GYMNASIUM

STARK in KLASSENARBEITEN

Rechenregeln und Rechengesetze

Werner Wirth

STARK

Inhaltsverzeichnis

Fortsetzung nächste Seite

Auf einen Blick!

Inhaltsverzeichnis

Autor: Werner Wirth

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

während deiner **gesamten schulischen Laufbahn** lernst du viele Rechenregeln und Rechengesetze kennen. Diese Regeln sind die wichtigsten Hilfsmittel der Mathematik und liefern dir eine Systematik zum Lösen von Rechenaufgaben. Nur wenn du sie sicher beherrschst, wirst du auch schwierige Aufgaben gut bewältigen können. Zudem wirst du sie immer wieder direkt oder auch indirekt zum Bestehen deiner **Klassenarbeiten** benötigen. Daher ist es sehr wichtig, dass du wirklich sicher im Umgang mit den Rechenregeln und Rechengesetzen bist.

Das vorliegende Buch hilft dir, die wichtigsten Rechenregeln und Rechengesetze deiner Schullaufbahn zu **trainieren** und dein bereits bestehendes Wissen zu **testen**.

- Jede Rechenregel wird mit übersichtlichen **Schritt-für-Schritt-Erklärungen** eingeführt, sodass du sie wirklich verstehen und auch anwenden kannst.
- Zahlreiche **Aufgaben** helfen dir dabei, den neu gelernten Stoff einzuüben.
- Mithilfe von **Tests** kannst du bei jedem Kapitel selbstständig deinen aktuellen Leistungsstand abprüfen.
- Ausführliche **Lösungsvorschläge** ermöglichen es dir, deine Rechenwege selbst zu kontrollieren und gegebenenfalls selbst zu verbessern.

Du wirst sehen, wenn du parallel zum Unterricht mit diesem Buch arbeitest, wird sich dein Einsatz sicher auch bald schon positiv auf dein Abschneiden in Tests und Klassenarbeiten auswirken, sodass du dir beruhigt sagen kannst: Ich bin **stark in Klassenarbeiten**!

Viel Spaß beim Üben und viel Erfolg bei deinen Klassenarbeiten wünscht dir

Werner Wirth

Werner Wirth

Auf einen Blick!

4 Die binomischen Formeln

Wenn du beim Rechnen mit Klammern sicherer wirst, wird dir auffallen, dass du die **binomischen Formeln** im Grunde genommen bereits kennst. Denn du erhältst sie sofort, wenn du die Klammerregeln anwendest:

$$(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=(a-b)\cdot(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

Bei den binomischen Formeln handelt es sich somit eigentlich um „Abkürzungen".

WISSEN

Die binomischen Formeln

- 1. binomische Formel (+ Formel): $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- 2. binomische Formel (– Formel): $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- 3. binomische Formel (+ – Formel): $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

BEISPIEL

a $(5+7x)^2=5^2+2\cdot5\cdot7x+(7x)^2$
$=25+70x+49x^2$

1. binomische Formel: $a=5$; $b=7x$

b $(6x-3y)^2=(6x)^2-2\cdot6x\cdot3y+(3y)^2$
$=36x^2-36xy+9y^2$

2. binomische Formel: $a=6x$; $b=3y$

c $(a-4b)(4b+a)=(a-4b)(a+4b)$
$=a^2-16b^2$

Vertausche zunächst die Summanden in der zweiten Klammer.
3. binomische Formel: $a=a$; $b=4b$

d $(-2x-y)^2=(-2x)^2-2\cdot(-2x)\cdot y+y^2$
$=4x^2+4xy+y^2$

2. binomische Formel: $a=-2x$; $b=y$

Alternative Lösung:

$(-2x-y)^2=[-(2x+y)]^2$
$=(-1)^2\cdot(2x+y)^2$
$=(2x+y)^2$
$=4x^2+4xy+y^2$

Stehen in der Klammer zwei Minuszeichen, erhältst du dieselbe Formel wie mit einem Pluszeichen:
$(-a-b)^2=(-1)^2\cdot(a+b)^2=(a+b)^2$

Vertiefe dein Wissen!

