



**MEHR
ERFAHREN**

TRAINING

Realschule

Mathematik 8. Klasse

Wahlpflichtfächergruppe I und II/III

STARK

Inhalt

Vorwort

Terme	1
1. Termbelegung	1
2. Äquivalente Terme	3
3. Addition und Subtraktion von Summentermen	11
4. Multiplikation und Division von Summentermen	14
5. Faktorisieren oder Ausklammern	20
 Aussageformen mit einer Variablen	 25
1. Äquivalenzumformungen für Gleichungen	25
2. Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen	34
3. Textaufgaben	37
4. Gleichungen mit Formvariablen	40
 Binomische Formeln	 45
1. Die drei binomischen Formeln	45
2. Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln	52
3. Die quadratische Ergänzung	57
4. Faktorisieren mit Hilfe der quadratischen Ergänzung	60
5. Extremwerte quadratischer Terme	63

(Fortsetzung nächste Seite)

Verknüpfungen	73
1. Die UND-Verknüpfung	73
2. Doppelungleichung	76
3. Die ODER-Verknüpfung	78
4. Anwendungen	81
Bruchterme	91
1. Die Definitionsmenge eines Bruchterms	92
2. Erweitern und Kürzen von Bruchtermen	95
3. Addition und Subtraktion von Bruchtermen	106
4. Multiplikation und Division von Bruchtermen	111
Bruchgleichungen und Bruchungleichungen	115
1. Bruchgleichungen	115
2. Bruchungleichungen	121
Rechnen mit Vektoren	125
1. Ortsvektor – Gegenvektor	126
2. Pfeilvergleich	128
3. Mittelpunkt einer Strecke	131
4. Vektoraddition	132
Lösungen	137

Vorwort

Liebe Schülerin,
lieber Schüler,

dieser Trainingsband richtet sich an Schülerinnen und Schüler der 8. Jahrgangsstufe (Wahlpflichtfächergruppe I und II/III), die außerhalb des Unterrichts üben und Lücken schließen möchten oder sich gezielt auf Schulaufgaben vorbereiten wollen.

Diese Verwendungsform spiegelt sich auch im Aufbau der einzelnen Kapitel wider. Jedes der sieben Kapitel ist in drei Abschnitte unterteilt, die zuerst eine **Definition** und einen **Merksatz** beinhalten und danach die Bedeutung des Merksatzes an **Beispielen** mit ausführlichen Erläuterungen illustrieren. Das zuvor Gelernte kann dann an insgesamt **233 Aufgaben**, die vom Schwierigkeitsgrad her ansteigen, eingeübt werden. Selbstverständlich befinden sich am Ende des Buches zu allen Aufgaben **vollständige Lösungen**.

Viel Spaß und Erfolg bei der Arbeit mit diesem Band!



Kurt Hofmann

2 Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Vertauscht man bei den binomischen Formeln Linksterm (LT) und Rechtsterm (RT), wird eine algebraische Summe in ein Produkt (Quadrat) verwandelt.

$$1. \text{ und } 2. \text{ binomische Formel: } a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Am Plus- bzw. Minuszeichen siehst du, ob es sich um die 1. oder 2. binomische Formel handelt.

Zwei Bedingungen müssen erfüllt sein, damit eine algebraische Summe aus drei Gliedern in ein Quadrat umgeformt werden kann:

Bedingung 1: Das 1. und 3. Glied des Terms müssen ein Quadrat sein: a^2 und b^2

Bedingung 2: Das 2. Glied muss das doppelte Produkt aus a und b sein.

Beispiel:

$$T = a^2 + 8ab + 16b^2$$

Bedingung 1:

Das 1. Glied ist ein Quadrat: a^2

Das 3. Glied $16b^2$ kann als Quadrat geschrieben werden: $16b^2 = (4b)^2$

Bedingung 2:

Für das 3. Glied muss gelten:

$$2 \cdot a \cdot 4b = 8ab \quad (w)$$

Das ist eine wahre Aussage. Deshalb lässt sich die Summe mit Hilfe der 1. binomischen Formel in ein Produkt verwandeln.

$$T = (a + 4b)^2$$

Beispiel:

$$T = 4x^2 + 30xy + 25y^2$$

Bedingung 1:

$4x^2 = (2x)^2$ und $25y^2 = (5y)^2$ sind Quadrate.

Bedingung 2:

$$2 \cdot 2x \cdot 5y = 20xy \neq 30xy$$

Die 2. Bedingung ist nicht erfüllt.

Der Term kann nicht mit Hilfe der binomischen Formeln faktorisiert werden.

Beispiel:

$$T = 5a^2 + 10ab + 16b^2$$

Bedingung 1:
 $5a^2$ ist kein Quadrat.

Dieser Term kann nicht in einen quadratischen Term umgeformt werden.

Aufgaben:

97. a) $a^2 + 2a + 1$

c) $x^2 + 18x + 81$

e) $4z^2 + 1,2z + 0,09$

98. a) $a^2 - 24a + 144$

c) $c^2 - 1,4c + 0,49$

e) $0,16f^2 - 0,48fg + 0,36g^2$

b) $a^2 + 4a + 4$

d) $1 + c + \frac{1}{4}c^2$

f) $\frac{4}{9}c^2 + cd + \frac{9}{16}d^2$

b) $36 - 12b + b^2$

d) $36d^2 - 12dc + c^2$

f) $\frac{4}{9}x^4 - x^2y + \frac{9}{16}y^2$

Vertauscht man Linksterm und Rechtsterm bei der 3. binomischen Formel, wird eine Differenz in ein Produkt umgeformt.

3. binomische Formel: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Eine Bedingung muss erfüllt sein, damit eine Differenz in ein Produkt umgeformt werden kann:

Bedingung: Die beiden Glieder der Differenz müssen Quadrate sein.

Beispiel:

$$T = 0,49a^2 - 1,44b^2$$

Bedingung:
 $0,49a^2 = (0,7a)^2$;
 $1,44b^2 = (1,2b)^2$
 Beide Glieder können als Quadrate geschrieben werden. Deshalb lässt sich die Differenz mit Hilfe der 3. binomischen Formel in ein Produkt verwandeln.

$$T = (0,7a + 1,2b)(0,7a - 1,2b)$$

Beispiel:

$$T = 81x^4 - 25z^3$$

$25z^3$ kann nicht als Quadrat geschrieben werden.

Der Term kann nicht faktorisiert werden.

Beispiel:

$$T = 36x^2 + 49$$

Beachte: Dieser Term ist keine Differenz.

Der Term kann nicht faktorisiert werden.

Aufgabe:

99. a) $a^2 - 9$

b) $1,69 - b^2$

c) $1 - 0,36x^2$

d) $1,44 - 1,21y^2$

e) $y^2 - 0,01x^2$

f) $2,25v^2 - 3,24w^2$

g) $4x^4 - 25y^2$

h) $81x^4 - 16y^4$

Zusammenfassende Aufgaben

Beachte: Um eine algebraische Summe zu faktorisieren, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Ausklammern
2. Teilweises Ausklammern
3. Faktorisieren mit Hilfe der binomischen Formeln

Hinweis: Es ist vorteilhaft, wenn du dich an diese Reihenfolge hältst.

Beispiel:

$$T = 50a^2b - 40ab^2 + 8b^3$$

Du kannst $2b$ ausklammern.

$$T = 2b(25a^2 - 20ab + 4b^2)$$

Der Term in der Klammer lässt sich mit Hilfe der 2. binomischen Formel faktorisieren.

$$T = 2b(5a - 2b)^2$$

Beispiel:

$$T = 3 - 48z^2$$

3 ausklammern

$$T = 3(1 - 16z^2)$$

3. binomische Formel anwenden

$$T = 3(1 + 4z)(1 - 4z)$$

Beispiel:

Forme den Term $(a + 5)^2 - 9$ in ein Produkt um.

$$T = (a + 5)^2 - 9$$

Beachte die Aufgabenstellung:

Das Ausmultiplizieren der Klammer wäre der falsche Weg, da eine Summe entstehen würde. Lösungsidee: Wende die 3. binomische Formel an!

$$T = (a + 5)^2 - 3^2$$

Setze eine eckige Klammer.

$$T = [(a + 5) + 3] \cdot [(a + 5) - 3]$$

Löse die inneren Klammern auf, fasse zusammen und schreibe für die eckigen runde Klammern.

$$T = [a + 5 + 3] \cdot [a + 5 - 3]$$

$$T = (a + 8)(a + 2)$$

Beispiel:

Suche die Belegung für $\square$, $\bigcirc$ und Δ , sodass eine wahre Aussage entsteht.

$$16a^2 - 40ac + \square = (\bigcirc - \Delta)^2$$

Es gilt:

$$16a^2 = (4a)^2$$

$$\text{also: } \bigcirc = 4a$$

$$40ac = 2 \cdot \bigcirc \cdot \Delta$$

$$= 2 \cdot 4a \cdot \Delta$$

$$= 8 \cdot a \cdot \Delta$$

$$\text{also: } \Delta = 5c$$

$$\square = \Delta^2$$

$$\square = (5c)^2$$

$$\text{also: } \square = 25c^2$$

$$16a^2 - 40ac + 25c^2 = (4a - 5c)^2$$

Aufgaben:

100. Schreibe – wenn möglich – als Produkt.

a) $25 + 10a + a^2$

b) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

c) $a^4 - 2a^2b + b^2$

d) $9x^2 + 70xy^2 + 100y^4$

e) $18a^2 - 8b^2$

f) $20c^2 + 40cd + 20d^2$

g) $-x^2 + 2xy - y^2$

h) $-3x^2 - 15xy - 75y^2$

i) $8a^6 - 32b^4$

k) $0,25x^2y^2 - 5xyz + 25z^2$

l) $0,04a^4 - 0,4a^2bc + b^2c^2$

m) $12abc^2 - 36abcd + 27abd^2$

n) $4x^2 + x + \frac{1}{9}$

o) $169a^2 - 52abc + 4b^2c^2$

p) $3x^2 + 27y^2$

q) $\frac{3}{4}xy^2 + \frac{3}{5}xyz + \frac{3}{25}xy^2$

101. Schreibe als Produkt.

a) $(a + 1)^2 - 4$

b) $(a + 1)^2 - (a - 2)^2$

c) $(3x + 1)^2 - x^2$

d) $9 - (3a - 7)^2$

e) $(2a + 1)^2 - (3a - 2)^2$

f) $(4x + y)^2 - (x + 4y)^2$

102. Ergänze, dass eine wahre Aussage entsteht.

a) $25x^2 - 10x + \square = (\bigcirc - \Delta)^2$

b) $\square + 40ab + \bigcirc = (4a + \Delta)^2$

c) $81 + \square + 16y^2 = (\bigcirc + \Delta)^2$

d) $\square + 12ab^2 + \bigcirc = (\Delta + 9b^2)^2$

e) $\square - \bigcirc + \Delta = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2$

f) $\square - 144y^4 = (5x + \bigcirc)(5x - \bigcirc)$

- 99.** a) $a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$
 b) $1,69 - b^2 = (1,3 + b)(1,3 - b)$
 c) $1 - 0,36x^2 = (1 + 0,6x)(1 - 0,6x)$
 d) $1,44 - 1,21y^2 = (1,2 + 1,1y)(1,2 - 1,1y)$
 e) $y^2 - 0,01x^2 = (y - 0,1x)(y + 0,1x)$
 f) $2,25v^2 - 3,24w^2 = (1,5v + 1,8w)(1,5v - 1,8w)$
 g) $4x^4 - 25y^2 = (2x^2 + 5y)(2x^2 - 5y)$
 h) $81x^4 - 16y^4 = (9x^2 + 4y^2)(9x^2 - 4y^2) = (9x^2 + 4y^2)(3x + 2)(3x - 2y)$
- 100.** a) $25 + 10a + a^2 = (5 + a)^2$
 b) $9x^2 - 12xy + 4y^2 = (3x - 2y)^2$
 c) $a^4 - 2a^2b + b^2 = (a^2 - b)^2$
 d) $9x^2 + 70xy^2 + 100y^4$ nicht faktorisierbar!
 e) $18a^2 - 8b^2 = 2 \cdot (9a^2 - 4b^2) = 2(3a + 2b)(3a - 2b)$
 f) $20c^2 + 40cd + 20d^2 = 20(c^2 + 2cd + d^2) = 20 \cdot (c + d)^2$
 g) $-x^2 + 2xy - y^2 = -(x^2 - 2xy + y^2) = -(x - y)^2$
 h) $-3x^2 - 15xy - 75y^2 = -3(x^2 + 5xy + 25y^2)$
 i) $8a^6 - 32b^4 = 8(a^6 - 4b^4) = 8(a^3 + 2b^2)(a^3 - 2b^2)$
 k) $0,25x^2y^2 - 5xyz + 25z^2 = 25(0,01x^2y^2 - 0,2xyz + z^2) = 25(0,1xy - z)^2$
 l) $0,04a^4 - 0,4a^2bc + b^2c^2 = (0,2a^2 - bc)^2$
 m) $12abc^2 - 36abcd + 27abd^2 = 3ab(4c^2 - 12cd + 9d^2) = 3ab(2c - 3d)^2$
 n) $4x^2 + x + \frac{1}{9}$ nicht faktorisierbar!
 o) $169a^2 - 52abc + 4b^2c^2 = (13a - 2bc)^2$
 p) $3x^2 + 27y^2 = 3(x^2 + 9y^2)$
 q) $\frac{3}{4}xy^2 + \frac{3}{5}xyz + \frac{3}{25}xy^2 = 3xy\left(\frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z + \frac{1}{25}y\right)$

- 101.** a) $(a+1)^2 - 4 = (a+1+2)(a+1-2) = (a+3)(a-1)$
 b) $(a+1)^2 - (a-2)^2 = [a+1+(a-2)] \cdot [a+1-(a-2)]$
 $= [a+1+a-2] \cdot [a+1-a+2] = (2a-1) \cdot 3$
 c) $(3x+1)^2 - x^2 = (3x+1+x)(3x+1-x) = (4x+1)(2x+1)$
 d) $9 - (3a-7)^2 = [3+(3a-7)] \cdot [3-(3a-7)] = [3+3a-7] \cdot [3-3a+7]$
 $= (3a-4)(10-3a)$
 e) $(2a+1)^2 - (3a-2)^2 = [2a+1+(3a-2)] \cdot [2a+1-(3a-2)]$
 $= [2a+1+3a-2] \cdot [2a+1-3a+2]$
 $= (5a-1)(3-a)$
 f) $(4x+y)^2 - (x+4y)^2 = [4x+y+(x+4y)] \cdot [4x+y-(x+4y)]$
 $= [4x+y+x+4y] \cdot [4x+y-x-4y]$
 $= (5x+5y) \cdot (3x-3y) = 5(x+y) \cdot 3(x-y)$
 $= 15 \cdot (x+y)(x-y)$
- 102.** a) $25x^2 - 10x + 1 = (5x-1)^2$
 b) $16a^2 + 40ab + 25b^2 = (4a+5b)^2$
 c) $81 + 72y + 16y^2 = (9+4y)^2$
 d) $\frac{4}{9}a^2 + 12ab^2 + 81b^4 = \left(\frac{2}{3}a + 9b^2\right)^2$
 e) $1 - x + \frac{1}{4}x^2 = \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2$
 f) $25x^2 - 144y^4 = (5x+12y^2)(5x-12y^2)$
- 103.** a) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
 b) $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$
 c) $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$
 d) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$
 e) $\frac{25}{4} + 5y + y^2 = \left(\frac{5}{2} + y\right)^2$
 f) $\frac{121}{4} - 11a + a^2 = \left(\frac{11}{2} - a\right)^2$
 g) $b^2 - 2,2b + 1,21 = (b-1,1)^2$
 h) $c^2 + 1,4cd + 0,49d^2 = (c+0,7d)^2$



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK