

2020 MSA

Mittlerer Schulabschluss



**MEHR
ERFAHREN**

Hamburg

Mathematik

- + Basiswissen mit Übungen
- + Formelsammlung
- + Original-Prüfungen



STARK

Inhalt

Vorwort

Hinweise und Tipps

1	Wie läuft die Prüfung ab?	I
2	Welche Arbeitsaufträge werden gestellt?	I
3	Wie man für die Prüfung lernen kann	IV
4	Das Lösen einer mathematischen Aufgabe	V
5	Übungen mit dem Taschenrechner	VIII
6	Formelsammlung	XI

Training

1	Wiederholung Grundwissen	2
1.1	Terme	2
	Termumformungen	3
	Zerlegung von Termen in Produkte – Faktorisieren	8
	Bruchterme	9
1.2	Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen	13
	Textaufgaben mithilfe von Gleichungen lösen	14
1.3	Proportionale und antiproportionale Zuordnungen	16
	Proportionale Zuordnungen	16
	Nicht proportionale Zuordnungen	17
	Antiproportionale Zuordnungen	17
1.4	Prozent- und Zinsrechnung	18
1.5	Umrechnungen von Größen	24
1.6	Ebene Figuren	26
1.7	Potenzen und Wurzeln	29
	Gesetze für das Rechnen mit Potenzen	29
	Sehr große und sehr kleine Zahlen	31
	Gleichungen mit Potenzen der Form $x^n=a$	32
2	Lineare Funktionen und lineare Gleichungssysteme	33
2.1	Die lineare Funktion	33
	Lineare Funktionen der Form $f: y=mx$	34
	Allgemeine lineare Funktionen $f: y=mx+n$	36
2.2	Lineare Gleichungssysteme	39
	Grafische Lösungsverfahren	39
	Rechnerische Lösungsverfahren	40

3	Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen	43
3.1	Quadratische Funktionen	43
	Die quadratische Funktion $f: y=x^2$	43
	Quadratische Funktionen der Form $f: y=ax^2$	43
	Quadratische Funktionen der Form $f: y=x^2+t$	45
	Quadratische Funktionen der Form $f: y=(x-s)^2$	47
	Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion	48
	Methode der quadratischen Ergänzung	49
3.2	Quadratische Gleichungen	51
	Reinquadratische Gleichungen $x^2-q=0$	51
	Quadratische Gleichungen $x^2+px=0$	52
	Quadratische Gleichungen in Normalform $x^2+px+q=0$	53
3.3	Nullstellen einer Parabel	55
3.4	Schnittpunkte zwischen Parabel und Gerade	58
4	Exponentialfunktionen und Wachstumsprozesse	61
4.1	Exponentialfunktionen	61
	Exponentialfunktionen mit der Gleichung $f: y=a^x$	62
	Exponentialfunktionen mit der Gleichung $f: y=c \cdot a^x$	62
4.2	Wachstumsprozesse	65
5	Ähnlichkeit	70
5.1	Vergrößern und Verkleinern von Figuren – Ähnliche Figuren	70
5.2	Strahlensätze	77
6	Sätze am rechtwinkligen Dreieck	81
6.1	Der Satz des Pythagoras	81
6.2	Der Satz des Thales	84
7	Trigonometrie	86
7.1	Trigonometrische Funktionen am rechtwinkligen Dreieck	86
7.2	Sinussatz – Berechnungen an beliebigen Dreiecken	94
8	Kreis	97
8.1	Kreisfläche und Kreisumfang, Kreisring	97
8.2	Kreisbögen und Kreissektor, Berechnungen am Kreis und an Kreisteilen	100
9	Körper	103
9.1	Schrägbild und Netz eines Körpers	103
	Zeichnen eines Schrägbildes	103
9.2	Prisma	106
9.3	Zylinder	111
9.4	Pyramide	114
9.5	Kegel	118
9.6	Kugel	122

