MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Allgemeinbildendes Gymnasium

Analysis

Baden-Württemberg
Abitur ab 2019

STARK

Inhalt

Die mit **LF** markierten Kapitel sind für das Basisfach nicht relevant.
Zudem sind im Basisfach allgemein nur Verkettungen mit linearer innerer Funktion relevant und es werden keine Kurvenscharen behandelt.

Autoren:
Dr. Raimund Ordowski, Arnold Zitterbart

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die **Analysis** ist neben den Gebieten Geometrie und Stochastik Gegenstand der Abiturprüfung und umfasst etwa die Hälfte der Gesamtprüfung.
Ab dem Abitur 2019 ist nur noch ein wissenschaftlicher Taschenrechner **(WTR)** für die schriftliche Prüfung zugelassen, sodass mehr als bisher von Hand gerechnet werden muss und Überlegungen anhand vorgegebener Graphen wohl eine größere Rolle spielen werden.

Dieses Buch will kein Schulbuch und keinen Unterricht ersetzen. Wir haben versucht, Ihnen eine möglichst gut nachvollziehbare, aber nicht zu umfangreiche und theorielastige Wiederholung der Analysis für Klausuren und die Abiturprüfung anzubieten. Die einzelnen Kapitel und Abschnitte sind in der Regel so konzipiert, dass Sie auch ganz **gezielt bestimmte Themen** wiederholen können.
Sind Sie mit den Grundlagen der Analysis bereits vertraut, so können Sie das Buch auch einfach als Sammlung von Beispielen und Aufgaben nutzen.

Zunächst werden in fünf Kapiteln **grundlegende Begriffe und Verfahren** der Analysis wiederholt und eingeübt. Die einzelnen Kapitel sind so aufgebaut, dass nach jedem vorgestellten Verfahren mindestens ein **ausführlich gelöstes Beispiel** folgt, an das sich eine Reihe von kleineren **Übungsaufgaben** anschließt.

Das letzte Kapitel enthält eine **Sammlung von umfangreicheren Aufgaben** über alle Inhalte hinweg mit innermathematischen bzw. anwendungsbezogenen Fragestellungen. Die Formulierungen und Anweisungen in den Aufgaben entsprechen dabei weitgehend den Vorgaben für die Aufgaben der Abiturprüfung.

Zu allen Aufgaben gibt es im Lösungsteil **ausführliche Lösungen**, mit denen Sie Ihre eigenen Überlegungen und Berechnungen kontrollieren können.

Im Anhang des Buches (vor dem Lösungsteil) finden Sie Anleitungen zu den grundlegenden Aufgabentypen der Analysis für die beiden gängigen WTR-Modelle **Casio fx-87DE X ClassWiz** und **TI-30X Plus MathPrint**. Bei allen Lösungen von Beispielen und Aufgaben wird bei Bedarf auf den entsprechenden Aufgabentyp aus diesem Teil verwiesen, sodass Sie den WTR stets gezielt einsetzen können.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

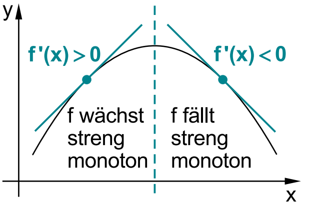
Dr. Raimund Ordowski — Arnold Zitterbart

3 Untersuchung von Funktionen und Graphen

In diesem Abschnitt finden Sie die wichtigsten Verfahren, mit denen sich eine Funktion f und ihr Graph G_f mithilfe der Ableitungen von f untersuchen lassen. Machen Sie sich dazu noch einmal bewusst, dass die Ableitung $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an der Stelle x_0 an den Graphen von f angibt. Anhand der Abbildungen können Sie sich die folgenden Sätze gut veranschaulichen und einprägen.

Monotonie

Mithilfe der Ableitungsfunktion von f kann man untersuchen, ob die Funktionswerte mit wachsenden x-Werten zunehmen oder abnehmen. Die Skizze rechts veranschaulicht den sogenannten **Monotoniesatz**:



> Gilt **f'(x) > 0** auf einem Intervall, so ist f dort **streng monoton wachsend.**
> Gilt **f'(x) < 0** auf einem Intervall, so ist f dort **streng monoton fallend.**

Gilt nur $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ auf einem Intervall, so nennt man f dort monoton wachsend bzw. monoton fallend (ohne den Zusatz „streng“).

