiden Potenzen tatsächlich zu berechnen und anschließend das Produkt der Ergebnisse zu bilden.)

Falls jedoch die beiden Potenzen die gleiche Basis haben (d. h. $a=b$) oder den gleichen Exponenten haben (d. h. $m=n$), dann kann das Produkt dieser beiden Potenzen zusammengefasst werden. Die Regeln, die besagen, wie dies geschieht, werden Potenzgesetze genannt.

Zuerst wird der Fall der **Multiplikation zweier Potenzen mit gleicher Basis** untersucht. Dazu wird als Basis eine reelle Zahl $a \neq 0$ gewählt. Nur aufgrund der Definition der Potenz gilt dann beispielsweise:

$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 = a^{3+2}$

Verallgemeinernd gilt für $m, n \in \mathbb{N}$:

$$a^m \cdot a^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m-mal}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}) = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n)\text{-mal}} = a^{m+n}$$

Für negative ganzzahlige Exponenten ergibt sich aus den beiden entsprechenden Definitionen der Potenz:

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m-mal}}) \cdot (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}})} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n)\text{-mal}}} = \frac{1}{a^{m+n}}$$
$$= a^{-(m+n)} = a^{-m+(-n)}$$

In gleicher Weise gilt:

$$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{m-mal}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}} = \begin{cases} a^{m-n} = a^{m+(-n)} & \text{für } m > n \\ 1 = a^0 = a^{m-n} = a^{m+(-n)} & \text{für } m = n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m+(-n)} & \text{für } m < n \end{cases}$$

Aufgrund des Kommutativgesetzes gilt dies analog auch für das Produkt $a^{-m} \cdot a^n$.

Ist einer der beiden Exponenten gleich null oder sind gar beide Exponenten gleich null, so gilt:

$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}$

$a^{-m} \cdot a^0 = \frac{1}{a^m} \cdot 1 = \frac{1}{a^m} = a^{-m} = a^{-m+0}$

$a^0 \cdot a^0 = 1 \cdot 1 = 1 = a^0 = a^{0+0}$

Aus allen diesen Fällen lässt sich eine Gemeinsamkeit herauslesen: Stets ist das Produkt der beiden Potenzen wieder eine Potenz mit der **gleichen Basis** a und der **Summe der Exponenten** der beiden Potenzen als neuem Exponenten. Wir haben damit das erste Potenzgesetz gefunden.

Dies kann auch auf die **Division zweier Potenzen mit gleicher Basis** übertragen werden, denn die Division zweier Potenzen mit gleicher Basis kann auf die Multiplikation zweier Potenzen mit der gleichen Basis zurückgeführt werden:

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n}$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$

Das 1. **Potenzgesetz** lässt sich somit nun in voller Allgemeinheit formulieren.

WISSEN

1. Potenzgesetz

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert (dividiert), indem man die gemeinsame Basis mit der Summe (Differenz) der Exponenten potenziert.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$

BEISPIEL

1 Berechne die folgenden Ausdrücke mithilfe des 1. Potenzgesetzes.

a $4^3 \cdot 4^{-5}$ **b** $11\,001^{-17} : 11\,001^{-18}$

Lösung:

a $4^3 \cdot 4^{-5} = 4^{3+(-5)} = 4^{3-5} = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

b $11\,001^{-17} : 11\,001^{-18} = 11\,001^{-17-(-18)} = 11\,001^{-17+18} = 11\,001^1 = 11\,001$

2 Fasse jeweils so weit wie möglich zusammen.

a $x^2 : 2x$

b $3a^{-3} \cdot 2a^2$

c $28 : 7^3 - 64 \cdot 8^{-2}$

d $8{,}4u^4v^6w^2 : (-4v^2w^2) - 2uv^2(-2u^3v^2)$

Vertiefe dein Wissen!

Lösung:

a $x^2 : 2x = \frac{x^2}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x^1} = \frac{1}{2} x^{2-1} = \frac{1}{2} x = \frac{x}{2}$

b $3a^{-3} \cdot 2a^2 = (3 \cdot 2) \cdot (a^{-3} \cdot a^2) = 6 \cdot a^{-3+2} = 6 \cdot a^{-1} = 6 \cdot \frac{1}{a} = \frac{6}{a}$

Wie du siehst, ist es wichtig, dass du dich an das Kommutativ- und das Assoziativgesetz erinnerst. Du solltest (u. a.) diese beiden Gesetze stets präsent haben.

c Hier musst du, um das erste Potenzgesetz anwenden zu können, die Zahlen 28 bzw. 64 jeweils in eine Potenz (eventuell mit Vorfaktor) mit der Basis 7 bzw. 8 umwandeln. Bedenke dabei, dass sich jede Zahl als Potenz mit dem Exponenten 1 schreiben lässt. Zudem musst du auch hier das Assoziativgesetz anwenden:

$$28 : 7^3 - 64 \cdot 8^{-2} = (4 \cdot 7) : 7^3 - 8^2 \cdot 8^{-2} = 4 \cdot (7 : 7^3) - 8^{2+(-2)}$$
$$= 4 \cdot 7^{1-3} - 8^{2-2} = 4 \cdot 7^{-2} - 8^0 = 4 \cdot \frac{1}{7^2} - 1 = \frac{4}{49} - 1 = -\frac{45}{49}$$

d Hier ist es besonders hilfreich, den Quotienten in einen Bruch umzuwandeln und diesen dann mithilfe der Bruchrechenregeln in das Produkt mehrerer Brüche:

$$8{,}4u^4v^6w^2 : (-4v^2w^2) - 2uv^2(-2u^3v^2)$$
$$= \frac{8{,}4u^4v^6w^2}{-4v^2w^2} - 2uv^2(-2u^3v^2) = \frac{8{,}4}{-4} \cdot u^4 \cdot \frac{v^6}{v^2} \cdot \frac{w^2}{w^2} - 2 \cdot (-2)(u \cdot u^3)(v^2 \cdot v^2)$$
$$= -2{,}1u^4 \cdot v^{6-2} \cdot w^{2-2} + 4 \cdot u^{1+3} \cdot v^{2+2} = -2{,}1u^4v^4 \cdot w^0 + 4u^4v^4$$
$$= -2{,}1u^4v^4 \cdot 1 + 4u^4v^4 = -2{,}1u^4v^4 + 4u^4v^4 = 1{,}9u^4v^4$$

Nachdem du nun Potenzen mit gleicher Basis multiplizieren und dividieren kannst, wird jetzt der Fall der **Multiplikation zweier Potenzen mit gleichem Exponenten** untersucht.

Auch in diesem Fall gibt ein einfaches Beispiel den entscheidenden Hinweis. Das Kommutativgesetz spielt dabei eine gewichtige Rolle:

$$a^2 \cdot b^2 = (a \cdot a) \cdot (b \cdot b) = a \cdot a \cdot b \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^2$$

Entsprechend gilt für einen natürlichen Exponenten $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n \cdot b^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n-mal}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{n-mal}}) = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{\text{n-mal}} = (a \cdot b)^n$$

Unter Verwendung dieser Verallgemeinerung ergibt sich für einen negativen ganzzahligen Exponenten (wobei hier wie im Folgenden stets $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt):

$$a^{-n} \cdot b^{-n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^n \cdot b^n} = \frac{1}{(a \cdot b)^n} = (a \cdot b)^{-n}$$

Ist der Exponent gleich null, so erhält man:

$$a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (a \cdot b)^0$$

Auch hier kann die Division auf die Multiplikation zurückgeführt werden, denn die **Division zweier Potenzen mit gleichem Exponenten** lässt sich auf die Multiplikation zweier Potenzen mit dem gleichen Exponenten zurückführen:

$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^n \cdot \left(\frac{1}{b}\right)^n \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } n \in \mathbb{Z}$$

Das 2. **Potenzgesetz** fasst alle erhaltenen Ergebnisse zusammen.

WISSEN

2. Potenzgesetz

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert (dividiert), indem man das Produkt (den Quotienten) der Basen mit dem gemeinsamen Exponenten potenziert.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
$$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } n \in \mathbb{Z}$$

BEISPIEL

1 Berechne mithilfe des 2. Potenzgesetzes.

a $0{,}4^3 \cdot 5^3$ **b** $9^3 \cdot 3^{-3}$

c $63^2 : 7^2$ **d** $2^{-4} : 2^4$

Lösung:

a $0{,}4^3 \cdot 5^3 = (0{,}4 \cdot 5)^3 = 2^3 = 8$

b Zunächst muss eine der beiden Potenzen derart umgeformt werden, dass sich eine Potenz mit dem gleichen Exponenten wie die andere Potenz ergibt. Gemäß der Bemerkung von Seite 6 ergibt sich direkt:

$$9^3 \cdot 3^{-3} = 9^3 \cdot \frac{1}{3^3} = 9^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(9 \cdot \frac{1}{3}\right)^3 = 3^3 = 27$$

c $63^2 : 7^2 = \left(\frac{63}{7}\right)^2 = 9^2 = 81$

d $2^{-4} : 2^4 = \frac{1}{2^4} : 2^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 : 2^4 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$

Vertiefe dein Wissen!

2 Fasse so weit wie möglich zusammen.

a $\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 : \left(\frac{2}{x}\right)^{-3}$ **b** $36a^2 \cdot 81b^2$

Lösung:

a Da der Divisor selbst wieder ein Bruch ist, ist es zum Umformen des Divisors sehr hilfreich, wenn du dich hier wieder an die Bemerkung von Seite 6 erinnerst. (Sonst müsstest du zuerst die Definition von Potenzen mit negativen Exponenten verwenden, dann das zweite Potenzgesetz, dich anschließend an die Kehrbruchbildung erinnern und sodann wieder das zweite Potenzgesetz anwenden.) Gemäß dieser gilt:

$$\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 : \left(\frac{2}{x}\right)^{-3} = \left(\frac{x^2}{4}\right)^3 : \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{x}{2}}\right)^3 = \left(\frac{x^2}{4} \cdot \frac{2}{x}\right)^3 = \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$$

b Hier empfiehlt es sich, die beiden Quadratzahlen in Produkte zu zerlegen, da du sonst mit großen Zahlen rechnen musst:

$$36a^2 \cdot 81b^2 = 6 \cdot 6 \cdot a^2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot b^2 = 6^2 \cdot a^2 \cdot 9^2 \cdot b^2 = (6 \cdot a \cdot 9 \cdot b)^2$$
$$= (6a \cdot 9b)^2 = (54ab)^2$$

Es gibt neben den ersten beiden Potenzgesetzen noch ein drittes Potenzgesetz. Um dieses zu erarbeiten, betrachten wir jetzt die **Potenz einer Potenz**.

Als Antwort auf die Frage, welche die größte Zahl ist, die man mit drei Ziffern schreiben kann, bieten sich die Zahlen $(9^9)^9$ und $9^{(9^9)}$ an. Der Taschenrechner liefert $(9^9)^9 = 1{,}966 \cdot 10^{77}$. Bei $9^{(9^9)} = 9^{387\,420\,489}$ versagt der Taschenrechner allerdings, da das Ergebnis viel zu groß ist, als dass er es berechnen könnte. Die unterschiedliche Klammersetzung bringt also unterschiedliche Ergebnisse, offenbar sind die Ausdrücke $(9^9)^9$ und $9^{(9^9)}$ nicht gleich.

Untersucht wird nun, wie sich die Gesetzmäßigkeit für die Berechnung der Potenz einer Potenz ergibt. Aus der Definition der Potenz und aus dem 1. Potenzgesetz erhalten wir für eine Basis $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zum **Beispiel**:

$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6 = a^{3 \cdot 2}$

Dies lässt sich wie folgt auf Exponenten $m, n \in \mathbb{N}$ **verallgemeinern**:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{\text{n-mal}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{\text{n-mal}}} = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}$$

Für negative ganze Hochzahlen berechnen wir direkt allgemein:

$$(a^{-m})^n = \underbrace{a^{-m} \cdot a^{-m} \cdot \ldots \cdot a^{-m}}_{\text{n-mal}} = a^{\overbrace{-m+(-m)+\ldots+(-m)}^{\text{n-mal}}} = a^{n \cdot (-m)} = a^{-m \cdot n}$$

Aus diesen beiden Fällen folgen mithilfe der Definition der Potenz die Ergebnisse für die übrigen beiden Kombinationsmöglichkeiten:

$$(a^{-m})^{-n} = \frac{1}{(a^{-m})^n} = \frac{1}{a^{-m \cdot n}} = a^{-(-m \cdot n)} = a^{m \cdot n} = a^{-m \cdot (-n)}$$

und

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{m \cdot n}} = a^{-(m \cdot n)} = a^{m \cdot (-n)}$$

Zuletzt schauen wir uns die vier Kombinationsmöglichkeiten an, bei denen einer der beiden Exponenten gleich null ist:

$$(a^0)^n = 1^n = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n}$$

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$$

$$(a^0)^{-n} = 1^{-n} = \frac{1}{1^n} = \frac{1}{1} = 1 = a^0 = a^{0 \cdot (-n)}$$

$$(a^{-m})^0 = 1 = a^0 = a^{-m \cdot 0}$$

Damit haben wir das 3. **Potenzgesetz** gefunden.

WISSEN

3. Potenzgesetz
Eine Potenz wird potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$

Mithilfe des Kommutativgesetzes für ganze Zahlen folgt direkt aus dem 3. Potenzgesetz:
$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{n \cdot m} = (a^n)^m$
Das heißt, beim Potenzieren einer Potenz dürfen die **Exponenten vertauscht** werden. Dies kann sowohl beim Berechnen als auch beim Vereinfachen eines Terms – z. B. eines Wurzelterms (vgl. Beispiel 2 auf der folgenden Seite) – sehr nützlich sein.

BEISPIEL

1 Berechne mithilfe des 3. Potenzgesetzes.

a $((-2)^{-2})^3$

b $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-2}$

Vertiefe dein Wissen!

Lösung:

a $((-2)^{-2})^3 = (-2)^{-2\cdot 3} = (-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64}$

b $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot(-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{2}{1}\right)^6 = 2^6 = 64$

oder: $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot(-2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3\cdot 2} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right)^2 = (2^3)^2 = 8^2 = 64$

2 Schreibe die folgenden Terme ohne Wurzelzeichen.

a $\left(\sqrt{5}^3\right)^2$

b $-\sqrt{a}^{14}$

Lösung:

a $\left(\sqrt{5}^3\right)^2 = \left(\sqrt{5}^2\right)^3 = 5^3 = 125$

b $-\sqrt{a}^{14} = -\sqrt{a}^{2\cdot 7} = -\left(\sqrt{a}^2\right)^7 = -a^7$

Mit den folgenden Aufgaben kannst du die drei Potenzgesetze ausführlich üben. Auch wenn dir die Potenzgesetze möglicherweise recht einfach erscheinen, solltest du dennoch konzentriert arbeiten, denn du musst beispielsweise bei Aufgabe 22 mehrere nahezu identische Ausdrücke sorgsam unterscheiden. Achte bei allen Aufgaben besonders auf die **Vorzeichen**.
Zum Ende des Aufgabenblocks findest du auch noch drei **Anwendungsaufgaben**, bei denen du das bisher Gelernte anwenden kannst.

16 Fasse so weit wie möglich zusammen.

a $\frac{a^4}{4a}$

b $x^5 : x^{-9}$

c $11x^{-7} \cdot 5x^6$

d $(3x^2y^3)(-1{,}5xy)$

e $10^{-9} : 10^{-3}$

f $\frac{2^n}{2}$

g $\frac{2}{2^n}$

h $15 : 5^3 - 64 \cdot 8^{-2}$

i $y^{-n} \cdot y$

j $10^0 + 10^{-1} \cdot 10^2 : 10^6$

Vertiefe dein Wissen!

17 Fasse jeweils zusammen.

a $x^{-2} \cdot x^{0} \cdot x^{-3} \cdot x^{4} \cdot x^{3}$

b $\frac{a^3}{a^6} - a^{-3}$

c $5x^2\left(\frac{1}{x^2} + x^{-3}\right)$

d $a^{2-n} : a^{n-2}$

e $a^0 : a^{5-n}$

f $\frac{x^4 y^7}{y^8 x^3}$

g $\frac{28a^2b^{-1}c^{-2}}{14a^3b^{-2}c}$

h $\frac{a^2b^{-5}}{a^{-2}b^{-8}}$

18 Vereinfache die folgenden Terme.

a $\frac{(3a)^n}{3^n}$

b $a^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}$

c $\frac{(a-1)^n}{(1-a)^n}$

* d $\frac{(9-4a^2)^n}{(3-2a)^n}$

19 Berechne jeweils.

a $(x^{-2})^4$

b $((-a)^0)^3$

c $-(a^0)^{n+1}$

d $(a^n)^{n+1}$

20 Vereinfache so weit wie möglich.

a $(-a)^{-2^3} : (-a^2)^{-5}$

* b $2 \cdot (-2)^n \cdot (-2)^{n+2}$

21 Berechne die folgenden Terme mithilfe der Potenzgesetze.

a $9^{-2} \cdot (3^2)^3$

b $3^{-2} \cdot 2^{-4}$

22 Berechne jeweils.

a $(-a^2)^3$

b $((-a)^{-3})^{-2}$

c $((-a)^0)^{-2}$

d $((-a)^3)^2$

e $-a^{2^3}$

f $(-a^{-2})^{-2}$

Vertiefe dein Wissen!

Rechnen mit Potenzen

16

a $\frac{a^4}{4a} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4}{a^1} = \frac{1}{4} a^{4-1} = \frac{1}{4} a^3 = \frac{a^3}{4}$

b $x^5 : x^{-9} = x^{5-(-9)} = x^{5+9} = x^{14}$

c $11x^{-7} \cdot 5x^6 = 11 \cdot 5 \cdot x^{-7} \cdot x^6 = 55 \cdot x^{-7+6} = 55x^{-1} = \frac{55}{x}$

d $(3x^2y^3)(-1{,}5xy) = 3 \cdot (-1{,}5) \cdot x^2 \cdot x \cdot y^3 \cdot y = -4{,}5 \cdot x^{2+1} \cdot y^{3+1} = -4{,}5x^3y^4$

e $10^{-9} : 10^{-3} = 10^{-9-(-3)} = 10^{-9+3} = 10^{-6}$

f $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$

g $\frac{2}{2^n} = 2^{1-n}$

h $15 : 5^3 - 64 \cdot 8^{-2} = \frac{15}{5^3} - 64 \cdot \frac{1}{8^2} = \frac{3 \cdot 5}{5^3} - \frac{64}{8^2} = 3 \cdot \frac{5}{5^3} - \frac{8^2}{8^2} = 3 \cdot 5^{1-3} - 1 = 3 \cdot 5^{-2} - 1 = 3 \cdot \frac{1}{5^2} - 1$

$= 3 \cdot \frac{1}{25} - 1 = \frac{3}{25} - \frac{25}{25} = -\frac{22}{25}$

i $y^{-n} \cdot y = y^{-n+1} = y^{1-n}$

j $10^0 + 10^{-1} \cdot 10^2 : 10^6 = 1 + 10^{-1+2} : 10^6 = 1 + 10 : 10^6 = 1 + 10^{1-6} = 1 + 10^{-5} = 1 + \frac{1}{10^5}$

$= 1 + \frac{1}{100\,000} = \frac{100\,000}{100\,000} + \frac{1}{100\,000} = \frac{100\,001}{100\,000} = 1{,}00001$

17

a $x^{-2} \cdot x^0 \cdot x^{-3} \cdot x^4 \cdot x^3 = x^0 \cdot x^{-2} \cdot x^4 \cdot x^{-3} \cdot x^3 = 1 \cdot x^{-2+4} \cdot x^{-3+3} = x^2 \cdot x^0 = x^2 \cdot 1 = x^2$

oder: $x^{-2} \cdot x^0 \cdot x^{-3} \cdot x^4 \cdot x^3 = x^{-2+0+(-3)+4+3} = x^2$

b $\frac{a^3}{a^6} - a^{-3} = a^{3-6} - a^{-3} = a^{-3} - a^{-3} = 0$

c $5x^2\left(\frac{1}{x^2} + x^{-3}\right) = 5x^2\left(x^{-2} + x^{-3}\right) = 5 \cdot x^2 \cdot x^{-2} + 5 \cdot x^2 \cdot x^{-3} = 5x^{2+(-2)} + 5x^{2+(-3)}$

$= 5x^0 + 5x^{-1} = 5 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{x} = 5 + \frac{5}{x}$

oder: $5x^2\left(\frac{1}{x^2} + x^{-3}\right) = 5x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 5x^2\left(\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) = 5x^2 \cdot \frac{x+1}{x^3} = 5(x+1) \cdot \frac{x^2}{x^3}$

$= (5x+5)x^{2-3} = (5x+5)x^{-1} = (5x+5)\frac{1}{x} = 5 + \frac{5}{x}$

d $a^{2-n} : a^{n-2} = a^{2-n-(n-2)} = a^{2-n-n+2} = a^{4-2n}$

e $a^0 : a^{5-n} = 1 : a^{5-n} = \frac{1}{a^{5-n}} = a^{-(5-n)} = a^{n-5}$

oder: $a^0 : a^{5-n} = a^{0-(5-n)} = a^{-5+n} = a^{n-5}$

f $\frac{x^4y^7}{y^8x^3} = \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{y^7}{y^8} = x^{4-3} \cdot y^{7-8} = x^1 \cdot y^{-1} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

oder: $\frac{x^4y^7}{y^8x^3} = \frac{x^{1+3}y^7}{y^{1+7}x^3} = \frac{x^1 \cdot x^3y^7}{y^1 \cdot y^7x^3} = \frac{x(x^3x^7)}{y(x^3y^7)} = \frac{x}{y}$

g $\frac{28a^2b^{-1}c^{-2}}{14a^3b^{-2}c} = \frac{28}{14} \cdot \frac{a^2}{a^3} \cdot \frac{b^{-1}}{b^{-2}} \cdot \frac{c^{-2}}{c^1} = 2 \cdot a^{2-3} \cdot b^{-1-(-2)} \cdot c^{-2-1} = 2a^{-1}b^1c^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot b \cdot \frac{1}{c^3} = \frac{2b}{ac^3}$

h $\frac{a^2b^{-5}}{a^{-2}b^{-8}} = \frac{a^2}{a^{-2}} \cdot \frac{b^{-5}}{b^{-8}} = a^{2-(-2)} \cdot b^{-5-(-8)} = a^4 \cdot b^3 = a^4b^3$

18 **a** $\frac{(3a)^n}{3^n} = \left(\frac{3a}{3}\right)^n = a^n$

b $a^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} = \left(a \cdot \frac{1}{a}\right)^{n+1} = \left(\frac{a}{a}\right)^{n+1} = 1^{n+1} = 1$

c $\frac{(a-1)^n}{(1-a)^n} = \left(\frac{a-1}{1-a}\right)^n = \left(\frac{-1 \cdot (1-a)}{1-a}\right)^n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \text{ gerade und } n = 0 \\ -1 & \text{für } n \in \mathbb{Z} \text{ ungerade} \end{cases}$

d $\frac{(9-4a^2)^n}{(3-2a)^n} = \left(\frac{9-4a^2}{3-2a}\right)^n = \left(\frac{(3-2a)(3+2a)}{3-2a}\right)^n = (3+2a)^n$

19 **a** $(x^{-2})^4 = x^{-2 \cdot 4} = x^{-8} = \frac{1}{x^8}$

b $((-a)^0)^3 = 1^3 = 1$

oder: $((-a)^0)^3 = (-a)^{0 \cdot 3} = (-a)^0 = 1$

c $-(a^0)^{n+1} = -1^{n+1} = -1$

oder: $-(a^0)^{n+1} = -a^{0 \cdot (n+1)} = -a^0 = -1$

d $(a^n)^{n+1} = a^{n \cdot (n+1)} = a^{n^2+n}$

20 **a** $(-a)^{-2^3} : (-a^2)^{-5} = (-a)^{-8} : (-1 \cdot a^2)^{-5} = (-1 \cdot a)^{-8} : ((-1)^{-5} \cdot (a^2)^{-5})$

$= ((-1)^{-8} \cdot a^{-8}) : (-1 \cdot a^{2 \cdot (-5)}) = (1 \cdot a^{-8}) : (-a^{-10})$

$= \frac{a^{-8}}{-a^{-10}} = -\frac{a^{-8}}{a^{-10}} = -a^{-8-(-10)} = -a^2$

oder: $(-a)^{-2^3} : (-a^2)^{-5} = (-a)^{-8} : (-a \cdot a)^{-5} = (-a)^{-8} : ((-a)^{-5} \cdot a^{-5})$

$= \frac{(-a)^{-8}}{(-a)^{-5} \cdot a^{-5}} = \frac{(-a)^{-8}}{(-a)^{-5}} \cdot \frac{1}{a^{-5}} = (-a)^{-8-(-5)} \cdot a^{-(-5)}$

$= (-a)^{-3} \cdot a^5 = (-1 \cdot a)^{-3} \cdot a^5 = (-1)^{-3} \cdot a^{-3} \cdot a^5$

$= -1 \cdot a^{-3+5} = -a^2$

b $2 \cdot (-2)^n \cdot (-2)^{n+2} = -1 \cdot (-2) \cdot (-2)^n \cdot (-2)^{n+2} = -(-2)^{1+n+(n+2)} = -(-2)^{2n+3}$

$= -(-1 \cdot 2)^{2n+3} = -((-1)^{2n+3} \cdot 2^{2n+3}) = -(-1 \cdot 2^{2n+3}) = 2^{2n+3}$

Hinweis: Beachte hierbei, dass $2n+3$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine ungerade Zahl ist.

21 **a** $9^{-2} \cdot (3^2)^3 = (3^2)^{-2} \cdot (3^2)^3 = (3^2)^{-2+3} = (3^2)^1 = 3^2 = 9$

oder: $9^{-2} \cdot (3^2)^3 = 9^{-2} \cdot 9^3 = 9^{-2+3} = 9^1 = 9$

oder: $9^{-2} \cdot (3^2)^3 = (3^2)^{-2} \cdot 3^{2 \cdot 3} = 3^{2 \cdot (-2)} \cdot 3^{2 \cdot 3} = 3^{-4} \cdot 3^6 = 3^{-4+6} = 3^2 = 9$

oder: $9^{-2} \cdot (3^2)^3 = \frac{1}{9^2} \cdot 9^3 = \frac{9^3}{9^2} = 9^{3-2} = 9^1 = 9$

b $3^{-2} \cdot 2^{-4} = 3^{-2} \cdot 2^{2 \cdot (-2)} = 3^{-2} \cdot (2^2)^{-2} = 3^{-2} \cdot 4^{-2} = (3 \cdot 4)^{-2} = 12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$

Hinweis: Beachte, dass der Operator „Berechne“ in der Aufgabenstellung durch „mithilfe der Potenzgesetze“ eingeschränkt ist. Folgende Rechnung stellt daher keine Lösung dieses Aufgabenteils dar, da die Potenzgesetze dabei nicht verwendet werden:
$3^{-2} \cdot 2^{-4} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{144}$

22 **a** $(-a^2)^3 = (-1 \cdot a^2)^3 = (-1)^3 \cdot (a^2)^3 = -1 \cdot a^{2 \cdot 3} = -a^6$

b $((-a)^{-3})^{-2} = (-a)^{-3 \cdot (-2)} = (-a)^6 = (-1 \cdot a)^6 = (-1)^6 \cdot a^6 = 1 \cdot a^6 = a^6$

c $((-a)^0)^{-2} = 1^{-2} = 1$
oder: $((-a)^0)^{-2} = (-a)^{0 \cdot (-2)} = (-a)^0 = 1$

d $((-a)^3)^2 = (-a)^{3 \cdot 2} = (-a)^6 = (-1 \cdot a)^6 = (-1)^6 \cdot a^6 = 1 \cdot a^6 = a^6$
oder: $((-a)^3)^2 = (-a)^{3 \cdot 2} = (-a)^{2 \cdot 3} = ((-a)^2)^3 = (a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$
oder: $((-a)^3)^2 = (-a)^{3 \cdot 2} = (-a)^{-3 \cdot (-2)} = ((-a)^{-3})^{-2} = a^6$

e $-a^{2^3} = -a^8$

f $(-a^{-2})^{-2} = (-1 \cdot a^{-2})^{-2} = (-1)^{-2} \cdot (a^{-2})^{-2} = 1 \cdot a^{-2 \cdot (-2)} = a^4$

g $((-a)^2)^{-3} = (a^2)^{-3} = a^{2 \cdot (-3)} = a^{-6}$
oder: $((-a)^2)^{-3} = (-a)^{2 \cdot (-3)} = (-a)^{-6} = (-1 \cdot a)^{-6} = (-1)^{-6} \cdot a^{-6} = 1 \cdot a^{-6} = a^{-6}$
oder: $((-a)^2)^{-3} = (-a)^{2 \cdot (-3)} = (-a)^{-3 \cdot 2} = ((-a)^{-3})^2 = ((-a)^{-3})^{-2 \cdot (-1)} = \left(((-a)^{-3})^{-2}\right)^{-1}$
$= (a^6)^{-1} = a^{6 \cdot (-1)} = a^{-6}$

h $(-a^3)^0 = 1$

i $(-a)^{3^2} = (-a)^9 = (-1 \cdot a)^9 = (-1)^9 \cdot a^9 = -1 \cdot a^9 = -a^9$

j $((-a)^3)^{-2} = (-a)^{3 \cdot (-2)} = (-a)^{-6} = (-1 \cdot a)^{-6} = (-1)^{-6} \cdot a^{-6} = 1 \cdot a^{-6} = a^{-6}$
oder: $((-a)^3)^{-2} = (-a)^{3 \cdot (-2)} = (-a)^{2 \cdot (-3)} = ((-a)^2)^{-3} = a^{-6}$

k $(-a^n)^{2n} = (-1 \cdot a^n)^{2n} = (-1)^{2n} \cdot (a^n)^{2n} = 1 \cdot a^{n \cdot 2n} = a^{2n^2}$

l Sofern $a \neq 0$ für die Basis a gilt, ist die in Aufgabenteil k angegebene Gleichung auch für ganzzahlige Exponenten richtig:
$(-a^n)^{2n} = a^{2n^2}$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$

23 **a** $\left(\frac{34ax^2}{-68x^4a}\right)^{-3} = \left(\frac{34}{-68} \cdot \frac{x^2}{x^4} \cdot \frac{a}{a}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{2} \cdot x^{2-4} \cdot 1\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{2} x^{-2}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot (x^{-2})^{-3}$
$= \left(\frac{-1}{2}\right)^{-3} \cdot x^{-2 \cdot (-3)} = \left(\frac{2}{-1}\right)^3 \cdot x^6 = (-2)^3 \cdot x^6 = -8x^6$

oder: $\left(\frac{34ax^2}{-68x^4a}\right)^{-3} = \left(\frac{x^2}{-2x^4}\right)^{-3} = \frac{(x^2)^{-3}}{(-2x^4)^{-3}} = \frac{x^{2 \cdot (-3)}}{(-2)^{-3} \cdot (x^4)^{-3}} = \frac{x^{-6}}{\frac{1}{(-2)^3} \cdot x^{4 \cdot (-3)}} = \frac{x^{-6}}{\frac{1}{-8} \cdot x^{-12}} = -8 \cdot \frac{x^{-6}}{x^{-12}}$
$= -8 \cdot x^{-6-(-12)} = -8x^6$