

2020

Abitur

Original-Prüfungen
mit Lösungen

Thüringen

**MEHR
ERFAHREN**

Mathematik

+ Übungsaufgaben
+ Online-Glossar

ActiveBook
• Interaktives
Training



STARK

Inhalt

Vorwort

Stichwortverzeichnis

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1	Ablauf der Prüfung	I
2	Inhalte und Schwerpunktthemen	II
3	Leistungsanforderungen und Bewertung	V
4	Operatoren	VII
5	Methodische Hinweise und allgemeine Tipps zur schriftlichen Prüfung	VIII
6	Technische Grundlagen für den Umgang mit CAS-Rechnern	IX
7	Hinweise und Warnungen für das Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern	XXVIII

Übungsaufgaben

Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Teil	Ü-1
Hinweise und Tipps	Ü-11
Lösungen	Ü-17
CAS-Übungsaufgabe 1: Analysis	Ü-29
CAS-Übungsaufgabe 2: Analysis	Ü-39
CAS-Übungsaufgabe 3: Analysis	Ü-50
CAS-Übungsaufgabe 4: Geometrie/Stochastik	Ü-60
CAS-Übungsaufgabe 5: Stochastik/Geometrie	Ü-70
CAS-Übungsaufgabe 6: Geometrie/Stochastik	Ü-80
CAS-Übungsaufgabe 7: Stochastik/Geometrie	Ü-89
CAS-Übungsaufgabe 8: Geometrie/Stochastik	Ü-98
CAS-Übungsaufgabe 9: Stochastik/Geometrie	Ü-106

Abiturprüfung 2017

Pflichtaufgaben Teil A	2017-1
Pflichtaufgaben Teil B: Analysis	2017-14
Wahlaufgaben Teil C1: Geometrie/Stochastik	2017-28
Wahlaufgaben Teil C2: Stochastik/Geometrie	2017-41

Abiturprüfung 2018

Pflichtaufgaben Teil A	2018-1
Pflichtaufgaben Teil B: Analysis	2018-14
Wahlaufgaben Teil C1: Geometrie/Stochastik	2018-27
Wahlaufgaben Teil C2: Stochastik/Geometrie	2018-39

Abiturprüfung 2019

Pflichtaufgaben Teil A	2019-1
Pflichtaufgaben Teil B: Analysis	2019-14
Wahlaufgaben Teil C1: Geometrie/Stochastik	2019-26
Wahlaufgaben Teil C2: Stochastik/Geometrie	2019-39



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.



Sitzen alle mathematischen Begriffe? Im interaktiven Training und unter www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/ finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Dr. Hubert Langlotz, Wutha-Farnroda (Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Teil und CAS-Übungsaufgaben 6 bis 9; 2017: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 5], B [Aufgabe 1] und C2; 2018: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 4], B [Aufgabe 2] und C2; 2019: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 1 bis 4], B [Teilaufgaben a bis d] und C2)

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau (Übungsaufgaben für den hilfsmittelfreien Teil und CAS-Übungsaufgaben 1 bis 5; 2017: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 6 bis 8], B [Aufgabe 2] und C1; 2018: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 5 bis 8], B [Aufgabe 1] und C1; 2019: Lösungen, Hinweise und Tipps zu Teil A [Aufgaben 5 bis 8], B [Teilaufgaben e bis h] und C1)

Vorwort

Liebe Abiturientinnen und Abiturienten,

dieses Buch hilft Ihnen, sich frühzeitig und umfassend auf die **Abiturprüfung 2020 im Kernfach Mathematik** der Oberstufe vorzubereiten. Dazu enthält es neben den **Prüfungsaufgaben der Jahre 2017 bis 2019** speziell auf die Struktur der Prüfung mit Computer-algebraSystem (CAS) abgestimmte **Übungsaufgaben** sowohl für den hilfsmittelfreien Pflichtteil wie für alle anderen Aufgaben. Wenn Sie anhand dieser Aufgaben die Prüfungssituation „durchspielen“, sollten Sie sich sowohl an der vorgegebenen Bearbeitungszeit orientieren als auch die Situation des „Auswählen-Müssens“ von bestimmten Aufgaben berücksichtigen.

Die Bildschirmausdrucke im Lösungsteil wurden mit einem TI-NspireCX CAS erstellt. Sie sind aber in den meisten Fällen jeweils in annähernd gleicher Weise mit einem anderen CAS reproduzierbar. In vielen Fällen wurde die Möglichkeit genutzt, **alternative Lösungsvorschläge** darzustellen, die zum Teil die verschiedenen Möglichkeiten des digitalen Werkzeugs aufzeigen oder aber ganz ohne Hilfsmittel auskommen.

Weiter finden Sie zusätzliche  **Hinweise und Tipps**, die zwischen den Aufgaben und Lösungen stehen und für jede Teilaufgabe ausgearbeitet sind. Diese liefern Denkanstöße zur Lösung und sind nach zunehmendem Grad der Hilfestellung geordnet. Sollten Sie bei einer Aufgabe also keinen eigenen Lösungsansatz finden, so lesen Sie zunächst den **ersten Tipp** zu der entsprechenden Teilaufgabe und verdecken die weiteren Tipps mit einem Blatt. Denken Sie über den Tipp nach und versuchen Sie nun selbst einen Ansatz zu schaffen. Sollten Sie gar nicht weiterkommen, dann lesen Sie den **nächsten Tipp** usw. Schlagen Sie in der Lösung erst nach, wenn Sie mit allen zu der Aufgabe gehörenden Tipps nicht weiterkommen. Im Lösungsteil werden zudem ausführliche  **Hinweise** gegeben, die Ihnen die vorgerechnete **Lösung erläutern und erklären**, sodass Sie die Lösung selbstständig nachvollziehen und verstehen können. Bei der Lösungsdarstellung werden teilweise auch alternative Lösungswege aufgezeigt, damit Sie Ihre angefertigte Lösung korrigieren können und um zu zeigen, dass es oft eine Vielfalt von mathematischen Lösungsansätzen gibt.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2020 vom Ministerium für Bildung, Jugend und Sport bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:

<http://www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell>

Viel Erfolg!

Ihr Autorenteam

Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung

1 Ablauf der Prüfung

Im Freistaat Thüringen gibt es im Kernfach Mathematik ein zentrales schriftliches Abitur. Die Aufgaben werden durch eine Abituraufgabenkommission erstellt, in der erfahrene Lehrerinnen und Lehrer mitarbeiten.

Aufbau der Prüfungsaufgaben bis 2016

Seit dem Thüringer Abitur 2014 durften in Mathematik *alle* Prüfungsteilnehmer ein Computeralgebra-System (CAS) benutzen. Dieses Übungsbuch enthält einige dieser Abiturprüfungen samt Lösungen und Hinweisen zu Übungszwecken. Das Abitur dieser Jahre hatte folgende Struktur:

Teil A: Das war der hilfsmittelfreie Teil. Er beinhaltete die Überprüfung von mathematischen Kompetenzen aus allen Lernbereichen (20 BE).

Teil B: Der Teil konnte mit CAS bearbeitet werden. Er diente der Lernerfolgskontrolle von mathematischen Kompetenzen aus der Analysis und beinhaltete zwei Wahlaufgaben, von denen eine zur Bearbeitung ausgewählt werden konnten (20 BE).

Teil C: Der Teil konnte ebenfalls mit CAS bearbeitet werden. Hier wurden zwei Aufgaben zur Überprüfung mathematischer Kompetenzen aus der Vektorrechnung/Analytischen Geometrie und der Stochastik zur Wahl gestellt. Die Anteile der beiden Stoffgebiete waren dabei in den zwei Wahlaufgaben unterschiedlich gewichtet (20 BE).

Aufbau der Prüfungsaufgaben seit 2017

Im Zusammenhang mit der Einführung zentraler Bildungsstandards durch die Kultusministerkonferenz wird eine Angleichung der Lehrpläne und der Abituren in allen deutschen Bundesländern angestrebt. Deshalb wurde der Mathematiklehrplan für Gymnasien auch in Thüringen etwas verändert. So enthält er z. B. nun zwei Vertiefungsthemen Geometrie und Stochastik, von denen eines im Unterricht behandelt werden soll. Diese Umstände führen zu einer Veränderung des Mathematikabits in Thüringen. Die neue Abiturprüfung hat folgende Struktur:

Teil A: hilfsmittelfreier Teil aus allen Lernbereichen (40 BE)

Teil B: Analysis (40 BE)

Teil C1: Geometrie (25 BE), Stochastik (15 BE)

Teil C2: Stochastik (25 BE), Geometrie (15 BE)

Für den Prüfungsteil A ist ein Arbeitsblatt, das die Aufgaben sowie zu vervollständigende Koordinatensysteme und Platz für die Lösungen enthält, vorgesehen. Nur die Teile B und C1 bzw. C2 können mit CAS bearbeitet werden.

Alle Prüfungsteilnehmerinnen und -teilnehmer lösen alle Aufgaben der Prüfungsteile A und B. Nur im Prüfungsteil C kann zwischen C1 und C2 gewählt werden.

Die im Zusammenhang mit dem geplanten Abituraufgabenpool der Länder veröffentlichte Aufgabensammlung für Mathematik dient als Orientierung für die Weiterentwicklung der Aufgabenformate und Anforderungen in der Abiturprüfung in Thüringen. Sie finden sie im Internet unter: <https://www.igb.hu-berlin.de/bista/abi/mathematik>

Dauer der Prüfung

Die Bearbeitungszeit beträgt 300 Minuten. Die Aufgaben aus dem Teil A sind von allen Prüfungsteilnehmern zu Beginn der Bearbeitungszeit zu lösen. Als Hilfsmittel sind nur Zeichengeräte zugelassen. Nachdem der Prüfungsteilnehmer die Lösungen für den Teil A abgegeben hat, werden die Wahlaufgaben aus den Teilen B und C mit den angegebenen Hilfsmitteln bearbeitet.

Zugelassene Hilfsmittel

In Teil A dürfen außer Zeichengeräten keine weiteren Hilfsmittel verwendet werden. In den Teilen B und C1 bzw. C2 kann die im Unterricht verwendete Formelsammlung sowie ein Taschenrechner und ein CAS verwendet werden. Dabei wird man sich an dem Gerät oder der Software orientieren, womit im vorangegangenen Unterricht gearbeitet wurde.

2 Inhalte und Schwerpunktthemen

Die verbindlichen Lehrplanvorgaben, nach denen in den vier Kurshalbjahren der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe unterrichtet wird, bestimmen die inhaltlichen Anforderungen. Außerdem wird die Binomialverteilung (Lehrplan Klasse 10) vermutlich eine größere Rolle spielen.

Unter <https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=4470> finden Sie eine ausführliche Darstellung des weiterentwickelten Lehrplans für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife im Fach Mathematik. Eine (nicht ganz vollständige) Übersicht über wichtige, abiturrelevante Kompetenzen dieses Lehrplans ist nachstehend aufgeführt.

Analysis – Sachkompetenz

Der Schüler kann

- die Ableitung einer Funktion als lokale Änderungsrate und als Differenzialquotient beschreiben, erläutern und geometrisch als Tangentenanstieg interpretieren,
- die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen aus der Auseinandersetzung heraus deuten,
- Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitungsfunktion erkennen, begründen und darstellen,
- Ableitungen für Funktionen ermitteln,
- die Faktor-, Summen-, Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen in einfachen Fällen ohne Hilfsmittel anwenden,
- Eigenschaften der Funktionen $f(x) = e^x$ und $f(x) = \ln x$ angeben,
- die \ln -Funktion als Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$ und als Umkehrfunktion der e -Funktion nutzen,
- grundlegende Begriffe zur Beschreibung von Potenzfunktionen, ganzrationalen, gebrochenrationalen, e -, \ln - und Sinusfunktionen (Definitions- und Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Symmetrie bezüglich der y -Achse und des Koordinatenursprungs, Monotonie, Extrem- und Wendepunkte, Periodizität, Grenzwert, Asymptoten, Stetigkeit, Polstelle, Lücke) anschaulich erläutern und anwenden,
- Monotonieverhalten, Extrem- und Wendepunkte mithilfe von Ableitungen bestimmen,

Kernfach Mathematik (Thüringen): Abiturprüfung 2017
Wahlaufgabe C2: Schwerpunkt Stochastik

1. In einer Zeitschrift wurde veröffentlicht, dass in Thüringen 36,30 % der Prüflinge die Führerscheinprüfung nicht bestehen.

Nach: www.autobild.de (16. 11. 2016)

In Thüringen melden sich 50 Teilnehmer eines Fahrschulkurses zur Prüfung an.

Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung voraussichtlich nicht bestehen werden.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: = „Genau 30 Teilnehmer werden die Prüfung voraussichtlich bestehen.“

B: = „Mindestens 30 Teilnehmer werden die Prüfung voraussichtlich bestehen.“

(4 BE)

- b) Die Anzahl der Teilnehmer, die die Prüfung nicht bestehen, weicht höchstens um die Standardabweichung vom Erwartungswert ab.

Ermitteln Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeit.

(4 BE)

Die Inhaberin einer Fahrschule ist sich sicher, dass die Durchfallquote ihrer Fahrschule niedriger als $p_0 = 36,30\%$ (H_0) ist. Dazu überprüft sie die Ergebnisse der letzten 100 Prüflinge. Sind darunter höchstens 30 Teilnehmer, die die Prüfung nicht bestanden haben, will sie davon ausgehen, dass in ihrer Fahrschule die Durchfallquote niedriger ist (H_1 : $p_1 < 36,30\%$).

- c) Berechnen Sie den Fehler 1. Art. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Fehlers im Sachzusammenhang.

(3 BE)

- d) Berechnen Sie den Fehler 2. Art für den Fall $p_1 = 25\%$.

Untersuchen Sie die Entwicklung dieses Fehlers, wenn sich der Wert von p_1 dem Wert von p_0 nähert.

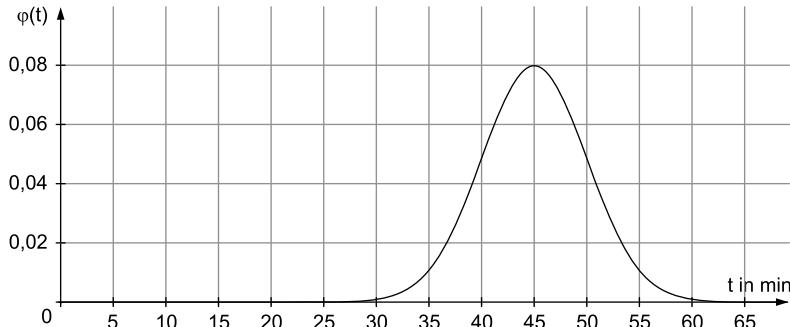
(4 BE)

- e) Formulieren Sie eine neue Entscheidungsregel so, dass der Fehler 1. Art höchstens 5 % beträgt.

(4 BE)

Es wird angenommen, dass die vom Teilnehmer benötigte Prüfungszeit normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 45$ Minuten und der Standardabweichung $\sigma = 5$ Minuten ist.

- f) Dargestellt ist der Graph der entsprechenden Dichtefunktion.



Der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion für $t \leq 40$ Minuten beträgt etwa 0,16 Flächeneinheiten.

Interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

(2 BE)

- g) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

C: = „Ein zufällig ausgewählter Prüfling benötigt genau 45 Minuten.“

D: = „Ein zufällig ausgewählter Prüfling benötigt höchstens 35 Minuten.“

(4 BE)

2. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $L(-1 | 0 | 3)$ und $M_k(k | k | k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben. Alle Punkte M_k liegen auf einer Geraden g.

- a) Ermitteln Sie alle Werte von k so, dass der Abstand der Punkte L und M_k 5 Längeneinheiten beträgt.

(3 BE)

- b) Bestimmen Sie k so, dass L und M_k den minimalen Abstand besitzen. Geben Sie diesen Abstand an.

(5 BE)

- c) Berechnen Sie die Größe des Schnittwinkels von g mit der xy-Ebene.

(3 BE)

- d) Der Punkt L wird an der Geraden g gespiegelt.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Bildpunktes L'.

(4 BE)

(40 BE)

Hinweise und Tipps

Aufgabe 1a

Wahrscheinlichkeiten berechnen

- ◆ Überlegen Sie, ob die in der Angabe beschriebene Zufallsgröße X hier von Nutzen ist. Definieren Sie ggf. eine weitere Zufallsgröße.
- ◆ Entnehmen Sie dem Text die Anzahl der Versuche n sowie die Trefferwahrscheinlichkeit p .
- ◆ Beachten Sie den Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten für das Bestehen und das Nichtbestehen der Fahrschulprüfung.
- ◆ Nutzen Sie die Befehle, die das CAS bietet.

Aufgabe 1b

Wahrscheinlichkeit berechnen

- ◆ Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ für die binomialverteilte Zufallsgröße X.
- ◆ Bestimmen Sie die untere Grenze u und die obere Grenze o des gesuchten Intervalls, um $P(u \leq X \leq o)$ zu berechnen.
- ◆ Berücksichtigen Sie, dass die Grenzen ganze Zahlen sind.
- ◆ *Variante:* Nutzen Sie zur Beantwortung der Frage die Sigma-Regeln. Begründen Sie zunächst, warum diese angewendet werden dürfen.

Aufgabe 1c

Berechnung des Fehlers 1. Art

- ◆ Notieren Sie die beiden Hypothesen, den Umfang der Stichprobe und die Entscheidungsregel.
- ◆ Der Fehler 1. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese verworfen wird, obwohl sie richtig ist.
- ◆ Beachten Sie, dass es sich um einen linksseitigen Test handelt und somit $P(X \leq g)$ berechnet werden muss.

Bedeutung des Fehlers 1. Art

- ◆ Stellen Sie die Aussage der Nullhypothese der Schlussfolgerung aus dem Stichprobenergebnis gegenüber.

Aufgabe 1d

Fehler 2. Art

- ◆ Ein Fehler 2. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese aufgrund des Stichprobenergebnisses akzeptiert wird, obwohl sie falsch ist, also die Alternativhypothese zutrifft.
- ◆ Verwenden Sie zur Berechnung des Fehlers 2. Art den Nichtverwerfungsbereich der Nullhypothese und die gegebene Wahrscheinlichkeit $p_1 = 25\%$.
- ◆ Verwenden Sie mindestens 3 unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten p_i mit $p_1 < p_i < p_0$ für die Durchfallquote, um die *Entwicklung des Fehlers 2. Art* beurteilen zu können.

Aufgabe 1e

Neue Entscheidungsregel

- ◆ Es ist üblich, hier die größte ganze Zahl g anzugeben, für die gilt: $P(X \leq g) \leq 0,05$
- ◆ Ermitteln Sie die Lösung durch systematisches Probieren mithilfe Ihres CAS-Rechners. (*Variante:* Nutzen Sie den `invBinom()`-Befehl Ihres CAS.)

- ↗ Zur Entscheidungsregel gehören die Null- und die Gegenhypothese, Annahme- und Verwerfungsbereich sowie der Stichprobenumfang.

Aufgabe 1f

Normalverteilung

- ↗ Markieren Sie den beschriebenen Bereich im Diagramm und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

Aufgabe 1g

Wahrscheinlichkeiten berechnen

- ↗ Nutzen Sie zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeiten die Befehle des CAS-Rechners. Beachten Sie dabei die Reihenfolge der Parameter für den jeweiligen Befehl.
↗ Berücksichtigen Sie, dass für stetige Zufallsgrößen Wahrscheinlichkeiten nur für Intervalle berechnet werden können. Wählen Sie für $P(C)$ und $P(D)$ sinnvolle Intervalle.

Aufgabe 2a

Werte von k

- ↗ Der Abstand von Punkt L zu Punkt M_k entspricht dem Betrag eines Vektors $\overrightarrow{LM_k}$. Nutzen Sie zur Berechnung des Abstandes den entsprechenden Befehl des CAS-Rechners oder wenden Sie den (dreidimensionalen) Satz des Pythagoras an.

Aufgabe 2b

Minimaler Abstand

- ↗ Stellen Sie für den Abstand $|\overrightarrow{LM_k}|$ einen Funktionsterm $d(k)$ auf, verwenden Sie ggf. den Term aus Teilaufgabe a.
↗ Da der minimale Abstand gesucht ist, kann man $d(k)$ auf lokale Extremstellen untersuchen.
↗ Berechnen Sie den minimalen Abstand, indem Sie den gefundenen Wert in $d(k)$ einsetzen.
↗ *Variante:* Benutzen Sie den CAS-Befehl $fMin$.

