



**MEHR
ERFAHREN**

Mathematik-KOMPAKT

Realschule 5.-10. Klasse

STARK

Inhalt

Vorwort

Zahlenbereiche und Zahlensysteme 1

1	Zahlenbereiche	1
2	Primzahlen	3
3	Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen	3
4	Besondere Teilbarkeitsregeln	7
5	Zehnersystem (Dezimalsystem)	8
6	Zweiersystem (Dualsystem)	9
7	Römische Zahlen	11

Grundlagen des Rechnens 13


1	Grundrechenarten	13
2	Rechengesetze	14
3	Rechnen mit Brüchen	14
4	Rechnen mit Klammern	15
5	Rundungsregeln und Überschlagsrechnung	16
6	Potenzen	18
7	Wurzeln	19
8	Quadratische Gleichungen und quadratische Ergänzung	21
9	Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall	23
10	Logarithmen	25

Funktionen 27

1	Funktionsbegriff	27
2	Lineare Funktionen	29
3	Lineare Gleichungssysteme	30
4	Quadratische Funktionen	34




Fortsetzung nächste Seite

5	Potenzfunktionen	38
 6	Exponentialfunktionen	41
7	Proportionale/antiproportionale Zuordnungen und das Dreisatzverfahren	42

Prozent- und Zinsrechnung 44

1	Prozentrechnung	44
2	Vermehrter und verminderter Grundwert	44
3	Zinsrechnung	45
4	Darstellung von Prozentsätzen durch Diagramme	46
5	Berechnung einfacher Prozentsätze	47
6	Promille	47

Ebene Geometrie 48

1	Grundbegriffe	48
2	Koordinatensystem	50
3	Winkel an Geradenkreuzungen	50
4	Winkel in Dreiecken, Vierecken und Vielecken	51
5	Grundkonstruktionen	52
6	Achsen- und Punktspiegelung	53
7	Dreiecke	56
8	Besondere Linien im Dreieck	59
9	Kongruenzsätze und Dreieckskonstruktionen	60
10	Vierecke	62
11	Kreis, Kreisbogen, Kreissektor	64
12	Beziehungen am Kreis	66
13	Ähnlichkeit	67
 14	Zentrische Streckung	68
15	Strahlensätze	70
16	Satzgruppe des Pythagoras	71

Räumliche Geometrie 73



1	Prisma und Zylinder	73
2	Pyramide und Kegel	76
3	Kugel	79

4	Massenberechnung	80
5	Darstellung von Körpern: Netz, Zweitafelprojektion und Schrägbild	80


Trigonometrie 84

1	Definition der Winkelfunktionen	84
2	Sinus- und Kosinusfunktion	85
3	Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck	88
4	Berechnungen an beliebigen Dreiecken	89

Statistik 91

1	Statistische Erhebungen	91
 2	Absolute und relative Häufigkeit	91
3	Arithmetisches Mittel	93
4	Modalwert und Zentralwert	94
5	Maximum, Minimum und Spannweite	95
 6	Quartile und Boxplot	96

Wahrscheinlichkeitsrechnung 99

1	Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeit	99
2	Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit	100
 3	Mehrstufige Zufallsversuche	101
4	Erwartungswert	103

Anhang 105

1	Maßeinheiten	105
2	Internationale Maßeinheiten	107
3	Vorsilben für dezimale Vielfache oder Teile von Maßeinheiten	107
4	Das griechische Alphabet	108

Stichwortverzeichnis 109

Hinweis:

Die entsprechend gekennzeichneten Kapitel enthalten ein **Lernvideo**. An den jeweiligen Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann.



Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, beim Ansehen der Videos eine WLAN-Verbindung zu nutzen. Falls keine Möglichkeit besteht, den QR-Code zu scannen, sind die Lernvideos auch auffindbar unter:

<http://qrcode.stark-verlag.de/914001V>

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Nachschlagewerk aus der Reihe „KOMPAKT“ soll euer Begleiter im Schulalltag von der **5. bis zur 10. Klasse** sein. Es enthält die wichtigsten Themenbereiche der Mathematik bis zum mittleren Schulabschluss und fasst sie in komprimierter Form zusammen.

- Der Unterrichtsstoff wird **klar strukturiert** und **verständlich erklärt**.
- Wichtige **Definitionen**, **Merksätze** und **Formeln** sind kompakt zusammengefasst und hervorgehoben.
- Charakteristische und prägnante **Beispiele** verdeutlichen die Stoffinhalte.
- Viele **Schaubilder und Grafiken** veranschaulichen den Stoff zusätzlich.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Zu ausgewählten Themen gibt es **Lernvideos** und **Animationen**, in denen wichtige Zusammenhänge dargestellt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann. Eine Zusammenstellung aller Videos und Animationen ist über den nebenstehenden QR-Code abrufbar.



Dieses Buch ist somit ideal geeignet zum schnellen Nachschlagen von Begriffen, zur zeitsparenden Wiederholung und Festigung des Unterrichtsstoffs sowie zur Vorbereitung auf Klassenarbeiten und auf die Abschlussprüfung.

Viel Freude beim Einsatz dieses Buches und viel Erfolg auf eurer gesamten Schullaufbahn!

Stark Verlag

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1 Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeit

Das Werfen einer Münze oder eines Würfels, das Drehen eines Glücksrades oder auch die Ziehung der Lottozahlen sind Versuche mit nicht vorhersehbarem Ausgang, sogenannte **Zufallsversuche**. Jeder Zufallsversuch hat ein **Ergebnis**. Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsversuchs nennt man **Ergebnismenge** oder **Ergebnisraum** Ω eines Zufallsversuchs.

Bei einem Zufallsversuch kann ein bestimmtes **Ereignis** eintreten. Zu jedem Ereignis gehört eine bestimmte Menge von Ergebnissen.

Sind **alle Ergebnisse** eines Zufallsversuchs **gleich wahrscheinlich**, spricht man von einem **Laplace-Experiment**. Man kann dann die **Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses E** wie folgt bestimmen:

Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse für E}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Ereignisse können miteinander durch „oder“ sowie „und“ verknüpft sein. Bei einer Verknüpfung mit „oder“ muss mindestens eine der beiden Bedingungen erfüllt sein. Bei einer Verknüpfung mit „und“ müssen beide Bedingungen erfüllt sein.

Werfen eines Würfels

- Ergebnis: z. B. Augenzahl 4
- Ergebnismenge/-raum:
 $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- Ereignis: z. B. „Die Augenzahl ist gerade.“
 $E = \{2; 4; 6\}$
- Wahrscheinlichkeit:

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



Beispiel

- Verknüpfung „**oder**“:
z. B. „Die Augenzahl ist gerade **oder** eine Primzahl.“
 $E = \{2; 3; 4; 5; 6\}; P(E) = \frac{5}{6}$
- Verknüpfung „**und**“:
z. B. „Die Augenzahl ist gerade **und** eine Primzahl.“
 $E = \{2\}; P(E) = \frac{1}{6}$

2 Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

Wiederholt man einen Zufallsversuch mehrmals, so nennt man die Anzahl der Versuche, bei denen ein bestimmtes Ergebnis auftritt, die **absolute Häufigkeit** dieses Ergebnisses. Berechnet man den Quotienten aus der absoluten Häufigkeit des Ergebnisses und der Gesamtzahl der Zufallsversuche, so heißt dieser Quotient **relative Häufigkeit** des Ergebnisses.

Wird ein Zufallsversuch sehr oft wiederholt, so nähert sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses der Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses an. Damit kann die Wahrscheinlichkeit näherungsweise durch die relative Häufigkeit bei einer langen Versuchsreihe bestimmt werden.

Gesetz der großen Zahlen

Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses stabilisiert sich mit steigender Anzahl von Versuchen um einen festen Wert.

Beispiel

Eine Münze wurde 200-mal geworfen. Nach jeweils 20 Würfeln wurden die relativen Häufigkeiten für die Ergebnisse „Kopf“ und „Zahl“ bestimmt.

Würfe	Anzahl		Absolute Häufigkeit		Relative Häufigkeit	
	Kopf	Zahl	Kopf	Zahl	Kopf	Zahl
1 – 20	13	7	13	7	0,650	0,350
21 – 40	10	10	23	17	0,575	0,425
41 – 60	8	12	31	29	0,517	0,483

Würfe	Anzahl		Absolute Häufigkeit		Relative Häufigkeit	
	Kopf	Zahl	Kopf	Zahl	Kopf	Zahl
61 – 80	8	12	39	41	0,488	0,513
81 – 100	7	13	46	54	0,460	0,540
101 – 120	15	5	61	59	0,508	0,492
121 – 140	9	11	70	70	0,500	0,500
141 – 160	11	9	81	79	0,506	0,494
161 – 180	8	12	89	91	0,494	0,506
181 – 200	10	12	99	101	0,495	0,505

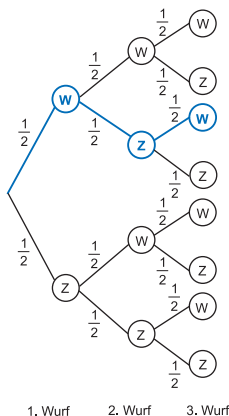
Mit wachsender Wurffanzahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit für „Kopf“ und „Zahl“ jeweils um den Wert 0,5.