10 Wahrscheinlichkeitsrechnung	125
10.1 Statistische Grundbegriffe	125
10.2 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	129
10.3 Die Wahrscheinlichkeit bei Zufallsexperimenten	130
10.4 Wahrscheinlichkeit und das Gesetz der großen Zahlen	133
10.5 Mehrstufige Zufallsexperimente	134
11 Grafische Darstellungen und Diagramme	137
11.1 Interpretation von grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge	137
Lineares Wachstum, lineare Abnahme	139
Nicht lineares Wachstum	144
11.2 Analyse grafischer Darstellungen bei statistischen Datenerhebungen	147

Abschlussprüfungen

Abschlussprüfung 2014	2014-1
Abschlussprüfung 2015	2015-1
Abschlussprüfung 2016	2016-1
Abschlussprüfung 2017	2017-1
Abschlussprüfung 2018	2018-1
Abschlussprüfung 2019	2019-1



Dein Coach zum Erfolg: Mit dem **Interaktiven Training** kannst du online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet. Am besten gleich ausprobieren! 
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autoren:

Peter Stählin, Christoph Borr, Jörg Collenburg, Doris Cremer, Olaf Klärner,
Karl-Heinz Kuhlmann, Kerstin Lenz, Wolfgang Matschke, Marc Möllers,
Heike Ohrt, Dietmar Steiner

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit vorliegendem Buch kannst du dich in Mathematik auf die Prüfung zum **mittleren Schulabschluss** vorbereiten. (Früher hieß diese Prüfung noch Realschulabschluss bzw. Mittlere Reife.)

In Hamburg wird der mittlere Schulabschluss nach erfolgreicher Teilnahme an einer mündlichen und schriftlichen Abschlussprüfung vergeben. Die Aufgaben der schriftlichen Prüfung werden zentral für alle Schulen in Hamburg von der Behörde für Schule und Berufsbildung erstellt. Gerade bei einer zentral gestellten Prüfung ist das **Grundlagenwissen** besonders wichtig. Denn es geht nicht um irgendwelche Spezialkenntnisse, die du vielleicht gut beherrschst, sondern die Aufgaben in der Prüfung bauen auf einem breiten Grundlagenwissen auf. Es geht vor der Prüfung also um eine Gesamtwiederholung.

- ▶ Daher beginnen wir in diesem Buch mit einem ausführlichen **Trainingsteil**. Im ersten Kapitel werden die wichtigsten **Themen der 5. bis 9. Klasse** so kurz wie möglich **wiederholt**, die Kapitel 2 bis 11 behandeln intensiv **sämtliche prüfungsrelevanten Bereiche der 9. und 10. Klasse**. Insgesamt findest du über **200 Aufgaben**, anhand derer du überprüfen kannst, ob du den Stoff sicher beherrschst. Grundlage der schriftlichen Prüfung ist der Bildungsplan Mathematik.
- ▶ Wenn die einzelnen Themen „sitzen“, du die Aufgaben also lösen kannst, geht es weiter mit den **Original-Abschlussprüfungen 2014 bis 2019**. Schaffst du es, diese in der vorgegebenen Zeitspanne und nur mit den zulässigen Hilfsmitteln zu bearbeiten, bist du optimal vorbereitet.

In der Prüfung hast du 155 Minuten Zeit. Wenn du beim Üben anfangs die Aufgaben innerhalb dieser Zeit nicht schaffst, solltest du die Abschlussprüfungen in Abständen wiederholen, bis du sicher bist und die Aufgaben richtig und in der vorgesehenen Zeit löst. Wenn du merkst, dass du immer wieder über dasselbe Problem stolperst, solltest du das entsprechende Trainingskapitel wiederholen.