32 Berechne mithilfe der binomischen Formeln.

a $(3x+2y)^2$

b $(4a-5b)^2$

c $(1{,}4x-0{,}5y)^2$

d $(0{,}1a-2{,}5b)(2{,}5b+0{,}1a)$

e $\left(4y-\frac{1}{2}x\right)\left(4y+\frac{1}{2}x\right)$

f $\left(\frac{3}{2}a-5b\right)^2$

g $\left(y-3\frac{1}{4}\right)^2$

h $\left(-\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2$

33 Fülle die Leerstellen so, dass jeweils eine binomische Formel entsteht.

a $\left(x-\boxed{}\right)^2 = x^2-\boxed{}+64y^2$

b $\left(\boxed{}+y\right)^2 = 25x^2-\boxed{}+y^2$

c $\left(\boxed{}\right)^2 = a^2-\boxed{}+\frac{1}{36}b^2$

d $\left(\frac{7}{8}a+\boxed{}\right)^2 = \boxed{}+ab+\boxed{}$

e $\left(3m+\boxed{}\right)\left(3m-\boxed{}\right) = \boxed{}-121k^2$

f $\left(1{,}5b+\boxed{}\right)\left(15c-\boxed{}\right) = \boxed{}$

34 Andreas behauptet, dass die beiden Terme T_1 und T_2 jeweils äquivalent sind.
Prüfe für jedes Termpaar, ob Andreas recht hat.

a $T_1=\frac{1}{2}(8x-12)^2$ und $T_2=8(2x-3)^2$

b $T_1=(5x-3{,}5y)^2$ und $T_2=-(3{,}5y-5x)^2$

c $T_1=2(2a^2-3b^3)^2$ und $T_2=\frac{1}{8}(8a^2-12b^3)^2$

d $T_1=(0{,}3a+1{,}2b)(0{,}3a-1{,}2b)$ und $T_2=0{,}09[(a+4b)^2-8ab]$

Vertiefe dein Wissen!

50 Minuten

Test 3

1 Vereinfache durch Anwendung der Potenzgesetze und gib dann den Wert an.

a $\left(-\frac{7}{9}\right)^{-3} : \left(-\frac{7}{9}\right)^{-4}$

b $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}$

c $[(-2)^2]^{-3}$

d $7^3 : 7 + 3^8 \cdot 3^{-7}$

e $2^3 \cdot 5^3 - 0{,}25^4 \cdot 4^4$

f $5^4 \cdot 4^6 \cdot 6^{-1} \cdot 4^{-5} \cdot 5^{-3} \cdot 6$

____ von 7

2 Wende die Potenzgesetze an und vereinfache so weit wie möglich. Es gilt $a, b \neq 0$.

a $[(-2{,}8a)^{-5} \cdot (3{,}5b)^2]^0$

b $(4a)^2 \cdot b^3 : (2a)^4$

c $(-2a)^6 \cdot \left(\frac{a^2}{2}\right)^{-3}$

d $\left(-\frac{5a}{3b}\right)^{-7} : \left(-\frac{3a}{5b}\right)^7$

____ von 6

3 Welche ganze Zahl muss jeweils in den Platzhalter?
Tipp: Schreibe zunächst die Zahlen als Potenzen.

a $3^{\square} \cdot 3^{-2} = 27$

b $2^6 : 2^{\square} = 1\,024$

c $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\square} = \frac{1}{128}$

d $\left(\frac{9}{4}\right)^{\square} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^5 = \frac{4}{9}$

____ von 7

4 Welche Potenzen haben den gleichen Wert?

$8^0 \quad 2^3 \quad -4^2 \quad (-2)^3 \quad 3^2 \quad -3^2 \quad (-2)^4 \quad -0{,}5^0$

____ von 4

5 Ordne die nachfolgenden Werte der Größe nach. Beginne mit dem kleinsten Wert.

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{1} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad -\left(\frac{1}{2}\right)^{4} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{3}$

____ von 6

30 bis 21	20 bis 12	11 bis 0

So lange habe ich gebraucht: ____________

So viele Punkte habe ich erreicht: ____________

50 Minuten

Test 4

1 Berechne und gib die Ergebnisse in der wissenschaftlichen Schreibweise an.

a $2\,500\,000\,000 \cdot 0{,}00002$ **b** $0{,}000000126 : 6\,000\,000$

c $180 \cdot 10^{17} : (1{,}5 \cdot 10^{-11})$ **d** $3{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}6 \cdot 10^{7} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{2}$

___ von 6

2 Berechne mithilfe der Potenzgesetze.

a $0{,}8^{-3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{2} - \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$ **b** $1{,}25^{-1} \cdot 8^{-1} - 3^{3} : 0{,}75^{3}$

c $\left[\left(0{,}5^{-2} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-2}$ **d** $3^{-3} \cdot 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} : 27$

___ von 8

3 Welche Zahl muss in den Platzhalter? Setze jeweils so ein, dass das Ergebnis stimmt.

a $3^{-2} \cdot 3^{\square} = 243$ **b** $5^{-3} : 5^{4} = 5^{\square} \cdot 5^{-6}$

c $4^{\square} \cdot 4^{-5} = 16 \cdot 4^{3}$ **d** $2^{\square} : 0{,}5 : 2^{-4} = 32$

___ von 8

4 Vereinfache so weit wie möglich und schreibe das Ergebnis ohne negative Exponenten. Dabei gilt a, b ≠ 0.

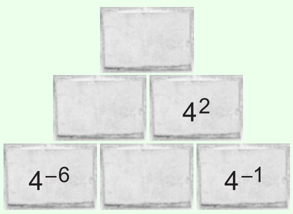
a $-a^{-2} \cdot a^{-3}$ **b** $b^{-4} \cdot b^{-5} : b^{-9}$

c $[a^{-5} \cdot b^{-9} \cdot (ab)^{8}]^{-1}$ **d** $[(ab)^{-2}]^{-4} \cdot (a^{2}b^{2})^{-1}$

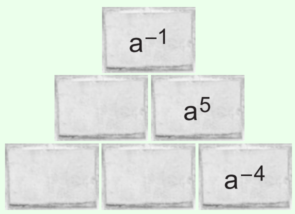
___ von 6

5 Das Ergebnis der Produkte zweier benachbarter Kästchen steht jeweils darüber. Welche Potenzen müssen jeweils in die leeren Kästchen?

a



b



___ von 6

34 bis 24	23 bis 14	13 bis 0

So lange habe ich gebraucht: ______

So viele Punkte habe ich erreicht: ______

Teste dein Wissen!

c $\mathbf{1{,}4x^2y^4}+2{,}8x^2y^3-3{,}5x^4y^4+7{,}7xy^3=0{,}7xy^3\cdot(2xy+\mathbf{4x}-\mathbf{5x^3y}+\mathbf{11})$

Berechnungen:

$0{,}7xy^3\cdot 2xy=\mathbf{1{,}4x^2y^4}$

$2{,}8x^2y^3:0{,}7xy^3=\frac{2{,}8x^2y^3}{0{,}7xy^3}=\frac{28x^2y^3}{7xy^3}=\mathbf{4x}$

$3{,}5x^4y^4:0{,}7xy^3=\frac{3{,}5x^4y^4}{0{,}7xy^3}=\frac{35x^4y^4}{7xy^3}=\mathbf{5x^3y}$

$7{,}7xy^3:0{,}7xy^3=\frac{7{,}7xy^3}{7xy^3}=\frac{77xy^3}{7xy^3}=\mathbf{11}$

d $-\frac{5}{2}a^2b^7c-\mathbf{\frac{1}{2}a^2b^5}+\left(\mathbf{-\frac{3}{2}a^5b^8}\right)+\frac{15}{2}a^4b^5=-\frac{1}{2}a^2b^5\cdot(\mathbf{5b^2c}+1+3a^3b^3-\mathbf{15a^2})$

Berechnungen:

$-\frac{1}{2}a^2b^5\cdot 1=-\mathbf{\frac{1}{2}a^2b^5}$

$-\frac{1}{2}a^2b^5\cdot 3a^3b^3=\mathbf{-\frac{3}{2}a^5b^8}$

$-\frac{5}{2}a^2b^7c:\left(-\frac{1}{2}a^2b^5\right)=\frac{-\frac{5}{2}a^2b^7c}{-\frac{1}{2}a^2b^5}=\frac{-5\cdot 2\cdot a^2b^7c}{-2\cdot 1\cdot a^2b^5}=\mathbf{5b^2c}$

$\frac{15}{2}a^4b^5:\left(-\frac{1}{2}a^2b^5\right)=\frac{\frac{15}{2}a^4b^5}{-\frac{1}{2}a^2b^5}=\frac{15\cdot 2\cdot a^4b^5}{-2\cdot 1\cdot a^2b^5}=\mathbf{-15a^2}$

31

a $8a^2b-4ab^2+2a^2b^2-6ab=2ab(\mathbf{4a^2}-2b+ab-3)$

Richtige Lösung:

$8a^2b-4ab^2+2a^2b^2-6ab=2ab(\mathbf{4a}-2b+ab-3)$

b $14x^3y^2-7x^2y-7xy+21x^2y^2=7xy(2x^2y-x+3xy)$

Richtige Lösung:

$14x^3y^2-7x^2y-7xy+21x^2y^2=7xy(2x^2y-x-\mathbf{1}+3xy)$

c $(1{,}5+b)0{,}6c-3b(1{,}5+b)+0{,}1(1{,}5+b)=0{,}1(6c-\mathbf{3}b+1)(1{,}5+b)$

Richtige Lösung:

$(1{,}5+b)0{,}6c-3b(1{,}5+b)+0{,}1(1{,}5+b)=(0{,}6c-3b+0{,}1)(1{,}5+b)=0{,}1(6c-\mathbf{30}b+1)(1{,}5+b)$

d $-\frac{2}{3}xy^2+\frac{7}{3}x^2y^3-x^3y-\frac{5}{3}xy=-\frac{1}{3}xy\left(2y-7xy^2+\mathbf{\frac{1}{3}}x^2+5\right)$

Richtige Lösung:

$-\frac{2}{3}xy^2+\frac{7}{3}x^2y^3-x^3y-\frac{5}{3}xy=-\frac{1}{3}xy\left(2y-7xy^2+\mathbf{3}x^2+5\right)$

32

a $(3x\mathbf{+}2y)^2=(3x)^2\mathbf{+}2\cdot 3x\cdot 2y+(2y)^2=9x^2+12xy+4y^2$ **1. binomische Formel**

b $(4a\mathbf{-}5b)^2=(4a)^2\mathbf{-}2\cdot 4a\cdot 5b+(5b)^2=16a^2-40ab+25b^2$ **2. binomische Formel**

c $(1{,}4x\mathbf{-}0{,}5y)^2=(1{,}4x)^2\mathbf{-}2\cdot 1{,}4x\cdot 0{,}5y+(0{,}5y)^2$ **2. binomische Formel**

$=1{,}96x^2-1{,}4xy+0{,}25y^2$

d $(0{,}1a-2{,}5b)(2{,}5b+0{,}1a)=(0{,}1a-2{,}5b)(0{,}1a+2{,}5b)$
$=(0{,}1a)^2-(2{,}5b)^2$
$=0{,}01a^2-6{,}25b^2$

Vertausche die Terme in der Klammer mit dem Pluszeichen und wende dann die **3. binomische Formel** an.

e $\left(4y-\frac{1}{2}x\right)\left(4y+\frac{1}{2}x\right)=(4y)^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2=16y^2-\frac{1}{4}x^2$

Der Bruch wird quadriert, indem du Zähler und Nenner quadrierst.

f $\left(\frac{3}{2}a-5b\right)^2=\left(\frac{3}{2}a\right)^2-2\cdot\frac{3}{2}a\cdot 5b+(5b)^2=\frac{9}{4}a^2-15ab+25b^2$

g $\left(y-3\frac{1}{4}\right)^2=\left(y-\frac{13}{4}\right)^2=y^2-2\cdot y\cdot\frac{13}{4}+\left(\frac{13}{4}\right)^2=y^2-\frac{13}{2}y+\frac{169}{16}$

Wandle zunächst den gemischten Bruch in einen unechten Bruch um.

h $\left(-\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2=\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2=\left(\frac{3}{2}x\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}x\cdot\frac{1}{3}y+\left(\frac{1}{3}y\right)^2=\frac{9}{4}x^2+xy+\frac{1}{9}y^2$

33

a $(x-\mathbf{8y})^2=x^2-\mathbf{16xy}+64y^2$

b $(\mathbf{5x}+y)^2=25x^2-\mathbf{10xy}+y^2$

c $\left(\mathbf{a}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\mathbf{b}\right)^2=a^2-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{ab}+\frac{1}{36}b^2$

d $\left(\frac{7}{8}a+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\mathbf{b}\right)^2=\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{64}}\mathbf{a^2}+ab+\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{49}}\mathbf{b^2}$

$ab:\left(2\cdot\frac{7}{8}a\right)=ab:\left(\frac{7}{4}a\right)=\frac{ab}{\frac{7}{4}a}=\frac{4ab}{7a}=\frac{4}{7}b$

e $(3m+\mathbf{11k})(3m-\mathbf{11k})=\mathbf{9m^2}-121k^2$

f $(1{,}5b+\mathbf{15c})(15c-\mathbf{1{,}5b})=\mathbf{225c^2-2{,}25b^2}$

34

a $T_1=\frac{1}{2}(8x-12)^2=\frac{1}{2}(64x^2-192x+144)=32x^2-96x+72$

$T_2=8(2x-3)^2=8(4x^2-12x+9)=32x^2-96x+72$

Andreas hat recht, die Terme T_1 und T_2 sind **äquivalent**.

b $T_1=(5x-3{,}5y)^2=25x^2-35xy+12{,}25y^2$

$T_2=-(3{,}5y-5x)^2=-(12{,}25y^2-35xy+25x^2)=-12{,}25y^2+35xy-25x^2$

Andreas hat unrecht, die Terme T_1 und T_2 sind **nicht äquivalent**.

c $T_1=2(2a^2-3b^3)^2=2(4a^4-12a^2b^3+9b^6)=8a^4-24a^2b^3+18b^6$

$T_2=\frac{1}{8}(8a^2-12b^3)^2=\frac{1}{8}(64a^4-192a^2b^3+144b^6)=8a^4-24a^2b^3+18b^6$

Andreas hat recht, die Terme T_1 und T_2 sind **äquivalent**.

d $T_1=(0{,}3a+1{,}2b)(0{,}3a-1{,}2b)=0{,}09a^2-1{,}44b^2$

$T_2=0{,}09[(a+4b)^2-8ab]=0{,}09(a^2+8ab+16b^2-8ab)=0{,}09(a^2+16b^2)=0{,}09a^2+1{,}44b^2$

Andreas hat unrecht, die Terme T_1 und T_2 sind **nicht äquivalent**.

Hast du's gewusst?

Test 3

1

a $\left(-\frac{7}{9}\right)^{-3} : \left(-\frac{7}{9}\right)^{-4} = \left(-\frac{7}{9}\right)^{-3-(-4)} = \left(-\frac{7}{9}\right)^{1} = -\frac{7}{9}$

Die Potenzen haben dieselbe Basis.

b $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{8} : \frac{1}{8}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{1}\right)^{-2} = (-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

Die Potenzen haben den gleichen Exponenten.

c $[(-2)^2]^{-3} = (-2)^{2 \cdot (-3)} = (-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64}$

Potenziere die Potenz.

d $7^3 : 7 + 3^8 \cdot 3^{-7} = 7^{3-1} + 3^{8+(-7)} = 7^2 + 3^1 = 49 + 3 = 52$

Die Potenzen haben jeweils dieselbe Basis.

e $2^3 \cdot 5^3 - 0{,}25^4 \cdot 4^4 = (2 \cdot 5)^3 - (0{,}25 \cdot 4)^4 = 10^3 - 1^4 = 1\,000 - 1 = 999$

Die Potenzen haben jeweils den gleichen Exponenten.

f $5^4 \cdot 4^6 \cdot 6^{-1} \cdot 4^{-5} \cdot 5^{-3} \cdot 6 = 5^4 \cdot 5^{-3} \cdot 4^6 \cdot 4^{-5} \cdot 6^{-1} \cdot 6$
$= 5^{4+(-3)} \cdot 4^{6+(-5)} \cdot 6^{-1+1}$
$= 5^1 \cdot 4^1 \cdot 6^0$
$= 5 \cdot 4 \cdot 1$
$= 20$

Kommutativgesetz anwenden

2

a $[(-2{,}8a)^{-5} \cdot (3{,}5b)^2]^0 = 1$

Jede Potenz mit Exponent **0** hat den Wert **1**.

b $(4a)^2 \cdot b^3 : (2a)^4 = \frac{4^2 \cdot a^2 \cdot b^3}{2^4 \cdot a^4} = \frac{4^2}{2^4} \cdot \frac{a^2}{a^4} \cdot b^3 = \frac{16}{16} \cdot a^{2-4} \cdot b^3 = a^{-2} b^3$

c $(-2a)^6 \cdot \left(\frac{a^2}{2}\right)^{-3} = (-2a)^6 \cdot \left(\frac{2}{a^2}\right)^3 = (-2)^6 \cdot a^6 \cdot \frac{2^3}{a^{2 \cdot 3}} = 2^6 \cdot 2^3 \cdot \frac{a^6}{a^6} = 2^{6+3} = 2^9 = 512$

d $\left(-\frac{5a}{3b}\right)^{-7} : \left(-\frac{3a}{5b}\right)^7 = \left(-\frac{3b}{5a}\right)^7 : \left(-\frac{3a}{5b}\right)^7 = \left(\frac{3b}{5a} : \frac{3a}{5b}\right)^7 = \left(\frac{3b}{5a} \cdot \frac{5b}{3a}\right)^7 = \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^7 = \frac{b^{2 \cdot 7}}{a^{2 \cdot 7}} = \frac{b^{14}}{a^{14}}$

3

a $3^5 \cdot 3^{-2} = 27$

Berechnungen:
$27 = 3^3$
$27 : 3^{-2} = 3^3 : 3^{-2} = 3^{3-(-2)} = 3^5$

b $2^6 : 2^{-4} = 1\,024$

Berechnungen:
$1\,024 = 2^{10}$
$2^6 : 1\,024 = 2^6 : 2^{10} = 2^{6-10} = 2^{-4}$

c $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{128}$

Berechnungen:
$\frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$
$\frac{1}{128} : \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{7-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

Hast du's gewusst?

d $\left(\frac{9}{4}\right)^{4}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{5}=\frac{4}{9}$

Berechnungen:
$\frac{4}{9}:\left(\frac{4}{9}\right)^{5}=\left(\frac{4}{9}\right)^{1-5}=\left(\frac{4}{9}\right)^{-4}=\left(\frac{9}{4}\right)^{4}$

4 Es gilt:
$8^0=1 \quad 2^3=8 \quad -4^2=-16 \quad (-2)^3=-8 \quad 3^2=9 \quad -3^2=-9 \quad (-2)^4=16 \quad -0{,}5^0=-1$
$\Rightarrow$ Die Potenzen haben alle einen unterschiedlichen Wert.

5 Es gilt:
$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=(-2)^4=16 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4 \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{1}=-\frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2^1=2$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=(-2)^3=-8 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=2^3=8 \quad -\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=-\frac{1}{16} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{3}=-\frac{1}{8}$

Der Größe nach geordnet und mit dem kleinsten Wert beginnend erhält man:
$-8 < -\frac{1}{2} < -\frac{1}{8} < -\frac{1}{16} < \frac{1}{8} < 1 < 2 < 4 < 8 < 16$
Damit gilt:
$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{1} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{3} < -\left(\frac{1}{2}\right)^{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{0} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} < \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$

Test 4

1 **a** $2\,500\,000\,000\cdot 0{,}00002=2{,}5\cdot 10^9\cdot 2\cdot 10^{-5}=2{,}5\cdot 2\cdot 10^9\cdot 10^{-5}=5\cdot 10^{9+(-5)}=5\cdot 10^4$

b $0{,}000000126:6\,000\,000=\frac{126\cdot 10^{-9}}{6\cdot 10^6}=\frac{126}{6}\cdot\frac{10^{-9}}{10^6}=21\cdot 10^{-9-6}=21\cdot 10^{-15}=2{,}1\cdot 10^{-14}$

c $180\cdot 10^{17}:(1{,}5\cdot 10^{-11})=\frac{180\cdot 10^{17}}{15\cdot 10^{-12}}=\frac{180}{15}\cdot\frac{10^{17}}{10^{-12}}=12\cdot 10^{17-(-12)}=12\cdot 10^{29}=1{,}2\cdot 10^{30}$

d $3{,}0\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}6\cdot 10^7\cdot 2{,}5\cdot 10^2=3\cdot 0{,}6\cdot 2{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 10^7\cdot 10^2=4{,}5\cdot 10^{-3+7+2}=4{,}5\cdot 10^6$

2 **a** $0{,}8^{-3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{2}-\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{2}-\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$
$=\left(\frac{4}{5}\right)^{-3+2}-\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}-\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}=0$

Beide Potenzen haben dieselbe Basis.

b $1{,}25^{-1}\cdot 8^{-1}-3^3:0{,}75^3=(1{,}25\cdot 8)^{-1}-(3:0{,}75)^3=10^{-1}-4^3=0{,}1-64=-63{,}9$

c $\left[\left(0{,}5^{-2}\cdot\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-2}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\frac{1}{2}\right]^{-3\cdot(-2)}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2+1}\right]^{6}=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right]^{6}=[(2)^1]^6=2^6=64$

Hast du's gewusst?

d $3^{-3}\cdot 81\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} : 27 = 3^{-3}\cdot 3^{4}\cdot 3^{2} : 3^{3} = 3^{-3+4}\cdot 3^{2-3} = 3^{1}\cdot 3^{-1} = 3^{1+(-1)} = 3^{0} = 1$

3

a $3^{-2}\cdot 3^{7} = 243$

Berechnungen:
$243 = 3^5$
$243 : 3^{-2} = 3^5 : 3^{-2} = 3^{5-(-2)} = 3^7$

b $5^{-3} : 5^{4} = 5^{-1}\cdot 5^{-6}$

Berechnungen:
$5^{-3} : 5^4 : 5^{-6} = 5^{-3-4-(-6)} = 5^{-1}$

c $4^{10}\cdot 4^{-5} = 16\cdot 4^3$

Berechnungen:
$16\cdot 4^3 : 4^{-5} = 4^2\cdot 4^3 : 4^{-5} = 4^{2+3-(-5)} = 4^{10}$

d $2^{0} : 0{,}5 : 2^{-4} = 32$

Berechnungen:
$32 = 2^5$
$32\cdot 0{,}5\cdot 2^{-4} = 2^5\cdot 2^{-1}\cdot 2^{-4} = 2^{5+(-1)+(-4)} = 2^0$

4

a $-a^{-2}\cdot a^{-3} = -a^{-2+(-3)} = -a^{-5} = -\frac{1}{a^5}$

b $b^{-4}\cdot b^{-5} : b^{-9} = b^{-4+(-5)-(-9)} = b^0 = 1$

c $[a^{-5}\cdot b^{-9}\cdot (ab)^8]^{-1} = \frac{1}{a^{-5}\cdot b^{-9}\cdot a^8\cdot b^8} = \frac{1}{a^{-5}\cdot a^8\cdot b^{-9}\cdot b^8} = \frac{1}{a^{-5+8}\cdot b^{-9+8}} = \frac{1}{a^3\cdot b^{-1}} = \frac{b}{a^3}$

d $[(ab)^{-2}]^{-4}\cdot (a^2b^2)^{-1} = (ab)^{-2\cdot(-4)}\cdot (ab)^{2\cdot(-1)} = (ab)^8\cdot (ab)^{-2} = (ab)^{8+(-2)} = (ab)^6 = a^6b^6$

Alternative Lösungsmöglichkeit:

$$\begin{aligned}[(ab)^{-2}]^{-4}\cdot (a^2b^2)^{-1} = (ab)^{-2\cdot(-4)}\cdot a^{2\cdot(-1)}\cdot b^{2\cdot(-1)} = (ab)^8\cdot a^{-2}\cdot b^{-2} &= a^8\cdot b^8\cdot a^{-2}\cdot b^{-2}\\ &= a^8\cdot a^{-2}\cdot b^8\cdot b^{-2}\\ &= a^{8+(-2)}\cdot b^{8+(-2)}\\ &= a^6b^6\end{aligned}$$

5

a

4^{-1}
4^{-3} | 4^{2}
4^{-6} | 4^{3} | 4^{-1}

Berechnungen von unten nach oben:
$4^2 : 4^{-1} = 4^{2-(-1)} = 4^3$
$4^{-6}\cdot 4^3 = 4^{-6+3} = 4^{-3}$
$4^{-3}\cdot 4^2 = 4^{-3+2} = 4^{-1}$

b

a^{-1}
a^{-6} | a^{5}
a^{-15} | a^{9} | a^{-4}

Berechnungen von rechts nach links:
$a^5 : a^{-4} = a^{5-(-4)} = a^9$
$a^{-1} : a^5 = a^{-1-5} = a^{-6}$
$a^{-6} : a^9 = a^{-6-9} = a^{-15}$