

# ABITUR *Skript*

Mathema

**MEHR  
ERFAHREN**

*Das musst du wissen!*

Abi Baden-Württemberg



**STARK**

# Inhalt

## Analysis

<b>1 Gleichungen</b>	<b>1</b>
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Exponentialgleichungen	1
1.3 Nullprodukt und Substitution	2
<b>2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften</b>	<b>3</b>
2.1 Potenzfunktionen	3
2.2 Ganzrationale Funktionen	4
2.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	5
2.4 Natürliche Exponentialfunktion	6
2.5 Entwicklung von Funktionen	7
2.6 Vielfachheit von Nullstellen	9
2.7 Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems)	10
<b>3 Gebrochenrationale Funktionen</b>	<b>11</b>
3.1 Nullstellen und Polstellen	11
3.2 Grenzwerte und Asymptoten	12
<b>4 Ableitung</b>	<b>16</b>
4.1 Bedeutung der Ableitung	16
4.2 Ableitungen der Grundfunktionen	16
4.3 Ableitungsregeln	17
4.4 Tangente und Normale	18
<b>5 Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung</b>	<b>19</b>
5.1 Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte	19
5.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	22
5.3 Ortskurven	25
5.4 Extremwertaufgaben	26

<b>6</b>	<b>Stammfunktion und unbestimmtes Integral</b>	<b>28</b>
6.1	Stammfunktion	28
6.2	Unbestimmtes Integral	29
<b>7</b>	<b>Bestimmtes Integral und Flächenberechnung</b>	<b>30</b>
7.1	Bestimmtes Integral	30
7.2	Flächenberechnungen	31
<b>8</b>	<b>Integralfunktion</b>	<b>35</b>
<b>9</b>	<b>Weitere Anwendungen des Integrals</b>	<b>37</b>
9.1	Rekonstruierter Bestand	37
9.2	Mittelwert	37

## **Analytische Geometrie**

<b>1</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>39</b>
<b>2</b>	<b>Vektoren</b>	<b>40</b>
2.1	Rechnen mit Vektoren	40
2.2	Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	41
2.3	Skalarprodukt	41
2.4	Vektor- bzw. Kreuzprodukt	42
<b>3</b>	<b>Geraden und Ebenen</b>	<b>43</b>
3.1	Geraden	43
3.2	Ebenen in Parameterform	45
3.3	Ebenen in Normalen- bzw. Koordinatenform	46
3.4	Umwandlung: Parameterform in Koordinatenform	47
3.5	Hesse'sche Normalenform	48

<b>4</b>	<b>Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten</b>	<b>49</b>
4.1	Lage zweier Geraden	49
4.2	Lage einer Geraden zu einer Ebene	50
4.3	Lage zweier Ebenen	51
4.4	Schnittwinkel	53
<b>5</b>	<b>Abstände zwischen geometrischen Objekten</b>	<b>54</b>
5.1	Abstand zu einer Ebene	54
5.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	55
<b>6</b>	<b>Spiegelungen</b>	<b>57</b>

## Stochastik


<b>1</b>	<b>Ereignisse</b>	<b>59</b>
<b>2</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsberechnungen</b>	<b>60</b>
2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	60
2.2	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	60
2.3	Baumdiagramme und Pfadregeln	61
2.4	Urnenmodelle und Bernoulli-Formel	62
2.5	Stochastische Unabhängigkeit	63
<b>3</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	<b>64</b>
3.1	Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	64
3.2	Erwartungswert einer Zufallsvariablen	65
3.3	Binomialverteilte Zufallsvariablen	66
<b>4</b>	<b>Testen von Hypothesen</b>	<b>69</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>71</b>



# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im Pflichtteil abgefragt. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:

- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 840068)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 840078)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 840088)

Offizielle Prüfungsaufgaben und weitere Übungsaufgaben für die Prüfung mit vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung Baden-Württemberg, Mathematik“ (Bestell-Nr. 85001).



## 2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

### 2.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form:

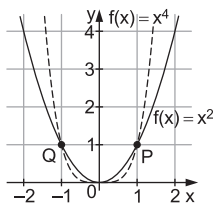
$$f: x \mapsto x^r \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

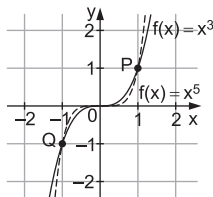
- Exponent positiv:  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$   
Definitionsmenge:  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$  Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ:  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$   
Definitionsmenge:  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  Graphen sind **Hyperbeln**.

#### Graphenverläufe

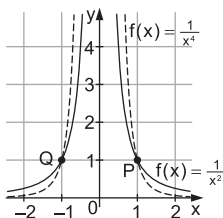
Parabeln:  $n$  gerade;  $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$



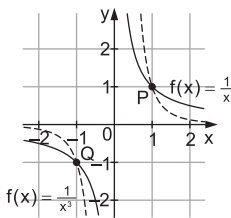
$n$  ungerade;  $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$



Hyperbeln:  $n$  gerade;  $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$



$n$  ungerade;  $\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



#### Wurzelfunktion

Ist der Exponent  $r$  ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:

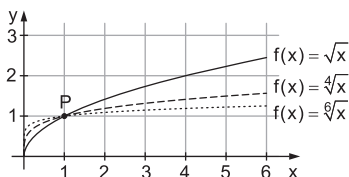
$$f: x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \text{ mit } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ (n-te Wurzelfunktion)}$$

Definitionsmenge:  $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$

Wertmenge:  $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$



1.  $G_f$  verläuft durch  $P(1 | 1)$ .
2. Einzige Nullstelle:  $x=0$
3. Je größer  $n$ , desto
  - flacher verläuft  $G_f$  für  $x > 1$ .
  - steiler nähert sich  $G_f$  dem Koordinatenursprung.



## 2.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad  $n$  versteht man eine Funktion der Form:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$

Definitionsmenge:  $D_f = \mathbb{R}$

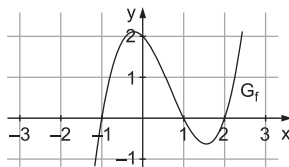
Die Werte  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  heißen **Koeffizienten**.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 2.6).



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Nullstellen bei  $x=2$ ,  
 $x=-1$  und  $x=1$

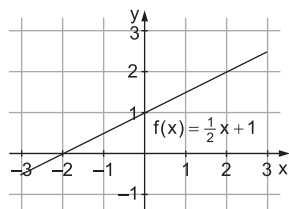


### Spezialfälle

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + t \quad (\text{Grad } 1)$$

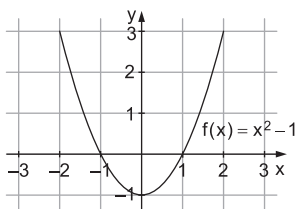
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Grad } 2)$$

Graph ist eine Parabel.





### 3 Zufallsvariablen

#### 3.1 Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsvariable** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu. Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsvariablen  $X$  gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  die Zufallsvariable die möglichen Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  annimmt; in Tabellenform:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P(X=x_i)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (\text{Normierungsbedingung})$$

Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Stabdiagramm oder ein Histogramm erfolgen.

#### Vorgehensweise

*Schritt 1:* Werte, die die Zufallsvariable  $X$  annehmen kann, auflisten

*Schritt 2:* Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

*Schritt 3:* Tabelle und ggf. Stabdiagramm bzw. Histogramm erstellen



Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen  $X$ , die die Anzahl der Sechser beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

*Schritt 1:*

Die Zufallsvariable  $X$  kann folgende Werte annehmen:

$$x_1=0; \quad x_2=1; \quad x_3=2$$

*Schritt 2:*

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von  $X$  können mithilfe der Bernoulli-Formel (vgl. S. 62) ermittelt werden:

$$P(X=x_1) = P(X=0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^2 = 0,49$$

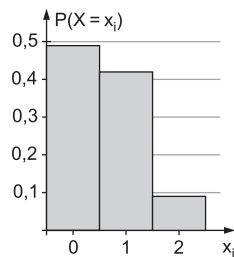
$$P(X=1) = \binom{2}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^1 = 0,42 \qquad P(X=2) = \binom{2}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^0 = 0,09$$

Schritt 3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



### 3.2 Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments für die Zufallsvariable zu erwarten ist.

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$$

*Bemerkungen:*

- Der Erwartungswert  $\mu$  einer Zufallsvariablen X ist häufig kein Wert, den die Zufallsvariable tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.



Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

#### Szenario A

Note x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05

#### Szenario B

Note y	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y)$	0,2	0,25	0,25	0,05	0,15	0,1



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)

[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**