

The background of the entire page is a collage of various measuring tapes in different colors (red, blue, green, white) and sizes, all showing different numerical markings like 101, 127, 129, 35, 56, 33, 13, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 5610, 5611, 5612, 5613, 5614, 5615, 5616, 5617, 5618, 5619, 5620, 5621, 5622, 5623, 5624, 5625, 5626, 5627, 5628, 5629, 5630, 5631, 5632, 5633, 5634, 5635, 5636, 5637, 5638, 5639, 5640, 5641, 5642, 5643, 5644, 5645, 5646, 5647, 5648, 5649, 5650, 5651, 5652, 5653, 5654, 5655, 5656, 5657, 5658, 5659, 5660, 5661, 5662, 5663, 5664, 5665, 5666, 5667, 5668, 5669, 56610, 56611, 56612, 56613, 56614, 56615, 56616, 56617, 56618, 56619, 56620, 56621, 56622, 56623, 56624, 56625, 56626, 56627, 56628, 56629, 56630, 56631, 56632, 56633, 56634, 56635, 56636, 56637, 56638, 56639, 56640, 56641, 56642, 56643, 56644, 56645, 56646, 56647, 56648, 56649, 56650, 56651, 56652, 56653, 56654, 56655, 56656, 56657, 56658, 56659, 56660, 56661, 56662, 56663, 56664, 56665, 56666, 56667, 56668, 56669, 566610, 566611, 566612, 566613, 566614, 566615, 566616, 566617, 566618, 566619, 566620, 566621, 566622, 566623, 566624, 566625, 566626, 566627, 566628, 566629, 566630, 566631, 566632, 566633, 566634, 566635, 566636, 566637, 566638, 566639, 566640, 566641, 566642, 566643, 566644, 566645, 566646, 566647, 566648, 566649, 566650, 566651, 566652, 566653, 566654, 566655, 566656, 566657, 566658, 566659, 566660, 566661, 566662, 566663, 566664, 566665, 566666, 566667, 566668, 566669, 5666610, 5666611, 5666612, 5666613, 5666614, 5666615, 5666616, 5666617, 5666618, 5666619, 5666620, 5666621, 5666622, 5666623, 5666624, 5666625, 5666626, 5666627, 5666628, 5666629, 5666630, 5666631, 5666632, 5666633, 5666634, 5666635, 5666636, 5666637, 5666638, 5666639, 5666640, 5666641, 5666642, 5666643, 5666644, 5666645, 5666646, 5666647, 5666648, 5666649, 56666450, 56666611, 56666612, 56666613, 56666614, 56666615, 56666616, 56666617, 56666618, 56666619, 56666620, 56666621, 56666622, 56666623, 56666624, 56666625, 56666626, 56666627, 56666628, 56666629, 56666630, 56666631, 56666632, 56666633, 56666634, 56666635, 56666636, 56666637, 56666638, 56666639, 56666640, 56666641, 56666642, 56666643, 56666644, 56666645, 56666646, 56666647, 56666648, 56666649, 566666450, 566666611, 566666612, 566666613, 566666614, 566666615, 566666616, 566666617, 566666618, 566666619, 566666620, 566666621, 566666622, 566666623, 566666624, 566666625, 566666626, 566666627, 566666628, 566666629, 566666630, 566666631, 566666632, 566666633, 566666634, 566666635, 566666636, 566666637, 566666638, 566666639, 566666640, 566666641, 566666642, 566666643, 566666644, 566666645, 566666646, 566666647, 566666648, 566666649, 566666650, 5666666611, 5666666612, 5666666613, 5666666614, 5666666615, 5666666616, 5666666617, 5666666618, 5666666619, 5666666620, 5666666621, 5666666622, 5666666623, 5666666624, 5666666625, 5666666626, 5666666627, 5666666628, 5666666629, 5666666630, 5666666631, 5666666632, 5666666633, 5666666634, 5666666635, 5666666636, 5666666637, 5666666638, 5666666639, 5666666640, 5666666641, 5666666642, 5666666643, 5666666644, 5666666645, 5666666646, 5666666647, 5666666648, 5666666649, 5666666650, 56666666611, 56666666612, 56666666613, 56666666614, 56666666615, 56666666616, 56666666617, 56666666618, 56666666619, 56666666620, 56666666621, 56666666622, 56666666623, 56666666624, 56666666625, 56666666626, 56666666627, 56666666628, 56666666629, 56666666630, 56666666631, 56666666632, 56666666633, 56666666634, 56666666635, 56666666636, 56666666637, 56666666638, 56666666639, 56666666640, 56666666641, 56666666642, 56666666643, 56666666644, 56666666645, 56666666646, 56666666647, 56666666648, 56666666649, 56666666650, 566666666611, 566666666612, 566666666613, 566666666614, 566666666615, 566666666616, 566666666617, 566666666618, 566666666619, 566666666620, 566666666621, 566666666622, 566666666623, 566666666624, 566666666625, 566666666626, 566666666627, 566666666628, 566666666629, 566666666630, 566666666631, 566666666632, 566666666633, 566666666634, 566666666635, 566666666636, 566666666637, 566666666638, 566666666639, 566666666640, 566666666641, 566666666642, 566666666643, 566666666644, 566666666645, 566666666646, 566666666647, 566666666648, 566666666649, 566666666650, 5666666666611, 5666666666612, 5666666666613, 5666666666614, 5666666666615, 5666666666616, 5666666666617, 5666666666618, 5666666666619, 5666666666620, 5666666666621, 5666666666622, 5666666666623, 5666666666624, 5666666666625, 5666666666626, 5666666666627, 5666666666628, 5666666666629, 5666666666630, 5666666666631, 5666666666632, 5666666666633, 5666666666634, 5666666666635, 5666666666636, 5666666666637, 5666666666638, 5666666666639, 5666666666640, 5666666666641, 5666666666642, 5666666666643, 5666666666644, 5666666666645, 5666666666646, 5666666666647, 5666666666648, 5666666666649, 5666666666650, 56666666666611, 56666666666612, 56666666666613, 56666666666614, 56666666666615, 56666666666616, 56666666666617, 56666666666618, 56666666666619, 56666666666620, 56666666666621, 56666666666622, 56666666666623, 56666666666624, 56666666666625, 56666666666626, 56666666666627, 56666666666628, 56666666666629, 56666666666630, 56666666666631, 56666666666632, 56666666666633, 56666666666634, 56666666666635, 56666666666636, 56666666666637, 56666666666638, 56666666666639, 56666666666640, 56666666666641, 56666666666642, 56666666666643, 56666666666644, 56666666666645, 56666666666646, 56666666666647, 56666666666648, 56666666666649, 56666666666650, 566666666666611, 566666666666612, 566666666666613, 566666666666614, 566666666666615, 566666666666616, 566666666666617, 566666666666618, 566666666666619, 566666666666620, 566666666666621, 566666666666622, 566666666666623, 566666666666624, 566666666666625, 566666666666626, 566666666666627, 566666666666628, 566666666666629, 566666666666630, 566666666666631, 566666666666632, 566666666666633, 566666666666634, 566666666666635, 566666666666636, 566666666666637, 566666666666638, 566666666666639, 566666666666640, 566666666666641, 566666666666642, 566666666666643, 566666666666644, 566666666666645, 566666666666646, 566666666666647, 566666666666648, 566666666666649, 566666666666650, 5666666666666611, 5666666666666612, 5666666666666613, 5666666666666614, 5666666666666615, 5666666666666616, 5666666666666617, 5666666666666618, 5666666666666619, 5666666666666620, 5666666666666621, 5666666666666622, 5666666666666623, 5666666666666624, 5666666666666625, 5666666666666626, 5666666666666627, 5666666666666628, 5666666666666629, 5666666666666630, 5666666666666631, 5666666666666632, 5666666666666633, 5666666666666634, 5666666666666635, 5666666666666636, 5666666666666637, 5666666666666638, 5666666666666639, 5666666666666640, 5666666666666641, 5666666666666642, 5666666666666643, 5666666666666644, 5666666666666645, 5666666666666646, 5666666666666647, 5666666666666648, 5666666666666649, 5666666666666650, 56666666666666611, 56666666666666612, 56666666666666613, 56666666666666614, 56666666666666615, 56666666666666616, 56666666666666617, 56666666666666618, 56666666666666619, 56666666666666620, 56666666666666621, 56666666666666622, 56666666666666623, 56666666666666624, 56666666666666625, 56666666666666626, 56666666666666627, 56666666666666628, 56666666666666629, 56666666666666630, 56666666666666631, 56666666666666632, 56666666666666633, 56666666666666634, 56666666666666635, 56666666666666636, 56666666666666637, 56666666666666638, 56666666666666639, 56666666666666640, 56666666666666641, 56666666666666642, 56666666666666643, 56666666666666644, 56666666666666645, 56666666666666646, 56666666666666647, 56666666666666648, 56666666666666649, 56666666666666650, 566666666666666611, 566666666666666612, 566666666666666613, 566666666666666614, 566666666666666615, 566666666666666616, 566666666666666617, 566666666666666618, 566666666666666619, 566666666666666620, 566666666666666621, 566666666666666622, 566666666666666623, 566666666666666624, 566666666666666625, 566666666666666626, 566666666666666627, 566666666666666628, 566666666666666629, 566666666666666630, 566666666666666631, 566666666666666632, 566666666666666633, 566666666666666634, 566666666666666635, 566666666666666636, 566666666666666637, 566666666666666638, 566666666666666639, 566666666666666640, 566666666666666641, 566666666666666642, 566666666666666643, 566666666666666644, 566666666666666645, 566666666666666646, 566666666666666647, 566666666666666648, 566666666666666649, 566666666666666650, 5666666666666666611, 5666666666666666612, 5666666666666666613, 5666666666666666614, 5666666666666666615, 5666666666666666616, 5666666666666666617, 5666666666666666618, 5666666666666666619, 5666666666666666620, 5666666666666666621, 5666666666666666622, 5666666666666666623, 5666666666666666624, 5666666666666666625, 5666666666666666626, 5666666666666666627, 5666666666666666628, 5666666666666666629, 5666666666666666630, 5666666666666666631, 5666666666666666632, 5666666666666666633, 5666666666666666634, 5666666666666666635, 5666666666666666636, 5666666666666666637, 5666666666666666638, 5666666666666666639, 5666666666666666640, 5666666666666666641, 5666666666666666642, 5666666666666666643, 5666666666666666644, 5666666666666666645, 5666666666666666646, 5666666666666666647, 5666666666666666648, 5666666666666666649, 5666666666666666650, 56666666666666666611, 56666666666666666612, 56666666666666666613, 56666666666666666614, 56666666666666666615, 56666666666666666616, 56666666666666666617, 56666666666666666618, 56666666666666666619, 56666666666666666620, 56666666666666666621, 56666666666666666622, 56666666666666666623, 56666666666666666624, 56666666666666666625, 56666666666666666626, 56666666666666666627, 56666666666666666628, 56666666666666666629, 56666666666666666630, 56666666666666666631,

# Inhalt

## Vorwort

<b>Zahlenbereiche und Zahlensysteme</b> .....	<b>1</b>
1 Zahlenbereiche .....	1
2 Primzahlen .....	3
3 Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen .....	3
4 Besondere Teilbarkeitsregeln .....	7
5 Zehnersystem (Dezimalsystem) .....	8
6 Zweiersystem (Dualsystem) .....	9
7 Römische Zahlen .....	11
<b>Grundlagen des Rechnens</b> .....	<b>13</b>
1 Grundrechenarten .....	13
2 Rechengesetze .....	14
3 Rechnen mit Brüchen .....	14
4 Rechnen mit Klammern .....	15
5 Rundungsregeln und Überschlagsrechnung .....	16
6 Potenzen .....	18
7 Wurzeln .....	19
8 Quadratische Gleichungen und quadratische Ergänzung .....	21
9 Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall .....	23
10 Logarithmen .....	25
<b>Funktionen</b> .....	<b>27</b>
1 Funktionsbegriff .....	27
2 Lineare Funktionen .....	29
3 Lineare Gleichungssysteme .....	30
4 Quadratische Funktionen .....	34



5	Potenzfunktionen .....	38
6	Exponentialfunktionen .....	41
7	Proportionale/antiproportionale Zuordnungen und das Dreisatzverfahren .....	42
 <b>Prozent- und Zinsrechnung .....</b>		<b>44</b>
1	Prozentrechnung .....	44
2	Vermehrter und verminderter Grundwert .....	44
3	Zinsrechnung .....	45
4	Darstellung von Prozentsätzen durch Diagramme .....	46
5	Berechnung einfacher Prozentsätze .....	47
6	Promille .....	47
 <b>Ebene Geometrie .....</b>		<b>48</b>
1	Grundbegriffe .....	48
2	Koordinatensystem .....	50
3	Winkel an Geradenkreuzungen .....	50
4	Winkel in Dreiecken, Vierecken und Vielecken .....	51
5	Grundkonstruktionen .....	52
6	Achsen- und Punktspiegelung .....	53
7	Dreiecke .....	56
8	Besondere Linien im Dreieck .....	59
9	Kongruenzsätze und Dreieckskonstruktionen .....	60
10	Vierecke .....	62
11	Kreis, Kreisbogen, Kreissektor .....	64
12	Beziehungen am Kreis .....	66
13	Ähnlichkeit .....	67
14	Zentrische Streckung .....	68
15	Strahlensätze .....	70
16	Satzgruppe des Pythagoras .....	71
 <b>Räumliche Geometrie .....</b>		<b>73</b>
1	Prisma und Zylinder .....	73
2	Pyramide und Kegel .....	76
3	Kugel .....	79

4	Massenberechnung .....	80
5	Darstellung von Körpern: Netz, Zweitafelprojektion und Schrägbild .....	80
 <b>Trigonometrie .....</b>		 <b>84</b>
1	Definition der Winkelfunktionen .....	84
2	Sinus- und Kosinusfunktion .....	85
3	Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck .....	88
4	Berechnungen an beliebigen Dreiecken .....	89
 <b>Statistik .....</b>		 <b>91</b>
1	Statistische Erhebungen .....	91
2	Absolute und relative Häufigkeit .....	91
3	Arithmetisches Mittel .....	93
4	Modalwert und Zentralwert .....	94
5	Maximum, Minimum und Spannweite .....	95
6	Quartile und Boxplot .....	96
 <b>Wahrscheinlichkeitsrechnung .....</b>		 <b>99</b>
1	Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeit .....	99
2	Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit .....	100
3	Mehrstufige Zufallsversuche .....	101
4	Erwartungswert .....	103
 <b>Anhang .....</b>		 <b>105</b>
1	Maßeinheiten .....	105
2	Internationale Maßeinheiten .....	107
3	Vorsilben für dezimale Vielfache oder Teile von Maßeinheiten .....	107
4	Das griechische Alphabet .....	108
 <b>Stichwortverzeichnis .....</b>		 <b>109</b>

**Hinweis:**

Die entsprechend gekennzeichneten Kapitel enthalten ein **Lernvideo**. An den jeweiligen Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann.



Im Hinblick auf eine eventuelle Begrenzung des Datenvolumens wird empfohlen, beim Ansehen der Videos eine WLAN-Verbindung zu nutzen. Falls keine Möglichkeit besteht, den QR-Code zu scannen, sind die Lernvideos auch auffindbar unter:

<http://qrcode.stark-verlag.de/914001V>

# Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Nachschlagewerk aus der Reihe „KOMPAKT“ soll euer Begleiter im Schulalltag von der **5. bis zur 10. Klasse** sein. Es enthält die wichtigsten Themenbereiche der Mathematik bis zum mittleren Schulabschluss und fasst sie in komprimierter Form zusammen.

- Der Unterrichtsstoff wird **klar strukturiert** und **verständlich erklärt**.
- Wichtige **Definitionen**, **Merksätze** und **Formeln** sind kompakt zusammengefasst und hervorgehoben.
- Charakteristische und prägnante **Beispiele** verdeutlichen die Stoffinhalte.
- Viele **Schaubilder und Grafiken** veranschaulichen den Stoff zusätzlich.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Zu ausgewählten Themen gibt es **Lernvideos** und **Animationen**, in denen wichtige Zusammenhänge dargestellt werden. An den entsprechenden Stellen im Buch befindet sich ein QR-Code, der mit einem Smartphone oder Tablet gescannt werden kann. Eine Zusammenstellung aller Videos und Animationen ist über den nebenstehenden QR-Code abrufbar.



Dieses Buch ist somit ideal geeignet zum schnellen Nachschlagen von Begriffen, zur zeitsparenden Wiederholung und Festigung des Unterrichtsstoffs sowie zur Vorbereitung auf Klassenarbeiten und auf die Abschlussprüfung.

Viel Freude beim Einsatz dieses Buches und viel Erfolg auf eurer gesamten Schullaufbahn!



# Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 1 Zufallsversuche und Wahrscheinlichkeit

Das Werfen einer Münze oder eines Würfels, das Drehen eines Glücksrades oder auch die Ziehung der Lottozahlen sind Versuche mit nicht vorhersehbarem Ausgang, sogenannte **Zufallsversuche**. Jeder Zufallsversuch hat ein **Ergebnis**. Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsversuchs nennt man **Ergebnismenge** oder **Ergebnisraum  $\Omega$**  eines Zufallsversuchs.

Bei einem Zufallsversuch kann ein bestimmtes **Ereignis** eintreten. Zu jedem Ereignis gehört eine bestimmte Menge von Ergebnissen.

Sind **alle Ergebnisse** eines Zufallsversuchs **gleich wahrscheinlich**, spricht man von einem **Laplace-Experiment**. Man kann dann die **Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses E** wie folgt bestimmen:

### Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse für } E}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Ereignisse können miteinander durch „oder“ sowie „und“ verknüpft sein. Bei einer Verknüpfung mit „oder“ muss mindestens eine der beiden Bedingungen erfüllt sein. Bei einer Verknüpfung mit „und“ müssen beide Bedingungen erfüllt sein.

### Werfen eines Würfels

- Ergebnis: z. B. Augenzahl 4
- Ergebnismenge/-raum:  
 $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- Ereignis: z. B. „Die Augenzahl ist gerade.“  
 $E = \{2; 4; 6\}$
- Wahrscheinlichkeit:

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Beispiel



- Verknüpfung „oder“:

z. B. „Die Augenzahl ist gerade **oder** eine Primzahl.“

$$E = \{2; 3; 4; 5; 6\}; P(E) = \frac{5}{6}$$

- Verknüpfung „und“:

z. B. „Die Augenzahl ist gerade **und** eine Primzahl.“

$$E = \{2\}; P(E) = \frac{1}{6}$$

## 2 Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

Wiederholt man einen Zufallsversuch mehrmals, so nennt man die Anzahl der Versuche, bei denen ein bestimmtes Ergebnis auftritt, die **absolute Häufigkeit** dieses Ergebnisses. Berechnet man den Quotienten aus der absoluten Häufigkeit des Ergebnisses und der Gesamtzahl der Zufallsversuche, so heißt dieser Quotient **relative Häufigkeit** des Ergebnisses.

Wird ein Zufallsversuch sehr oft wiederholt, so nähert sich die relative Häufigkeit eines Ergebnisses der Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses an. Damit kann die Wahrscheinlichkeit näherungsweise durch die relative Häufigkeit bei einer langen Versuchsreihe bestimmt werden.

### Gesetz der großen Zahlen

Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses stabilisiert sich mit steigender Anzahl von Versuchen um einen festen Wert.

#### Beispiel

Eine Münze wurde 200-mal geworfen. Nach jeweils 20 Würfen wurden die relativen Häufigkeiten für die Ergebnisse „Kopf“ und „Zahl“ bestimmt.

Würfe	Anzahl		Absolute Häufigkeit		Relative Häufigkeit	
	Kopf	Zahl	Kopf	Zahl	Kopf	Zahl
1 – 20	13	7	13	7	0,650	0,350
21 – 40	10	10	23	17	0,575	0,425
41 – 60	8	12	31	29	0,517	0,483

Würfe	Anzahl		Absolute Häufigkeit		Relative Häufigkeit	
	Kopf	Zahl	Kopf	Zahl	Kopf	Zahl
61 – 80	8	12	39	41	0,488	0,513
81 – 100	7	13	46	54	0,460	0,540
101 – 120	15	5	61	59	0,508	0,492
121 – 140	9	11	70	70	0,500	0,500
141 – 160	11	9	81	79	0,506	0,494
161 – 180	8	12	89	91	0,494	0,506
181 – 200	10	12	99	101	0,495	0,505

Mit wachsender Wurfanzahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit für „Kopf“ und „Zahl“ jeweils um den Wert 0,5.

### 3 Mehrstufige Zufallsversuche

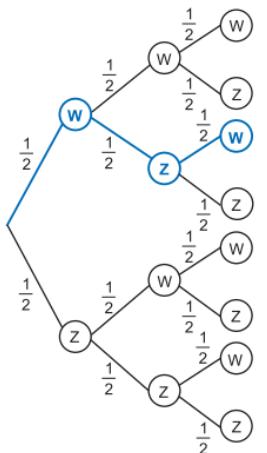
Wird ein Zufallsversuch mehrfach durchgeführt, spricht man von einem **mehrstufigen** (zweistufigen, dreistufigen, ...) **Zufallsversuch**. Die Ergebnisse lassen sich in einem **Baumdiagramm** darstellen. Dabei kann ein **Ergebnis als Pfad** veranschaulicht werden.



Eine Münze wird dreimal nacheinander geworfen. Beim Werfen der Münze gibt es bei jedem Wurf die beiden Möglichkeiten Zahl (Z) oder Wappen (W).

Die Wahrscheinlichkeit für W oder Z ist  $\frac{1}{2}$ ; sie wird jeweils neben die einzelnen Äste des Baumdiagramms geschrieben. Der zum Ergebnis (WZW) gehörende Pfad ist im Baumdiagramm hervorgehoben.

#### Beispiel



1. Wurf

2. Wurf

3. Wurf

Beim Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsversuche helfen die folgenden Pfadregeln:

### Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsversuchen

#### 1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit für ein **Ergebnis** ergibt sich aus dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten **entlang des Pfades**.

#### 2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines **Ereignisses** ist die **Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten** der günstigen Ergebnisse.

#### 3. Pfadregel (Verzweigungsregel)

Die **Summe** aller Wahrscheinlichkeiten an den Ästen, die von ein und demselben **Verzweigungspunkt** ausgehen, ist **stets 1**.

### Beispiel

Dreimaliger Münzwurf

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 3-mal hintereinander Zahl zu werfen?

*Lösung:*

$$P(ZZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis (ZZZ) beträgt  $\frac{1}{8}$ .

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1-mal Zahl zu werfen?

*Lösung:*

$$P[(WWZ); (WZW); (WZZ); (ZWW); (ZWZ); (ZZW); (ZZZ)]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „mindestens 1-mal Zahl“ beträgt  $\frac{7}{8}$ .

Man kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E auch mit Hilfe des **Gegenereignisses  $\bar{E}$**  berechnen. Für das Gegenereignis sind alle Ergebnisse günstig, die für das Ereignis ungünstig sind. Dabei gilt:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E})$$

Dreimaliger Münzwurf

Gegenereignis zum Ereignis „mindestens 1-mal Zahl“ ist „kein-mal Zahl“

*Lösung:*

$$P[(WWZ); (WZW); (WZZ); (ZWW); (ZWZ); (ZZW); (ZZZ)]$$

$$= 1 - P[(WWW)] = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

**Beispiel**

## 4 Erwartungswert

Sind den Ergebnissen eines Zufallsexperiments Zahlenwerte oder Größen zugeordnet, lässt sich mit dem Erwartungswert eine Voraussage über den zu erwartenden Durchschnittswert bei vielen Wiederholungen des Experiments treffen.

### Erwartungswert

Ist bei einem Zufallsexperiment mit n Ergebnissen jedem Ergebnis  $E_i$  ein Wert  $W_i$  zugeordnet, dann gilt für den Erwartungswert:

$$E = P(E_1) \cdot W_1 + P(E_2) \cdot W_2 + \dots + P(E_n) \cdot W_n$$

**Beispiel**

Bei einer Verlosung beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Hauptgewinn 5 %, für einen Gewinn 20 % und für eine Niete 75 %. Berechne den Erwartungswert für den Spieler, wenn gilt: Hauptgewinn: 10 €; Gewinn: 4 €; Einsatz: 2 €

*Lösung:*

$$W_{HG} = 10 \text{ €} - 2 \text{ €} = 8 \text{ €}; \quad W_G = 4 \text{ €} - 2 \text{ €} = 2 \text{ €}; \quad W_N = -2 \text{ €}$$

$$E = P(HG) \cdot W_{HG} + P(G) \cdot W_G + P(N) \cdot W_N$$

$$E = \frac{5}{100} \cdot 8 \text{ €} + \frac{20}{100} \cdot 2 \text{ €} + \frac{75}{100} \cdot (-2 \text{ €}) = -0,70 \text{ €}$$



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**