Zu allen Aufgaben des Trainingsteils und zu den Original-Aufgaben der Abschlussprüfungen gibt es **ausführliche Lösungen** in einem **separaten Buch** (Bestell-Nr. 21500L), die jeden Rechenschritt genau erklären. Dabei wird besonderer Wert auf die Lösungsansätze und Vorüberlegungen gelegt. Zur Veranschaulichung und dem besseren Verständnis der Lösungen helfen dir zahlreiche Skizzen.

Zuerst solltest du selbst die Lösung finden und dann mit dem Buch vergleichen. Nur was du dir selbst erarbeitet hast, bleibt im Gedächtnis und du lernst dazu. Halte dich deswegen konsequent daran, jede Aufgabe zunächst selbst zu rechnen.

Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrschst, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet. Du wirst sehen: Übung macht den Meister!

Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion

Merke

Quadratische Funktionen der Form $f: y = a(x - s)^2 + t$

- Die Form $y = a(x - s)^2 + t$ heißt **Scheitelpunktform**, weil man daraus die Koordinaten des Scheitelpunktes direkt ablesen kann:

$$y = a(x - s)^2 + t$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$S(s \mid t) \quad \text{Scheitelpunkt der Parabel}$$
- Die Graphen der Funktionen $y = a(x - s)^2 + t$ erhält man, wenn man die Normalparabel mit dem **Faktor a streckt bzw. staucht** und anschließend **längs der x-Achse um s (LE)** und **längs der y-Achse um t (LE)** verschiebt. Für $a < 0$ ist der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

Beispiele

- a) $f: y = x^2$ mit $a = 1; s = 0; t = 0$
b) $f_1: y = 2(x - 6)^2 + 4$ mit $a = 2; s = 6; t = 4$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$S(6 \mid 4)$$

c) $f_2: y = 0,5(x + 2)^2 - 3$ mit $a = 0,5; s = -2; t = -3$

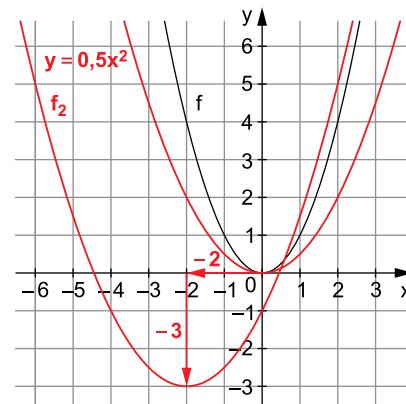
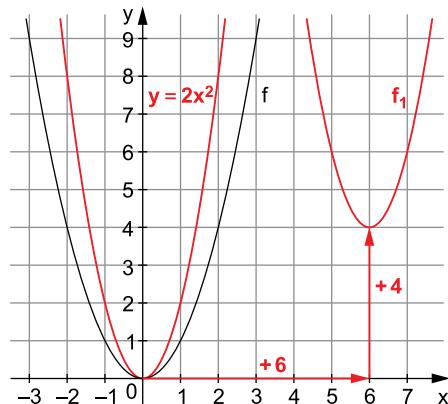
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$S(-2 \mid -3)$$

Wertetabelle

	x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	y	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36		
f_1	y							76	54	36	22	12	6	4	6	12
f_2	y	5	1,5	-1	-2,5	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15				

Graphen



Multipliziert man die Klammer in der Scheitelpunktform aus und fasst zusammen, so erhält man die **allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$** der quadratischen Funktion.

Beispiele

$y = 2(x - 6)^2 + 4$ $y = 2(x^2 - 12x + 36) + 4$ $y = 2x^2 - 24x + 72 + 4$ $y = 2x^2 - 24x + 76$	$y = 0,5(x + 2)^2 - 3$ $y = 0,5(x^2 + 4x + 4) - 3$ $y = 0,5x^2 + 2x + 2 - 3$ $y = 0,5x^2 + 2x - 1$
---	---

Umgekehrt kann man jede quadratische Funktion, die in allgemeiner Form gegeben ist, durch die **Methode der quadratischen Ergänzung** in die Scheitelpunktform überführen.