3 Mehrstufige Zufallsversuche

Wird ein Zufallsversuch mehrfach durchgeführt, spricht man von einem **mehrstufigen** (zweistufigen, dreistufigen, ...) **Zufallsversuch**. Die Ergebnisse lassen sich in einem **Baumdiagramm** darstellen. Dabei kann ein **Ergebnis als Pfad** veranschaulicht werden.



Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen. Beim Werfen der Münze gibt es bei jedem Wurf die beiden Möglichkeiten Zahl (Z) oder Wappen (W). Die Wahrscheinlichkeit für W oder Z ist $\frac{1}{2}$; sie wird jeweils neben die einzelnen Äste des Baumdiagramms geschrieben. Der zum Ergebnis (WZW) gehörende Pfad ist im Baumdiagramm hervorgehoben.



Beispiel

Beim Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsversuche helfen die folgenden Pfadregeln:

Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsversuchen

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit für ein **Ergebnis** ergibt sich aus dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten **entlang des Pfades**.

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist die **Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten** der günstigen Ergebnisse.

3. Pfadregel (Verzweigungsregel)

Die **Summe** aller Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von ein und demselben **Verzweigungspunkt** ausgehen, ist **stets 1**.

Beispiel

Drimaliger Münzwurf

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 3-mal hintereinander Zahl zu werfen?

Lösung:

$$P(ZZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis (ZZZ) beträgt $\frac{1}{8}$.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1-mal Zahl zu werfen?

Lösung:

$$\begin{aligned} P[(WWZ); (WZW); (WZZ); (ZWW); (ZWZ); (ZZW); (ZZZ)] \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „mindestens 1-mal Zahl“ beträgt $\frac{7}{8}$.

Man kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E auch mithilfe des **Gegenereignisses** \bar{E} berechnen. Für das Gegenereignis sind alle Ergebnisse günstig, die für das Ereignis ungünstig sind. Dabei gilt:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

Dreimaliger Münzwurf

Gegenereignis zum Ereignis „mindestens 1-mal Zahl“ ist „kein-mal Zahl“

Lösung:

$$P[(WWZ); (WZW); (ZWW); (ZWZ); (ZZW); (ZZZ)]$$

$$= 1 - P[(WWW)] = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Beispiel

4 Erwartungswert

Sind den Ergebnissen eines Zufallsexperiments Zahlenwerte oder Größen zugeordnet, lässt sich mit dem Erwartungswert eine Vorhersage über den zu erwartenden Durchschnittswert bei vielen Wiederholungen des Experiments treffen.

Erwartungswert

Ist bei einem Zufallsexperiment mit n Ergebnissen jedem Ergebnis E_i ein Wert W_i zugeordnet, dann gilt für den Erwartungswert:

$$E = P(E_1) \cdot W_1 + P(E_2) \cdot W_2 + \dots + P(E_n) \cdot W_n$$

Bei einer Verlosung beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Hauptgewinn 5 %, für einen Gewinn 20 % und für eine Niete 75 %. Berechne den Erwartungswert für den Spieler, wenn gilt: Hauptgewinn: 10 €; Gewinn: 4 €; Einsatz: 2 €

Beispiel

Lösung:

$$W_{HG} = 10 \text{ €} - 2 \text{ €} = 8 \text{ €}; \quad W_G = 4 \text{ €} - 2 \text{ €} = 2 \text{ €}; \quad W_N = -2 \text{ €}$$

$$E = P(HG) \cdot W_{HG} + P(G) \cdot W_G + P(N) \cdot W_N$$

$$E = \frac{5}{100} \cdot 8 \text{ €} + \frac{20}{100} \cdot 2 \text{ €} + \frac{75}{100} \cdot (-2 \text{ €}) = -0,70 \text{ €}$$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH ist urheberrechtlich international geschützt. Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung des Rechteinhabers in irgendeiner Form verwertet werden.

STARK