GYMNASIUM

ABITUR Skript

MEHR ERFAHREN

Mathema

Das musst d… n!

Abi Baden-Württemb

STARK

Inhalt

Analysis

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im Pflichtteil abgefragt. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Ausführliche Erläuterungen sowie viele Übungsaufgaben finden Sie in unseren Abitur-Trainingsbänden:
- Abitur-Training Analysis (Bestell-Nr. 840068)
- Abitur-Training Analytische Geometrie (Bestell-Nr. 840078)
- Abitur-Training Stochastik (Bestell-Nr. 840088)

Offizielle Prüfungsaufgaben und weitere Übungsaufgaben für die Prüfung mit vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung Baden-Württemberg, Mathematik“ (Bestell-Nr. 85001).

2 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

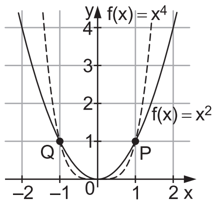
2.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form:
$f\colon x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$
Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

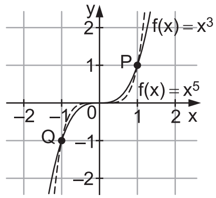
- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$
  Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$
  Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Graphen sind **Hyperbeln**.

Graphenverläufe

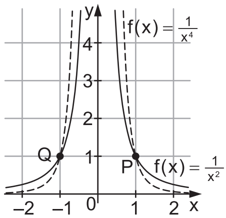
Parabeln: n gerade; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$



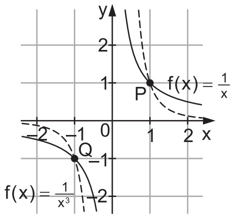
n ungerade; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$



Hyperbeln: n gerade; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$



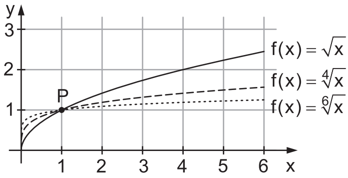
n ungerade; $\mathbb{W}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Wurzelfunktion

Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:
$f\colon x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ (n-te Wurzelfunktion)
Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
Wertemenge: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$

1. G_f verläuft durch P(1 | 1).
2. Einzige Nullstelle: $x = 0$
3. Je größer n, desto
   - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
   - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



2.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

$f\colon x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

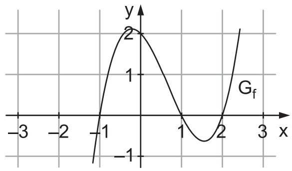
mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Die Werte $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.
Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 2.6).

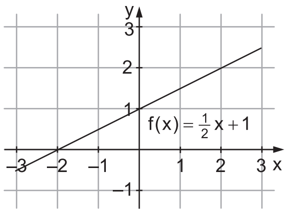
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Nullstellen bei $x = 2$, $x = -1$ und $x = 1$

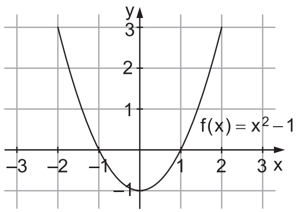


Spezialfälle

Lineare Funktion:
$f(x) = mx + t$ (Grad 1)
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (Grad 2)
Graph ist eine Parabel.



3 Zufallsvariablen

3.1 Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsvariable** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu. Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsvariablen X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \dots, p_n$ die Zufallsvariable die möglichen Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ (Normierungsbedingung)
Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Stabdiagramm oder ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise
Schritt 1: Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Stabdiagramm bzw. Histogramm erstellen

Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, die die Anzahl der Sechser beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:
Die Zufallsvariable X kann folgende Werte annehmen:
$x_1 = 0;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = 2$

Schritt 2:
Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (vgl. S. 62) ermittelt werden:

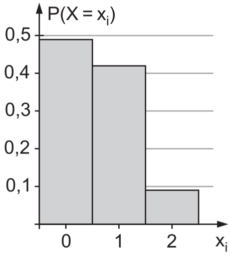
$$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$$

$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^1 = 0{,}42 \qquad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}09$$

Schritt 3:
Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



3.2 Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments für die Zufallsvariable zu erwarten ist.

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n$$

Bemerkungen:
- Der Erwartungswert μ einer Zufallsvariablen X ist häufig kein Wert, den die Zufallsvariable tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.

Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

Szenario A

Note x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05

Szenario B

Note y	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y)$	0,2	0,25	0,25	0,05	0,15	0,1