■ Beispiel 1

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f mit $f(x) = x^3 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

b) Untersuchen Sie die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 2$ auf Monotonie.

Lösung a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Somit ist f streng monoton wachsend.

b) Bei der ganzrationalen Funktion g geht man wie folgt vor:
Man bestimmt zunächst alle Werte für x, für die die Ableitung $g'(x) = x^2 - 1$ den Wert 0 annimmt:

$$g'(x) = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$x_{1;\,2} = \pm 1$$

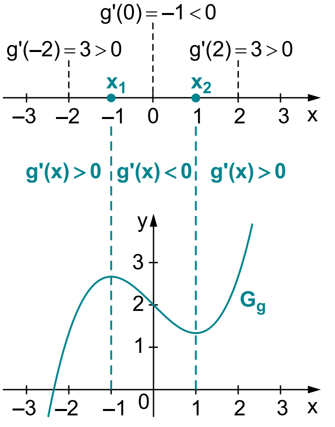
Durch $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ werden die reellen Zahlen in drei Teilintervalle geteilt: $I_1 = (-\infty;\, -1)$; $I_2 = (-1;\, 1)$ und $I_3 = (1;\, \infty)$.

Auf jedem Teilintervall ist g' nur positiv oder nur negativ. Das Vorzeichen von g' kann man daher durch jeweils einen **Testwert** aus jedem Teilintervall ermitteln:

- $g'(-2) = 4 - 1 = 3 > 0$,
  d. h., $g'(x) > 0$ für alle $x \in I_1$,
- $g'(0) = 0 - 1 = -1 < 0$,
  d. h., $g'(x) < 0$ für alle $x \in I_2$,
- $g'(2) = 4 - 1 = 3 > 0$,
  d. h., $g'(x) > 0$ für alle $x \in I_3$.

Somit ist die Funktion g nach dem Monotoniesatz

- streng monoton wachsend in $I_1 = (-\infty; -1)$,
- streng monoton fallend in $I_2 = (-1; 1)$,
- streng monoton wachsend in $I_3 = (1; \infty)$.



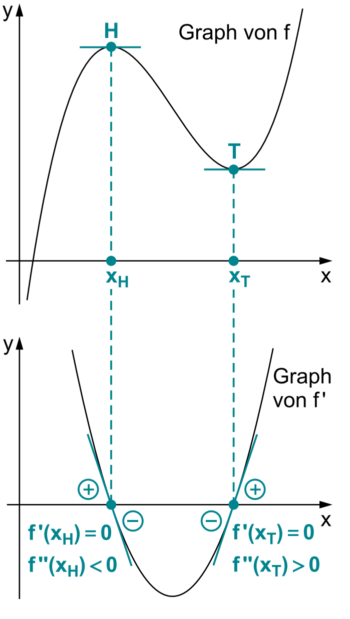
Anmerkung: Das Verfahren aus Beispiel 1 b lässt sich auch bei anderen auf einem **Intervall** definierten Funktionen anwenden, deren Ableitung dort nur endlich viele Nullstellen hat.

Extremstellen

Mithilfe der Ableitungen einer Funktion f lassen sich Extremwerte von f bzw. Hoch- und Tiefpunkte des zugehörigen Graphen G_f bestimmen, wenn f auf einem Intervall definiert ist und die x-Werte dieser Punkte **im Innern** des Intervalls liegen. Man spricht dann von **lokalen Extremwerten**.

Durchläuft man den in der Abbildung vorgegebenen Graphen einer Funktion f in positive x-Richtung mithilfe einer gedachten Tangente (Geodreieck), so ist die Steigung des Graphen positiv bis zum Hochpunkt H des Graphen. Im Punkt H selbst ist sie gleich null. Danach wird die Steigung negativ bis zum Tiefpunkt T. Im Punkt T ist sie null, anschließend wird sie wieder positiv.

Der Graph der Ableitung f' hat an der Stelle x_H eine negative Steigung, an der Stelle x_T eine positive Steigung.



Diese Überlegungen veranschaulichen die folgenden Kriterien für Extremwerte:

> An einer **lokalen Extremstelle** x_0 von f gilt immer $f'(x_0) = 0$ (**notwendige** Bedingung).
>
> Für die Bestimmung von Maxima bzw. Minima einer Funktion f gibt es jeweils zwei **hinreichende** Kriterien:
>
> **(H1)** Wenn $f'(x_H) = 0$ und $f''(x_H) < 0$ gilt, dann hat f an der Stelle x_H ein **lokales Maximum**.
>
> **(H2)** Wenn $f'(x_H) = 0$ gilt und f' an der Stelle x_H das Vorzeichen von **plus nach minus** wechselt, so hat f an der Stelle x_H ein **lokales Maximum**.
>
> Der Punkt $H(x_H \mid f(x_H))$ ist dann ein **Hochpunkt** des Graphen.
>
> **(T1)** Wenn $f'(x_T) = 0$ und $f''(x_T) > 0$ gilt, dann hat f an der Stelle x_T ein **lokales Minimum**.
>
> **(T2)** Wenn $f'(x_T) = 0$ gilt und f' an der Stelle x_T das Vorzeichen von **minus nach plus** wechselt, so hat f an der Stelle x_T ein **lokales Minimum**.
>
> Der Punkt $T(x_T \mid f(x_T))$ ist dann ein **Tiefpunkt** des Graphen.

Anmerkung: In der Schulmathematik werden in der Regel Funktionen untersucht, die man beliebig oft ableiten kann und deren erste Ableitungen nur endlich viele Nullstellen haben. In diesen Fällen gilt auch umgekehrt:
Ist $f(x_0)$ ein lokales Extremum, so wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen.

■ Beispiel 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Ihr Graph ist G_f.
Untersuchen Sie f für $x \to \pm\infty$.
Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit der x-Achse.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunkts von G_f.
Skizzieren Sie G_f.

Lösung **Verhalten für $x \to \pm\infty$:** (vgl. Kapitel „Funktionen und ihre Eigenschaften“, S. 39)

$$\begin{cases} x \to +\infty \quad \Rightarrow \quad x^3 \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty \\ x \to -\infty \quad \Rightarrow \quad x^3 \to -\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to -\infty \end{cases}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:
Die Nullstellen von f erhält man aus:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^3 - 6x^2 + 9x &= 0 \\ x \cdot (x^2 - 6x + 9) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist $x_1 = 0$ eine Lösung.

Die weiteren Lösungen erhält man mit der pq-Formel aus der Teilgleichung:

$x^2 - 6x + 9 = 0$

→ WTR 1 $x_2 = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$

Der Graph G_f schneidet die x-Achse in den Punkten **$N_1(0|0)$** und **$N_2(3|0)$**.

Hoch- und Tiefpunkt:

Ableitungen von f:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

Die Nullstellen von f' erhält man mit der pq-Formel aus:

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

→ WTR 1 $x_{3;4} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$

Somit ist $x_3 = 1$ und $x_4 = 3 = x_2$.

Es gilt $f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6 < 0$, d. h., f hat an der Stelle $x_3 = 1$ ein lokales Maximum. Mit $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$ ergibt sich der Hochpunkt $H(1|4)$ des Graphen. → WTR 5

Wegen $f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6 > 0$ hat f an der Stelle $x_4 = 3$ ein lokales Minimum.

Da $x_1 = 3$ Nullstelle von f ist, ist $T(3|0)$ der Tiefpunkt des Graphen.

Der Graph G_f hat den Hochpunkt **$H(1|4)$** und den Tiefpunkt **$T(3|0)$**.

Alternative über **Vorzeichenwechsel** von f':

Wie oben bestimmt man zunächst die Nullstellen $x_3 = 1$ und $x_4 = 3$ von f'.

Nach dem Vorbild von Beispiel 1 kann man dann f' auf Vorzeichenwechsel an diesen Stellen untersuchen, indem man einen Testwert kleiner als 1, einen zwischen 1 und 3 und einen größer als 3 heranzieht:

$f'(0) = 9 > 0$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$

$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$

Daraus liest man ab:

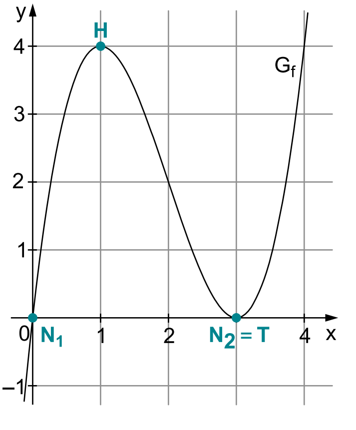
f' hat an der Stelle $x_3 = 1$ einen Vorzeichenwechsel von **plus nach minus**.

f hat daher an dieser Stelle ein lokales Maximum.

f' hat an der Stelle $x_4 = 3$ einen Vorzeichenwechsel von **minus nach plus**.

f hat daher an dieser Stelle ein lokales Minimum.

Skizze von G_f:



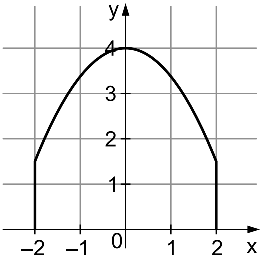
B Anwendungsbezogene Fragestellungen

144 Brücke

Die Abbildung zeigt den Querschnitt einer Brückenunterführung. Die obere Begrenzung der Innenwand wird beschrieben durch den Graphen G_f der Funktion f mit

$f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 4;\ -2 \le x \le 2$ (x und f(x) in Meter).

Durch die Unterführung führt auf Höhe der x-Achse eine Straße.



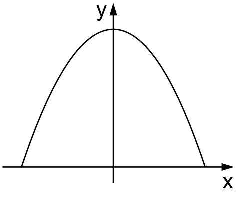
a) Berechnen Sie, wie hoch die senkrechten Innenwände der Unterführung sind.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, den eine senkrechte Innenwand mit der oberen Innenwand bildet.

b) Am Eingang der Unterführung wird senkrecht unter dem höchsten Punkt eine Ampel angebracht. Die Ampel wird von zwei Metallstangen gehalten, die jeweils orthogonal zur Innenwand der Unterführung verlaufen und an der Ampel in einem gemeinsamen Punkt B verschraubt sind. Die Befestigungspunkte der Stangen an der Innenwand befinden sich auf gleicher Höhe links und rechts von der Mitte der Unterführung und haben einen Abstand von 1 Meter.
Bestimmen Sie rechnerisch, in welcher Höhe über der Straße sich der Punkt B befindet.

c) Die Ampel wird entfernt, damit ein Spezialfahrzeug die Unterführung passieren kann. Das Spezialfahrzeug ist 2 Meter breit und 2 Meter hoch. Auf seinem Dach soll ein würfelförmiger Aufbau so befestigt werden, dass das Fahrzeug damit die Unterführung durchfahren kann.
Berechnen Sie die maximal mögliche Kantenlänge des Aufbaus.

145 Abwasserkanal

Der Querschnitt eines 20 m langen geradlinigen unterirdischen Abwasserkanals wird durch den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2{,}25$ und die x-Achse beschrieben (x und f(x) in Meter).



a) Bestimmen Sie die Weite des Winkels, den die Kanalwand mit dem Boden einschließt.
Zur Sicherung werden im Kanal einige Stahlstreben eingezogen. Betrachtet wird eine Strebe, deren Befestigungspunkte im Modell durch $P(-1{,}5\,|\,0)$ und $Q(1\,|\,f(1))$ beschrieben werden. Berechnen Sie die Länge dieser Strebe.
Überprüfen Sie, ob die Strebe im Punkt Q orthogonal auf die Kanalwand trifft.

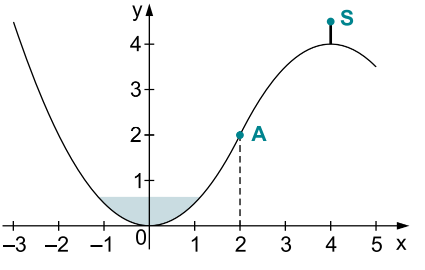
b) Berechnen Sie, welches Wasservolumen der Kanal enthält, wenn das Wasser 1,25 m hoch steht.
Zu einem bestimmten Zeitpunkt enthält der Kanal 44 m^3 Wasser.
Berechnen Sie die Breite der Wasseroberfläche im Querschnitt für diesen Fall.
Bestimmen Sie, wie hoch das Wasser dann steht.

146 Flussbett

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ und g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 4$.
Ihre Graphen sind G_f und G_g.

a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T von G_f an und berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts H von G_g.
Begründen Sie, dass sich die beiden Graphen im Punkt $A(2|2)$ berühren.
Die gemeinsame Tangente der Graphen im Punkt A schneidet die Gerade $x = 4$ im Punkt P. Berechnen Sie die Koordinaten von P.

b) Die Abbildung zeigt den Querschnitt eines Flussbetts, das für $-3 \le x \le 2$ durch G_f und für $2 \le x \le 5$ durch G_g modelliert wird (x, f(x) und g(x) in 10 Meter).
Im höchsten Punkt der rechten Böschung steht ein 5 Meter hoher Turm, von dessen Spitze S aus man das Wasser im Flussbett sehen kann.



Wegen großer Trockenheit sinkt der Wasserspiegel im Fluss. An einem bestimmten Tag ist der Wasserspiegel von der Turmspitze aus nicht mehr zu sehen.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man bestimmen kann, wie tief das Wasser in der Mitte des Flusses an diesem Tag höchstens sein kann.
Führen Sie die entsprechenden Berechnungen durch.

147 Niederschlag

Über einem bestimmten Gebiet fällt zwischen 2 Uhr nachts und 10 Uhr morgens starker Regen. Die momentane Niederschlagsrate pro Quadratmeter wird durch die Funktion f mit

$$f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 6t - 10;\quad 2 \le t \le 10$$

modelliert (t in Stunden seit Mitternacht, f(t) in Liter pro Stunde).
Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt den Graphen von f.

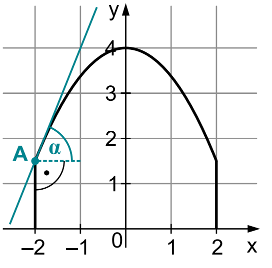
144 Begrenzung obere Innenwand: $f(x) = -\frac{5}{8}x^2 + 4$; $-2 \le x \le 2$ (x und f(x) in Meter)

Die Ableitung von f ist: $f'(x) = -\frac{5}{4}x$

a) Die **Höhe einer senkrechten Innenwand** entspricht dem Funktionswert von f an der Stelle –2 (bzw. an der Stelle 2):

$f(-2) = -\frac{5}{8} \cdot (-2)^2 + 4 = \frac{3}{2}$

Die senkrechten Innenwände sind **1,5 m** hoch.



Der gesuchte **Winkel zwischen den Innenwänden** setzt sich zusammen aus dem Steigungswinkel α der Tangente im Punkt A(–2 | 1,5) an G_f und einem rechten Winkel (s. Skizze).

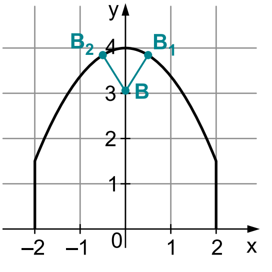
→ WTR 4 $\tan(\alpha) = f'(-2) = -\frac{5}{4} \cdot (-2) = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 68{,}2°$

$90° + 68{,}2° = 158{,}2°$

Die Innenwände bilden einen Winkel von **ca. 158,2°**.

b) **Lage des Punktes B:**

Nimmt man an, dass die Abbildung den Eingang der Unterführung beschreibt, so haben die Befestigungspunkte aufgrund der Symmetrie der Brückenunterführung die Koordinaten $B_1(0{,}5 \,|\, f(0{,}5))$ und $B_2(-0{,}5 \,|\, f(0{,}5))$. Die Normalen in den beiden Punkten schneiden sich in dem Punkt B auf der y-Achse.



Für die Normale n im Punkt B_1 erhält man mit $f'(0{,}5) = -\frac{5}{8}$ die Gleichung:

$y = -\frac{1}{f'(0{,}5)} \cdot (x - 0{,}5) + f(0{,}5)$

$ = \frac{8}{5} \cdot (x - 0{,}5) + \frac{123}{32}$

Schnitt von n mit der y-Achse $x = 0$:

$y = \frac{8}{5} \cdot (0 - 0{,}5) + \frac{123}{32} \approx 3{,}04$

Der Befestigungspunkt B an der Ampel befindet sich **etwa 3 Meter über der Straße**.

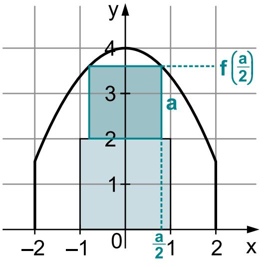
c) **Maximale Kantenlänge des Aufbaus:**

Für eine möglichst große Kantenlänge des Aufbaus wird das Fahrzeug mittig zur Straße fahren, wobei der Aufbau mittig, mit den Kanten parallel zu den Fahrzeugkanten befestigt ist (vgl. Skizze auf der nächsten Seite).

Ist a die Kantenlänge des würfelförmigen Aufbaus, so entnimmt man der Skizze die Bedingung für die maximal mögliche Kantenlänge:

$f\left(\frac{a}{2}\right) = 2 + a$

Daraus ergibt sich für a:



$$-\frac{5}{8}\cdot\frac{a^2}{4}+4=2+a$$
$$-\frac{5}{32}a^2-a+2=0$$
$$-5a^2-32a+64=0$$
$$a^2+\frac{32}{5}a-\frac{64}{5}=0$$

→ WTR 1 $\quad a_{1;2}=-\frac{16}{5}\pm\sqrt{\frac{256}{25}+\frac{64}{5}}=-\frac{16}{5}\pm\frac{24}{5}$

$$a_1=-8;\quad a_2=\frac{8}{5}=1{,}6$$

Relevant ist hier nur die positive Lösung $a_2=1{,}6$.

Die maximal mögliche Kantenlänge des Aufbaus beträgt **1,6 Meter**.

145 Begrenzung der Kanalinnenwand: $f(x)=-x^2+2{,}25$ (x und f(x) in Meter)
Ableitung von f: $f'(x)=-2x$

a) **Winkel:**
Nullstellen von f:

$$f(x)=0$$
$$-x^2+2{,}25=0$$
$$x^2=2{,}25$$
$$x_{1;2}=\pm1{,}5$$

Wegen der Symmetrie von G_f genügt es, den Steigungswinkel der Tangente an der Stelle $x_1=-1{,}5$ zu berechnen:

→ WTR 4 $\quad \tan(\alpha)=f'(-1{,}5)=-2\cdot(-1{,}5)=3 \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx71{,}6°$

Die Kanalwand schließt mit dem Boden einen Winkel von **etwa 71,6°** ein.

Strebe mit den Endpunkten P(–1,5 | 0) und Q(1 | f(1)) = Q(1 | 1,25):

Länge der Strecke PQ: $\sqrt{(1-(-1{,}5))^2+(1{,}25-0)^2}=\sqrt{7{,}8125}\approx2{,}80$

Die Strebe ist etwa **2,8 m lang**.

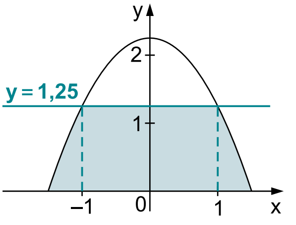
Steigung der Strecke PQ: $m_{PQ}=\frac{1{,}25-0}{1-(-1{,}5)}=0{,}5$

Tangentensteigung im Punkt Q(1 | 1,25): $f'(1)=-2\cdot1=-2$

Wegen $f'(1)\cdot m_{PQ}=-2\cdot0{,}5=-1$ trifft die Strebe **orthogonal auf die Kanalwand**.

b) **Wasservolumen bei 1,25 m Höhe:**
Schnittstellen von G_f mit der Geraden $y = 1{,}25$:

$$f(x) = 1{,}25$$
$$-x^2 + 2{,}25 = 1{,}25$$
$$x^2 = 1$$
$$x_{3;\,4} = \pm 1$$



Für den Inhalt der Querschnittsfläche des Wassers erhält man unter Ausnutzung der Achsensymmetrie von G_f (s. Skizze):

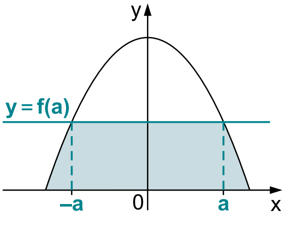
→ WTR 9

$$A = 2 \cdot 1{,}25 + 2 \cdot \int_1^{1{,}5} f(x)\,dx = 2{,}5 + 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 2{,}25x\right]_1^{1{,}5} = 2{,}5 + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{6} \approx 3{,}167$$

Da der Kanal 20 m lang ist, erhält man für das Wasservolumen im Kanal:

$\mathbf{V} \approx 20\text{ m} \cdot 3{,}167\text{ m}^2 = \mathbf{63{,}34\text{ m}^3}$

Breite der Wasseroberfläche, Wasserstand:
Der Wasserspiegel wird im Querschnitt durch eine zur x-Achse parallele Gerade beschrieben. Ihre positive Schnittstelle mit G_f sei a.
Die Breite der Wasseroberfläche ist dann 2a, die Gleichung der Geraden $y = f(a)$.
Wenn der Kanal 44 m^3 Wasser enthält, gilt für den Inhalt der Querschnittsfläche des Wassers:



$44\text{ m}^3 : 20\text{ m} = 2{,}2\text{ m}^2$

Analog zu oben muss dann gelten:

$$2{,}2 = 2a \cdot f(a) + 2 \cdot \int_a^{1{,}5} f(x)\,dx$$
$$2{,}2 = 2a \cdot (-a^2 + 2{,}25) + 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 2{,}25x\right]_a^{1{,}5}$$
$$2{,}2 = -2a^3 + 4{,}5a + 2 \cdot \left(-\frac{1{,}5^3}{3} + 2{,}25 \cdot 1{,}5\right) - 2 \cdot \left(-\frac{a^3}{3} + 2{,}25a\right)$$
$$2{,}2 = -\frac{4}{3}a^3 + 4{,}5$$
$$a^3 = 1{,}725$$

→ WTR 7

$$a = \sqrt[3]{1{,}725} \approx 1{,}20$$

Die Breite der Wasseroberfläche beträgt **etwa 2,40 m**.

Der Wasserstand ergibt sich aus $f(a) \approx f(1{,}20) = 0{,}81$.
Das Wasser im Kanal steht dann **ca. 81 cm** hoch.

146 Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ und g mit $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-4$.

Ableitungen von f und g: $f'(x)=x$; $g'(x)=-x+4$

a) **Extrempunkte:**

G_f ist eine nach oben geöffnete Parabel 2. Ordnung mit dem Scheitel **T(0|0)** als Tiefpunkt.

G_g ist eine nach unten geöffnete Parabel 2. Ordnung, wobei ihr Scheitel der Hochpunkt H ist. Die Koordinaten von H berechnet man mithilfe der Ableitung von g:

$$\begin{aligned} g'(x)&=0\\ -x+4&=0\\ x&=4 \end{aligned}$$

Mit $g(4)=-\frac{1}{2}\cdot 4^2+4\cdot 4-4=4$ ergibt sich **H(4|4)**.

Berührung im Punkt A(2|2):

Es gilt:

(1) $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2=2$ und $g(2)=-\frac{1}{2}\cdot 2^2+4\cdot 2-4=2$, d. h. $f(2)=g(2)$

(2) $f'(2)=2$ und $g'(2)=-2+4=2$, d. h. $f'(2)=g'(2)$

Somit **berühren sich G_f und G_g** im Punkt A(2|2).

Gemeinsame Tangente in A:

Eine Gleichung der gemeinsamen Tangente ist:

$y=f'(2)\cdot(x-2)+2=2\cdot(x-2)+2=2x-2$

Schnitt mit der Geraden $x=4$:

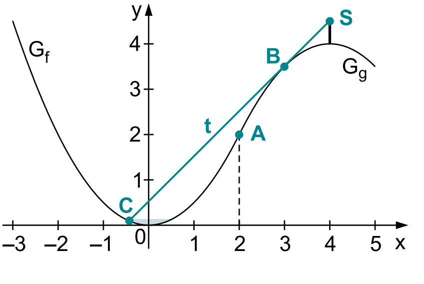
$y=2\cdot 4-2=6$

Schnittpunkt: **P(4|6)**

b) **Beschreibung:**

Der Punkt S liegt 5 Meter über H, seine Koordinaten sind somit S(4|4,5). (Beachten Sie, dass auf jeder Achse eine Einheit 10 Meter bedeutet.)

Der Sehstrahl von S zum tiefsten Punkt C am linken Ufer verläuft tangential zu G_g. Den Punkt C erhält man daher, indem man die Tangente t durch S an G_g legt und diese mit G_f schneidet.



Der Wasserspiegel ist von S aus nicht mehr zu sehen, wenn er höchstens bis zum Punkt C reicht.

Der Wasserstand in der Mitte des Flusses ist dann höchstens so groß wie der y-Wert von C multipliziert mit 10 Metern.

Rechnung:
Die Tangente t durch S an G_g berührt G_g in einem Punkt $B(u|g(u))$.
Da S senkrecht unterhalb des Punktes P liegt (s. Teilaufgabe a), gilt $2<u<4$.
Eine Gleichung für t ist:

$$y = g'(u)\cdot(x-u)+g(u) = (-u+4)\cdot(x-u)-\tfrac{1}{2}u^2+4u-4$$

Punktprobe mit $S(4|4{,}5)$ liefert eine Gleichung für u:

$$4{,}5 = (-u+4)\cdot(4-u)-\tfrac{1}{2}u^2+4u-4$$
$$4{,}5 = (4-u)^2-\tfrac{1}{2}u^2+4u-4$$
$$4{,}5 = 16-8u+u^2-\tfrac{1}{2}u^2+4u-4$$
$$0 = \tfrac{1}{2}u^2-4u+7{,}5$$
$$0 = u^2-8u+15$$

→ **WTR 1** $u_{1;2} = 4\pm\sqrt{16-15} = 4\pm 1$

Die Lösung im Bereich $2<u<4$ ist $u_1 = 4-1 = 3$.
Damit ergibt sich für t die Gleichung:

$$y = g'(3)\cdot(x-3)+g(3) = 1\cdot(x-3)-\tfrac{1}{2}\cdot 3^2+4\cdot 3-4 = x+\tfrac{1}{2}$$

Der Punkt C ist der Schnittpunkt von t und G_f im Bereich $x<2$:

$$\tfrac{1}{2}x^2 = x+\tfrac{1}{2}$$
$$x^2-2x-1 = 0$$
$$x_{1;2} = 1\pm\sqrt{2}$$

Die Lösung mit $x<2$ ist $x_1 = 1-\sqrt{2}\approx -0{,}414$.
Einsetzen in die Gleichung der Tangente t liefert den y-Wert von C:

$$y_1 = 1-\sqrt{2}+\tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}-\sqrt{2}\approx 0{,}086$$

Der Wasserstand in der Mitte des Flusses kann **höchstens etwa 0,86 Meter** betragen.

147 Niederschlagsrate f pro Quadratmeter: $f(t) = -\tfrac{1}{2}t^2+6t-10;\ 2\le t\le 10$
(t in Stunden seit Mitternacht, f(t) in Liter pro Stunde)

a) **Regenmenge:**

→ **WTR 9** $N = \int_2^{10} f(t)\,dt = \int_2^{10}\left(-\tfrac{1}{2}t^2+6t-10\right)dt = \left[-\tfrac{1}{6}t^3+3t^2-10t\right]_2^{10}\approx 42{,}7$

Zwischen 2 Uhr nachts und 10 Uhr morgens sind **etwa 43 Liter Wasser** pro Quadratmeter gefallen.