Methode der quadratischen Ergänzung**Beispiele**

1. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 11$ Allgemeine Form

$$y = \frac{1}{2} \cdot [x^2 - 8x + 22]$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 - 8x + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 22 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 \right]$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot [\underbrace{x^2 - 8x + 16}_{\text{Binom}} + 22 - 16]$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot [\overbrace{(x-4)^2} + 6]$$

$$y = \frac{1}{2}(x-4)^2 + 3$$

Scheitelpunkt: $S(4|3)$

Scheitelpunktform

2. $y = -2x^2 - 20x - 58$ Allgemeine Form

$$y = -2 \cdot [x^2 + 10x + 29]$$

$$y = -2 \cdot [\underbrace{x^2 + 10x + 25}_{\text{Binom}} + 29 - 25]$$

$$y = -2 \cdot [(x+5)^2 + 4]$$

$$y = -2(x+5)^2 - 8$$

Scheitelpunktform

Scheitelpunkt: $S(-5|-8)$ **Merke****Scheitelpunktform und allgemeine Form**

- Eine quadratische Funktion kann in der **allgemeinen Form** $y = ax^2 + bx + c$ oder in der **Scheitelpunktform** $y = a(x-s)^2 + t$ angegeben werden.
- Die Scheitelpunktform kann durch **Ausmultiplizieren** in die allgemeine Form umgewandelt werden.
- Die allgemeine Form kann durch **quadratische Ergänzung** auf die Scheitelpunktform gebracht werden.

Aufgaben**104**

Die Normalparabel mit der Gleichung $f: y = x^2$ wird durch eine Streckung mit dem Faktor $a = -2$ in die Parabel f_1 überführt.

Bestimme die Funktionsgleichung sowie den Scheitelpunkt und gib die Symmetriearchse der Parabel f_1 an.

105

Die Parabel mit der Funktionsgleichung $f: y = (x-s)^2 + t$ hat die Gerade $g: x=3$ als Symmetriearchse und verläuft durch den Punkt $P(2|-1)$.

Bestimme die Funktionsgleichung f und den Scheitelpunkt S .

106

Eine Parabel, die nur durch Verschiebungen der Normalparabel längs der x - und y -Achse entstanden ist, hat den Scheitelpunkt $S(-3|-1)$.

Bestimme die allgemeine Form der Parabel.

107

Bringe die Funktionsgleichung jeweils auf die Scheitelpunktform und gib den Scheitelpunkt $S(s|t)$ an.

Erstelle eine Wertetabelle für $s - 3 \leq x \leq s + 3$ und zeichne die Parabel in ein Koordinatensystem.

a) $f_1: y = x^2 - 8x + 14$

b) $f_2: y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$

108

Die Punkte $P_1(2|-3)$ und $P_2(6|5)$ liegen auf dem Graphen einer verschobenen Normalparabel mit der Gleichung $f: y = x^2 + bx + c$.

Bestimme die Koeffizienten b und c der Funktionsgleichung sowie den Scheitelpunkt der Parabel.

109

Bringe die gegebene allgemeine Form auf die Scheitelpunktform und gib den Scheitelpunkt S sowie die Symmetriechse s an.

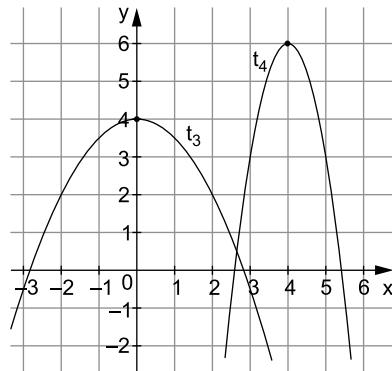
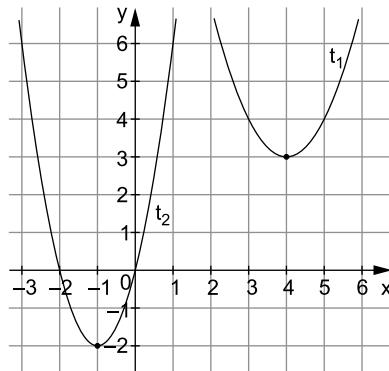
Wie geht die zugehörige Parabel aus der Normalparabel $y = x^2$ hervor?

a) $f_1: y = x^2 - 8x + 15,5$

b) $f_2: y = -3x^2 - 36x - 159$

110

Bestimme anhand der Graphen die Funktionsgleichungen der dargestellten Parabeln.



Interaktive Aufgaben

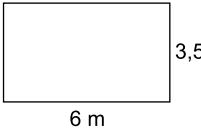
- 9. Parabel zuordnen
- 10. Parabel zeichnen
- 11. Scheitel bestimmen
- 12. Extremwert
- 13. T-Shirt-Kanone

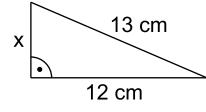
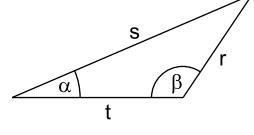
Mittlerer Schulabschluss Hamburg
Mathematik 2018

20 Punkte

Aufgabe I – ohne Taschenrechner zu bearbeiten

1. Von den jeweils angebotenen Lösungen ist immer genau eine richtig. Schreibe den zugehörigen Buchstaben **A**, **B**, **C** oder **D** in die Spalte „Lösung“. Eine Begründung wird nicht verlangt.

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
a)	$1\,245 - 649 =$	576	586	596	606	
b)	Rundet man 12 400 auf Zehntausender, erhält man	10 000	11 000	12 000	13 000	
c)	Das folgende Rechteck hat einen Umfang von  6 m	9,5 m	19 m	9,5 m ²	21 m ²	
d)	$0,2 \cdot 0,8 =$	0,0016	0,016	0,16	1,6	
e)	$\frac{2}{5} + \frac{1}{6} =$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{17}{30}$	
f)	19 % von 250 €	19 €	38,50 €	47,50 €	63 €	
g)	Das Netz eines Kegels besteht aus	einem Kreis und einem Kreissektor	zwei Kreisen	einem Kreis und einem Rechteck	einem Kreis und einem Dreieck	
h)	Ein überstumpfer Winkel ist	zweimal so groß wie ein rechter Winkel	größer als 180° und kleiner als 360°	kleiner als 90°	genau 135° groß	
i)	$4 \cdot (x - 5) =$	$4x - 5$	$4x - 1$	$4x - 20$	$(x - 5)^4$	
j)	In einem Beutel befinden sich 3 blaue und 4 rote Kugeln. Man zieht nacheinander zweimal eine Kugel ohne Zurücklegen. $P(\text{blau, blau}) =$	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$	$\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$	$\frac{3}{7} + \frac{2}{6}$	

	Aufgabe	A	B	C	D	Lösung
k)	$2 + (-6) \cdot (-5) - 10 =$	-38	10	22	42	
l)	Das größte Volumen ist	50 cm^3	5 dm^3	5 ml	$0,5 \ell$	
m)	Der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2 + 1$	ist eine nach unten geöffnete Parabel	hat die Nullstelle $x = -1$	ist eine Gerade	hat keine Nullstellen	
n)	Beim folgenden Dreieck gilt 	$x = 5 \text{ cm}$	$x = 11 \text{ cm}$	$x = 25 \text{ cm}$		
o)	 Bei diesem Dreieck gilt: $\frac{\sin \alpha}{r} =$	$\frac{\sin \beta}{r}$	$\frac{r}{\sin \beta}$	$\frac{\sin \beta}{s}$	$\frac{s}{\sin \beta}$	
p)	Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf von drei normalen Spielwürfeln genau zweimal „1“ zu erhalten, beträgt	$3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{1+1+5}{6}$	
q)	Der kleinste Wert ist	$\sqrt{45}$	7	2^3	6,99	
r)	$\sin \alpha > 1$, dann gilt	Gegenkathete = Ankathete	Gegenkathete > Ankathete	Gegenkathete < Ankathete	Diesen Fall gibt es nicht.	
s)	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ Dann gilt: $r =$	$\sqrt{\frac{1}{3} \cdot V \cdot \pi \cdot h}$	$\sqrt{\frac{1}{3 \cdot V \cdot \pi \cdot h}}$	$\sqrt{\frac{\pi \cdot h}{3 \cdot V}}$	$\sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$	
t)	Verdoppelt man den Radius eines Zylinders, so wird das Volumen	um 50 % größer	verdoppelt	dreimal so groß	viermal so groß	

Aufgabe IV – Leitidee Daten und Zufall

Staffelmeisterschaft

Bei der Staffelmeisterschaft einer Stadtteilschule waren 652 Schülerinnen und 788 Schüler als jugendliche Zuschauer anwesend.

- 4 Punkte a) • **Bestätige**, dass insgesamt 1 440 Schülerinnen und Schüler als jugendliche Zuschauer bei der Staffelmeisterschaft waren.
• **Berechne** den prozentualen Anteil der Mädchen bei den jugendlichen Zuschauern.

- 4 Punkte b) Zusätzlich waren auch Erwachsene als Zuschauer anwesend.
Bestimme anhand des Kreisdiagramms in Abbildung 1 die Anzahl der Erwachsenen.

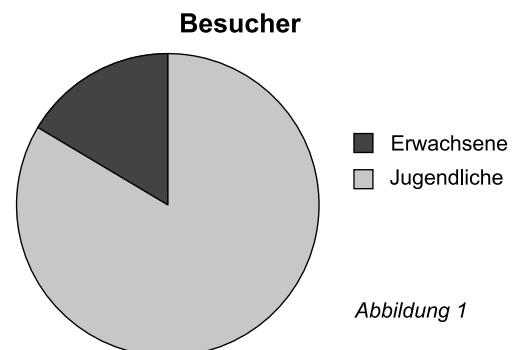


Abbildung 1

- 3 Punkte c) Vier Läuferinnen der 10f liefen unterschiedliche Zeiten zwischen 13,5 Sekunden und 16 Sekunden.
Ihre durchschnittliche Zeit lag bei 14,8 Sekunden.

Gib eine mögliche Verteilung der Zeiten für die vier Läuferinnen **an**.

Läuferin 1	Läuferin 2	Läuferin 3	Läuferin 4
13,8 Sekunden	_____ Sekunden	_____ Sekunden	_____ Sekunden

Zusätzlich wird die „4-mal-100-m-Staffel“ gelaufen und die Klasse 10b gewinnt.

Bei der Siegerehrung stellen sich die 4 Läufer der Klasse 10b in zufälliger Reihenfolge nebeneinander auf ihr Siegerpodest (siehe Abbildung 2).

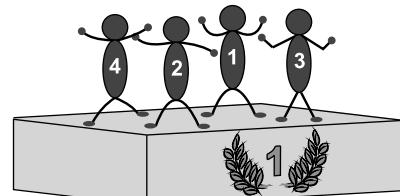


Abbildung 2

- 6 Punkte d) • **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit, dass der Läufer 3 ganz rechts steht, als Bruch, Dezimalzahl und in Prozent.
• **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass der Läufer 1 an der zweiten oder dritten Stelle von links auf dem Siegerpodest steht.
- 5 Punkte e) Florian behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, dass die 4 Läufer von links nach rechts nicht in der Reihenfolge ihrer Startposition auf dem Siegerpodest nebeneinander stehen, liegt bei über 90 %.“
Beurteile seine Aussage.

© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK