2020 MSA

Mittlerer Schulabschluss

ActiveBook
Interaktives Training

MEHR ERFAHREN

Hamburg

Mathematik

+ *Basiswissen mit Übungen*
+ *Formelsammlung*
+ *Original-Prüfungen*

STARK

Inhalt

Abschlussprüfungen

Autoren:
Peter Stählin, Christoph Borr, Jörg Collenburg, Doris Cremer, Olaf Klärner, Karl-Heinz Kuhlmann, Kerstin Lenz, Wolfgang Matschke, Marc Möllers, Heike Ohrt, Dietmar Steiner

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit vorliegendem Buch kannst du dich in Mathematik auf die Prüfung zum **mittleren Schulabschluss** vorbereiten. (Früher hieß diese Prüfung noch Realschulabschluss bzw. Mittlere Reife.)

In Hamburg wird der mittlere Schulabschluss nach erfolgreicher Teilnahme an einer mündlichen und schriftlichen Abschlussprüfung vergeben. Die Aufgaben der schriftlichen Prüfung werden zentral für alle Schulen in Hamburg von der Behörde für Schule und Berufsbildung erstellt. Gerade bei einer zentral gestellten Prüfung ist das **Grundlagenwissen** besonders wichtig. Denn es geht nicht um irgendwelche Spezialkenntnisse, die du vielleicht gut beherrschst, sondern die Aufgaben in der Prüfung bauen auf einem breiten Grundlagenwissen auf. Es geht vor der Prüfung also um eine Gesamtwiederholung.

- Daher beginnen wir in diesem Buch mit einem ausführlichen **Trainingsteil**. Im ersten Kapitel werden die wichtigsten **Themen der 5. bis 9. Klasse** so kurz wie möglich **wiederholt**, die Kapitel 2 bis 11 behandeln intensiv **sämtliche prüfungsrelevanten Bereiche der 9. und 10. Klasse**. Insgesamt findest du über **200 Aufgaben**, anhand derer du überprüfen kannst, ob du den Stoff sicher beherrschst. Grundlage der schriftlichen Prüfung ist der Bildungsplan Mathematik.

- Wenn die einzelnen Themen „sitzen“, du die Aufgaben also lösen kannst, geht es weiter mit den **Original-Abschlussprüfungen 2014 bis 2019**. Schaffst du es, diese in der vorgegebenen Zeitspanne und nur mit den zulässigen Hilfsmitteln zu bearbeiten, bist du optimal vorbereitet.
  In der Prüfung hast du 155 Minuten Zeit. Wenn du beim Üben anfangs die Aufgaben innerhalb dieser Zeit nicht schaffst, solltest du die Abschlussprüfungen in Abständen wiederholen, bis du sicher bist und die Aufgaben richtig und in der vorgesehenen Zeit löst. Wenn du merkst, dass du immer wieder über dasselbe Problem stolperst, solltest du das entsprechende Trainingskapitel wiederholen.

Zu allen Aufgaben des Trainingsteils und zu den Original-Aufgaben der Abschlussprüfungen gibt es **ausführliche Lösungen** in einem **separaten Buch** (Bestell-Nr. 21500L), die jeden Rechenschritt genau erklären. Dabei wird besonderer Wert auf die Lösungsansätze und Vorüberlegungen gelegt. Zur Veranschaulichung und dem besseren Verständnis der Lösungen helfen dir zahlreiche Skizzen.
Zuerst solltest du selbst die Lösung finden und dann mit dem Buch vergleichen. Nur was du dir selbst erarbeitet hast, bleibt im Gedächtnis und du lernst dazu. Halte dich deswegen konsequent daran, jede Aufgabe zunächst selbst zu rechnen.

Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrschst, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet. Du wirst sehen: Übung macht den Meister!

Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion

Merke

Quadratische Funktionen der Form f: $y = a(x - s)^2 + t$

- Die Form $y = a(x - s)^2 + t$ heißt **Scheitelpunktform**, weil man daraus die Koordinaten des Scheitelpunktes direkt ablesen kann:

  $y = a(x - \mathbf{s})^2 + \mathbf{t}$

  $\downarrow \quad \downarrow$

  $S(\mathbf{s} \mid \mathbf{t})$ Scheitelpunkt der Parabel
- Die Graphen der Funktionen $y = a(x - s)^2 + t$ erhält man, wenn man die Normalparabel mit dem **Faktor a streckt bzw. staucht** und anschließend **längs der x-Achse um s (LE)** und **längs der y-Achse um t (LE)** verschiebt. Für $a < 0$ ist der Graph zusätzlich an der **x-Achse gespiegelt**.

Beispiele

a) f: $y = x^2$ mit $a = \mathbf{1}$; $s = \mathbf{0}$; $t = \mathbf{0}$

b) f_1: $y = \mathbf{2}(x \mathbf{- 6})^2 \mathbf{+ 4}$ mit $a = \mathbf{2}$; $s = \mathbf{6}$; $t = \mathbf{4}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$S(6 \mid 4)$

c) f_2: $y = \mathbf{0{,}5}(x \mathbf{+ 2})^2 \mathbf{- 3}$ mit $a = \mathbf{0{,}5}$; $s = \mathbf{-2}$; $t = \mathbf{-3}$

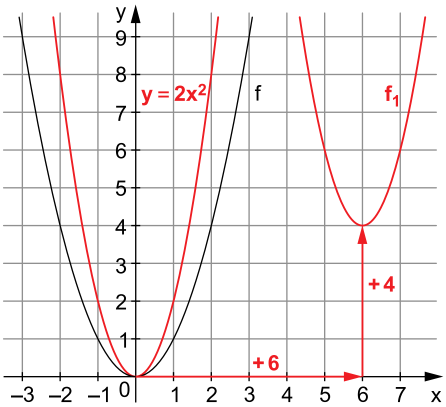
$\downarrow \quad \downarrow$

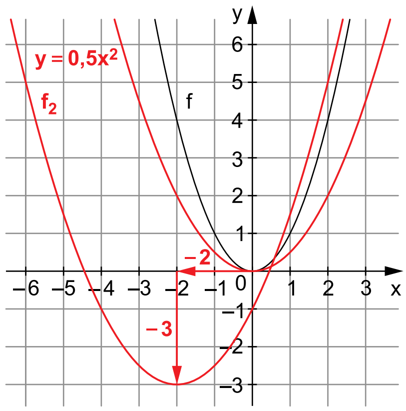
$S(-2 \mid -3)$

Wertetabelle

	x	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	y	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36		
f_1	y							76	54	36	22	12	6	4	6	12
f_2	y	5	1,5	−1	−2,5	−3	−2,5	−1	1,5	5	9,5	15				

Graphen





Multipliziert man die Klammer in der Scheitelpunktform aus und fasst zusammen, so erhält man die **allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$** der quadratischen Funktion.

Beispiele

$y = 2(x - 6)^2 + 4$	$y = 0{,}5(x + 2)^2 - 3$
$y = 2(x^2 - 12x + 36) + 4$	$y = 0{,}5(x^2 + 4x + 4) - 3$
$y = 2x^2 - 24x + 72 + 4$	$y = 0{,}5x^2 + 2x + 2 - 3$
$y = 2x^2 - 24x + 76$	$y = 0{,}5x^2 + 2x - 1$

Umgekehrt kann man jede quadratische Funktion, die in allgemeiner Form gegeben ist, durch **die Methode der quadratischen Ergänzung** in die Scheitelpunktform überführen.

Methode der quadratischen Ergänzung

Beispiele

1. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 11$ — Allgemeine Form

$y = \frac{1}{2} \cdot [x^2 - 8x + 22]$

$y = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 22 - \left(\frac{8}{2}\right)^2\right]$

$y = \frac{1}{2} \cdot [\underbrace{x^2 - 8x + 16}_{\text{Binom}} + 22 - 16]$

$y = \frac{1}{2} \cdot [\overbrace{(x-4)^2} + 6]$

$y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$ — Scheitelpunktform

Scheitelpunkt: $S(4|3)$

2. $y = -2x^2 - 20x - 58$ — Allgemeine Form

$y = -2 \cdot [x^2 + 10x + 29]$

$y = -2 \cdot [\underbrace{x^2 + 10x + 5^2} + 29 - 5^2]$

$y = -2 \cdot [(x+5)^2 + 4]$

$y = -2(x+5)^2 - 8$ — Scheitelpunktform

Scheitelpunkt: $S(-5|-8)$

Merke

Scheitelpunktform und allgemeine Form

- Eine quadratische Funktion kann in der **allgemeinen Form $y = ax^2 + bx + c$** oder in der **Scheitelpunktform $y = a(x-s)^2 + t$** angegeben werden.
- Die Scheitelpunktform kann durch **Ausmultiplizieren** in die allgemeine Form umgewandelt werden.
- Die allgemeine Form kann durch **quadratische Ergänzung** auf die Scheitelpunktform gebracht werden.

Aufgaben

104 Die Normalparabel mit der Gleichung f: $y = x^2$ wird durch eine Streckung mit dem Faktor $a = -2$ in die Parabel f_1 überführt.
Bestimme die Funktionsgleichung sowie den Scheitelpunkt und gib die Symmetrieachse der Parabel f_1 an.

105 Die Parabel mit der Funktionsgleichung f: $y = (x-s)^2 + t$ hat die Gerade g: $x = 3$ als Symmetrieachse und verläuft durch den Punkt $P(2|-1)$.
Bestimme die Funktionsgleichung f und den Scheitelpunkt S.

106 Eine Parabel, die nur durch Verschiebungen der Normalparabel längs der x- und y-Achse entstanden ist, hat den Scheitelpunkt $S(-3|-1)$.
Bestimme die allgemeine Form der Parabel.

107 Bringe die Funktionsgleichung jeweils auf die Scheitelpunktform und gib den Scheitelpunkt $S(s\,|\,t)$ an.
Erstelle eine Wertetabelle für $s-3 \le x \le s+3$ und zeichne die Parabel in ein Koordinatensystem.

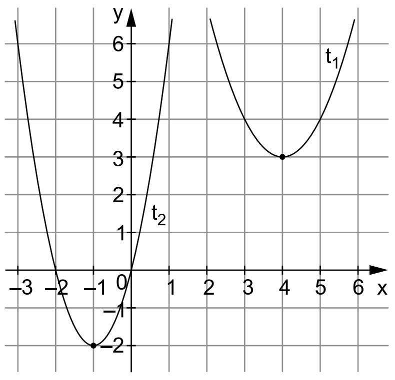
a) $f_1: y = x^2 - 8x + 14$ b) $f_2: y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$

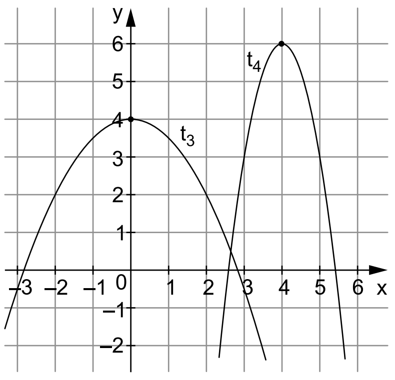
108 Die Punkte $P_1(2\,|\,-3)$ und $P_2(6\,|\,5)$ liegen auf dem Graphen einer verschobenen Normalparabel mit der Gleichung f: $y = x^2 + bx + c$.
Bestimme die Koeffizienten b und c der Funktionsgleichung sowie den Scheitelpunkt der Parabel.

109 Bringe die gegebene allgemeine Form auf die Scheitelpunktform und gib den Scheitelpunkt S sowie die Symmetrieachse s an.
Wie geht die zugehörige Parabel aus der Normalparabel $y = x^2$ hervor?

a) $f_1: y = x^2 - 8x + 15{,}5$ b) $f_2: y = -3x^2 - 36x - 159$

110 Bestimme anhand der Graphen die Funktionsgleichungen der dargestellten Parabeln.





Interaktive Aufgaben

- 9. Parabel zuordnen
- 10. Parabel zeichnen
- 11. Scheitel bestimmen
- 12. Extremwert
- 13. T-Shirt-Kanone

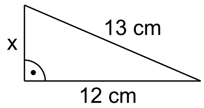
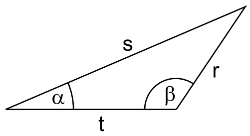
Mittlerer Schulabschluss Hamburg
Mathematik 2018

Aufgabe I – ohne Taschenrechner zu bearbeiten

20 Punkte

1. Von den jeweils angebotenen Lösungen ist immer genau eine richtig. Schreibe den zugehörigen Buchstaben **A**, **B**, **C** oder **D** in die Spalte „Lösung". Eine Begründung wird nicht verlangt.

	Aufgabe	**A**	**B**	**C**	**D**	**Lösung**
a)	1 245 – 649 =	576	586	596	606	
b)	Rundet man 12 400 auf Zehntausender, erhält man	10 000	11 000	12 000	13 000	
c)	Das folgende Rechteck hat einen Umfang von 	9,5 m	19 m	9,5 m^2	21 m^2	
d)	$0{,}2 \cdot 0{,}8 =$	0,0016	0,016	0,16	1,6	
e)	$\frac{2}{5} + \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{30}$	
f)	19 % von 250 €	19 €	38,50 €	47,50 €	63 €	
g)	Das Netz eines Kegels besteht aus	einem Kreis und einem Kreissektor	zwei Kreisen	einem Kreis und einem Rechteck	einem Kreis und einem Dreieck	
h)	Ein überstumpfer Winkel ist	zweimal so groß wie ein rechter Winkel	größer als 180° und kleiner als 360°	kleiner als 90°	genau 135° groß	
i)	$4 \cdot (x-5) =$	$4x-5$	$4x-1$	$4x-20$	$(x-5)^4$	
j)	In einem Beutel befinden sich 3 blaue und 4 rote Kugeln. Man zieht nacheinander zweimal eine Kugel ohne Zurücklegen. P(blau, blau) =	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$	$\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7} + \frac{2}{6}$	

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
k)	$2+(-6)\cdot(-5)-10=$	-38	10	22	42	
l)	Das größte Volumen ist	50 cm^3	5 dm^3	5 $m\ell$	0,5 ℓ	
m)	Der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x)=x^2+1$	ist eine nach unten geöffnete Parabel	hat die Nullstelle $x=-1$	ist eine Gerade	hat keine Nullstellen	
n)	Beim folgenden Dreieck gilt 	$x=1$ cm	$x=5$ cm	$x=11$ cm	$x=25$ cm	
o)	 Bei diesem Dreieck gilt: $\frac{\sin\alpha}{r}=$	$\frac{\sin\beta}{r}$	$\frac{r}{\sin\beta}$	$\frac{\sin\beta}{s}$	$\frac{s}{\sin\beta}$	
p)	Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf von drei normalen Spielwürfeln genau zweimal „1“ zu erhalten, beträgt	$3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{1+1+5}{6}$	
q)	Der kleinste Wert ist	$\sqrt{45}$	7	2^3	6,99	
r)	$\sin\alpha>1$, dann gilt	Gegenkathete = Ankathete	Gegenkathete > Ankathete	Gegenkathete < Ankathete	Diesen Fall gibt es nicht.	
s)	$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$ Dann gilt: $r=$	$\sqrt{\frac{1}{3}\cdot V\cdot\pi\cdot h}$	$\sqrt{\frac{1}{3\cdot V\cdot\pi\cdot h}}$	$\sqrt{\frac{\pi\cdot h}{3\cdot V}}$	$\sqrt{\frac{3\cdot V}{\pi\cdot h}}$	
t)	Verdoppelt man den Radius eines Zylinders, so wird das Volumen	um 50 % größer	verdoppelt	dreimal so groß	viermal so groß	

Aufgabe IV – Leitidee Daten und Zufall

Staffelmeisterschaft

Bei der Staffelmeisterschaft einer Stadtteilschule waren 652 Schülerinnen und 788 Schüler als jugendliche Zuschauer anwesend.

4 Punkte a) • **Bestätige**, dass insgesamt 1 440 Schülerinnen und Schüler als jugendliche Zuschauer bei der Staffelmeisterschaft waren.
- **Berechne** den prozentualen Anteil der Mädchen bei den jugendlichen Zuschauern.

4 Punkte b) Zusätzlich waren auch Erwachsene als Zuschauer anwesend.
Bestimme anhand des Kreisdiagramms in Abbildung 1 die Anzahl der Erwachsenen.

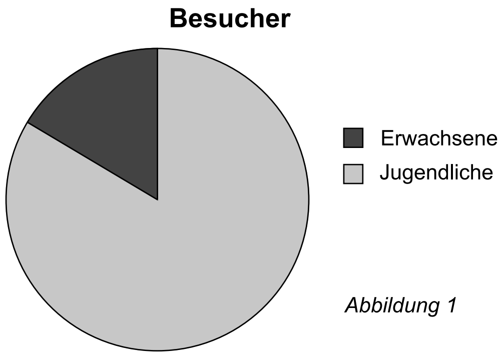


Abbildung 1

3 Punkte c) Vier Läuferinnen der 10f liefen unterschiedliche Zeiten zwischen 13,5 Sekunden und 16 Sekunden.
Ihre durchschnittliche Zeit lag bei 14,8 Sekunden.
Gib eine mögliche Verteilung der Zeiten für die vier Läuferinnen **an**.

Läuferin 1	Läuferin 2	Läuferin 3	Läuferin 4
13,8 Sekunden	______ Sekunden	______ Sekunden	______ Sekunden

Zusätzlich wird die „4-mal-100-m-Staffel“ gelaufen und die Klasse 10b gewinnt.
Bei der Siegerehrung stellen sich die 4 Läufer der Klasse 10b in zufälliger Reihenfolge nebeneinander auf ihr Siegerpodest (siehe Abbildung 2).

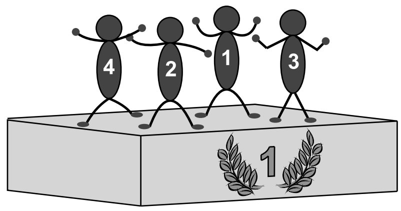


Abbildung 2

6 Punkte d) • **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit, dass der Läufer 3 ganz rechts steht, als Bruch, Dezimalzahl und in Prozent.
- **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass der Läufer 1 an der zweiten oder dritten Stelle von links auf dem Siegerpodest steht.

5 Punkte e) Florian behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, dass die 4 Läufer von links nach rechts <u>nicht</u> in der Reihenfolge ihrer Startposition auf dem Siegerpodest nebeneinander stehen, liegt bei über 90 %.“
Beurteile seine Aussage.