Aufgabe 2c

Schnittwinkel

- ↗ Um den Schnittwinkel zwischen der Geraden und der xy -Ebene zu berechnen, benötigt man einen Richtungsvektor \vec{a} der Geraden g und einen Normalenvektor \vec{n} der xy -Ebene.

- ↗ Der gesuchte Winkel ergibt sich aus $\sin \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$.

Variante (Schnittwinkel)

- ↗ Da der Schnittwinkel der Geraden g mit der xy -Ebene gesucht ist, kann man ein Dreieck bestimmen, welches sich aus einem Richtungsvektor von g und der Projektion dieses Vektors in die xy -Ebene aufbaut.
↗ Der gesuchte Winkel kann elementargeometrisch mithilfe trigonometrischer Funktionen bestimmt werden.

Aufgabe 2d

Geradenspiegelung

- ↗ Berechnen Sie zunächst die Koordinaten des Fußpunktes F des Lotes auf g durch L .
↗ Überlegen Sie, wie das Ergebnis aus Teilaufgabe b dazu benutzt werden kann.
↗ Die Koordinaten des Punktes L' erhält man dann mit $\overrightarrow{OL}' = \overrightarrow{OL} + 2 \cdot \overrightarrow{LF}$.

Lösungen

1. a) Wahrscheinlichkeiten berechnen

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung voraussichtlich **nicht** bestehen werden. X ist binomialverteilt mit $n=50$ und $p=0,363$.

Es kann eine weitere Zufallsgröße definiert werden:

Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Prüfungsteilnehmer, die die Prüfung voraussichtlich bestehen werden. Y ist binomialverteilt mit $n=50$ und $q=1-p=1-0,363=0,637$.

Für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B ergibt sich dann:

$$P(A) = P(Y = 30)$$

$$= B_{50; 0,637}(Y = 30) \approx \underline{\underline{0,0990}}$$

$$P(B) = P(Y \geq 30)$$

$$= B_{50; 0,637}(Y \geq 30) \approx \underline{\underline{0,7573}}$$



b) Wahrscheinlichkeit berechnen

Der Erwartungswert der Zufallsgröße X ist:

$$E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,363 = 18,15$$

Die Standardabweichung beträgt:

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0,363 \cdot 0,637} \approx 3,4$$

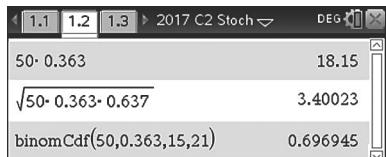
Das gesuchte Intervall berechnet sich mit

$$18,15 - 3,4 = 14,75 \text{ und } 18,15 + 3,4 = 21,55.$$

Da X ganzzahlig sein muss, ergibt sich das Intervall [15; 21].

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(C) = P(15 \leq X \leq 21) = B_{50; 0,363}(15 \leq X \leq 21) \approx \underline{\underline{0,6969}}$$



Variante: Nutzung der Sigma-Regel

Da die Laplace-Bedingung $\sigma \approx 3,4 > 3$ erfüllt ist, kann die Sigma-Regel für die einfache Sigma-Umgebung genutzt werden:

68,3 % der Werte von X liegen im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$.

c) Berechnung des Fehlers 1. Art

Die Inhaberin der Fahrschule führt einen linksseitigen Signifikanztest mit der Nullhypothese $H_0: p = 0,363$ (auch $p \geq 0,363$ ist möglich) und der Alternativhypothese $H_1: p < 0,363$ durch. Der Umfang der Stichprobe ist $n = 100$. Der Bereich, in dem sie die Nullhypothese verwerfen will, ist angegeben durch $V = \{0; 1; \dots; 30\}$.

Der Fehler 1. Art (α -Fehler) besteht darin, die Nullhypothese zu verwerfen, obwohl sie in Wirklichkeit stimmt.

$$\alpha = B_{100; 0,363}(\{0; 1; \dots; 30\}) \approx \underline{\underline{0,1129}}$$



Bedeutung des Fehlers 1. Art

Da man bei gültiger Nullhypothese und einem zufälligen Stichprobenergebnis im Verwerfungsbereich die wahre Nullhypothese verwirft, würde man im gegebenen Sachzusammenhang irrtümlich davon ausgehen, dass in dieser Fahrschule die Durchfallquote niedriger als in Thüringen ist, obwohl sie tatsächlich genauso hoch wie in Thüringen ist.

d) **Fehler 2. Art**

Wenn die Nullhypothese akzeptiert wird, obwohl sie falsch ist, spricht man vom Fehler 2. Art oder β -Fehler. Im vorliegenden Fall heißt dies, dass zufällige Ergebnisse der untersuchten Stichprobe liegen im Intervall $\bar{V} = \{31; 32; \dots; 100\}$, \bar{V} ist der Nichtverwerfungsbereich der Nullhypothese.

Mit dem gegebenen Wert $p_1 = 0,25$ erhält man:

$$\beta = B_{100; 0,25}(\{31; 32; \dots; 100\}) \approx \underline{\underline{0,1038}}$$

Entwicklung des Fehlers 2. Art

Anhand von mehreren Beispielen, die schnell mithilfe des CAS-Rechner berechnet werden können, erkennt man sofort, dass sich der β -Fehler vergrößert, je näher man von „links“ mit p_1 an p_0 heranrückt.

	1.2	1.3	1.4	2017 C2 Stoch	DEG	W
binomCdf(100,0,25,31,100)				0.103787		
binomCdf(100,0,3,31,100)				0.450876		
binomCdf(100,0,35,31,100)				0.826981		
binomCdf(100,0,36,31,100)				0.874809		

e) **Neue Entscheidungsregel**

Damit der Fehler 1. Art höchstens 5 % beträgt, muss beim linksseitigen Test der Verwerfungsbereich $V = \{0; 1; \dots; k\}$ so gewählt werden, dass gilt:

$$P(X \leq k) = B_{100; 0,363}(\{0; 1; \dots; k\}) \leq 0,05$$

Die gesuchte Grenze k können Sie durch systematisches Probieren finden:

$$P(X \leq 26) = B_{100; 0,363}(\{0; 1; \dots; 26\}) \\ \approx 0,0189$$

$$P(X \leq 27) = B_{100; 0,363}(\{0; 1; \dots; 27\}) \\ \approx 0,0316$$

$$P(X \leq 28) = B_{100; 0,363}(\{0; 1; \dots; 28\}) \\ \approx 0,0504$$

Es ergibt sich $k = 27$.

Variante:

Die Grenze des Verwerfungsbereichs kann auch direkt mit dem `invBinom()`-Befehl berechnet werden.

	1.3	1.4	1.5	2017 C2 Stoch	DEG	W
binomCdf(100,0,363,0,26)				0.018947		
binomCdf(100,0,363,0,27)				0.031605		
binomCdf(100,0,363,0,28)				0.05041		
invBinom(0,05,100,0,363,1)						
				$\begin{bmatrix} 27 & 0.031605 \\ 28 & 0.05041 \end{bmatrix}$		

Die neue Entscheidungsregel lautet damit:

Sind unter den 100 Prüflingen höchstens 27 Teilnehmer, die die Prüfung nicht bestanden haben, so kann die Inhaberin darauf schließen, dass in ihrer Fahrschule die Durchfallquote niedriger als 36,3 % ist. Andernfalls sieht sie die Durchfallquote von 36,3 % als bestätigt an.

Hinweis:

Es ist auch eine Ermittlung der neuen Entscheidungsregel unter Verwendung der Sigma-Regeln denkbar.

Mit $\mu = 100 \cdot 0,363 = 36,3$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,363 \cdot 0,637} \approx 4,8$ (damit ist auch die Laplace-Bedingung erfüllt) ergibt sich für die Berechnung der Intervallgrenze: $36,3 - 1,64 \cdot 4,8 \approx 28,4$

Die neue Entscheidungsregel würde somit lauten:

Sind unter den 100 überprüften Prüflingen höchstens 28 Teilnehmer, die die Prüfung nicht bestanden haben, so sollte die Inhaberin darauf schließen, dass in ihrer Fahrschule die Durchfallquote niedriger als 36,3 % ist. Andernfalls kann sie eine Durchfallquote von 36,3 % nicht verwerfen.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK