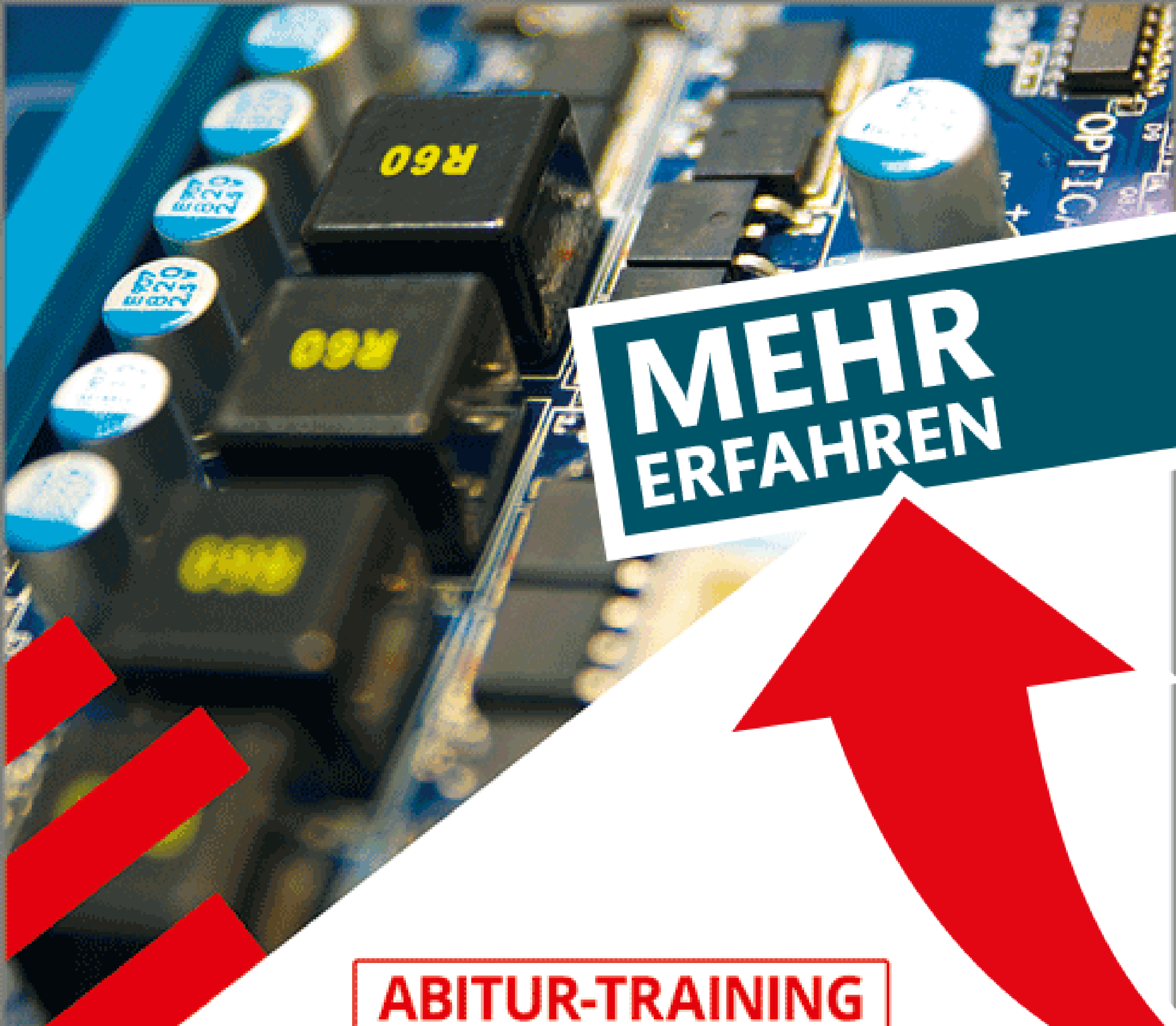


MEHR ERFAHREN

ABITUR-TRAINING

Gymnasium

Anwendungsaufgaben

STARK

Inhalt

Autoren:
Eberhard Endres, Bernhard Schmidt

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

viele Aufgabenstellungen in der Mathematik enthalten einen mehr oder weniger komplexen Anwendungsbezug. Da solche Aufgaben oft als schwierig empfunden werden, diese aber zugleich vermehrt an Bedeutung gewinnen, bietet Ihnen dieser Übungsband Hilfestellungen und Herangehensweisen für typische Anwendungsaufgaben.

Der Aufbau des Buches gibt Ihnen die Möglichkeit, gezielt bestimmte Themengebiete durchzuarbeiten oder aber Ihr Können an den komplexeren vermischten Aufgaben zu testen und anschließend bei Bedarf einzelne Themengebiete nochmals genauer zu bearbeiten:

- Im ersten Abschnitt **Umgang mit Anwendungsaufgaben** wird dargestellt, worum es bei anwendungsorientierten Aufgaben geht und welche allgemeinen Lösungsstrategien es für diese Art von Aufgaben gibt. Diesen Abschnitt sollten Sie auf jeden Fall vorab lesen, da im gesamten Buch auf den dort beschriebenen **Modellierungskreislauf** Bezug genommen wird.

- Die Abschnitte im Kapitel **Anwendungsgebiete** behandeln acht typische Themengebiete, zu denen Anwendungsaufgaben gestellt werden. Dabei wird jeweils von der konkreten Anwendungssituation ausgegangen und häufig auftretende Fragestellungen werden an **Musteraufgaben** ausführlich gelöst. Die Lösung folgt stets genau der im ersten Abschnitt dargestellten allgemeinen Lösungsstrategie anhand des Modellierungskreislaufs. In den **Übungsaufgaben** zu den Themengebieten steht die Mathematisierung des jeweiligen Problems, d. h. die Übersetzung in ein mathematisches Modell, im Vordergrund.

- Abgerundet wird das Buch durch eine **Aufgabensammlung**, die komplexere Anwendungsaufgaben mit vermischten Fragestellungen enthält, bei denen Sie die passenden Lösungsstrategien finden und anwenden müssen. Hier geht es vorwiegend darum, unterschiedliche Fragestellungen zu einer Anwendungssituation richtig zu interpretieren und zu beantworten.

- Zu allen Aufgaben finden Sie am Ende des Buches **ausführliche und vollständige Lösungen**. Dabei wird bei den Lösungen zu den Übungsaufgaben noch genauer auf die einzelnen Schritte des Modellierungskreislaufs eingegangen, während bei den Lösungen der Aufgabensammlung die Darstellung verschiedener Lösungsansätze oder Modellierungen im Vordergrund steht.

- (Teil-)Aufgaben, deren Lösung eine Berechnung erfordern, die nur mit einem Hilfsmittel wie einem grafischen Taschenrechner durchgeführt werden kann, sind durch ein **Rechnersymbol** am linken Rand gekennzeichnet. Selbst wenn Sie kein entsprechendes Hilfsmittel einsetzen (können), sollten Sie diese Aufgabenteile nicht einfach weglassen, sondern zumindest versuchen, die nötigen Vorüberlegungen sowie ggf. den richtigen Ansatz zur Berechnung aufzustellen. Gerade diese „Übersetzung" des Aufgabentextes in die Sprache der Mathematik ist die eigentliche Schwierigkeit der meisten Anwendungsaufgaben.

Die einzelnen Kapitel und Aufgaben des Buches können vollständig separat bearbeitet werden, jedoch sollten Sie den ersten Abschnitt des Buches vorab lesen und bei der weiteren Arbeit mit diesem Buch bei Bedarf auch immer wieder darauf zurückgreifen. Es steht Ihnen frei, über die Geschwindigkeit und Schwerpunkte der Bearbeitung selbst zu entscheiden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Buch.

Eberhard Endres	Bernhard Schmidt
Eberhard Endres	Bernhard Schmidt

3 Größen und ihre Änderungen

Bei vielen Problemstellungen werden Zusammenhänge zwischen Größen und deren Änderungen betrachtet. Oft ist dabei die Änderung einer Größe im Lauf der Zeit bekannt und man möchte Rückschlüsse auf die Größe selbst gewinnen.
Dies lässt sich am besten mit einem kleinen Beispiel veranschaulichen:

Man kennt die Zuflussgeschwindigkeit, mit der eine Badewanne innerhalb eines bestimmten Zeitraums befüllt wird, und möchte die Wassermenge bestimmen, die sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Badewanne befindet.

In der Mathematik werden diese Fragestellungen durch die Analysis abgedeckt; die Änderung einer Größe im Lauf der Zeit nennt man „Änderungsrate der Größe“. Analoge Fragestellungen mit anderen Größen ergeben sich z. B. aus folgenden Zusammenhängen:

Änderungsrate einer Größe	daraus resultierende Größe
Zuflussgeschwindigkeit von Wasser in die Badewanne als Funktion der Zeit	Wassermenge, die sich in einem bestimmten Zeitraum in der Badewanne ansammelt
Geschwindigkeit, mit der ein Pkw fährt, in Abhängigkeit von der Zeit	die in einem bestimmten Zeitraum zurückgelegte Wegstrecke
Wachstumsgeschwindigkeit eines Baumes als Funktion der Zeit	die in einem bestimmten Zeitraum daraus resultierende Zunahme der Baumhöhe
Zuwachsrate von Individuen, z. B. von Bakterien, als Funktion der Zeit	die in einem bestimmten Zeitraum erhaltene Zunahme der Individuenzahl
Zerfallsrate bei einem radioaktiven Stoff als Funktion der Zeit	Anzahl der in einem bestimmten Zeitraum zerfallenen Atome

Prinzipiell bieten sich für die Berechnung der resultierenden Größe (z. B. der Wassermenge in der Badewanne) zwei Strategien an:
Strategie 1: Berechnung durch Summation
Strategie 2: Berechnung durch Integration

Um die passende Strategie für die jeweilige Problemstellung zu finden, können Sie nach folgenden Entscheidungsfragen vorgehen.

1. Entscheidungsfrage: Ist die Änderungsrate konstant?
In diesem Fall lässt sich die resultierende Größe durch ein Produkt bestimmen
$\Rightarrow$ vereinfachte Strategie 1

Beträgt in obigem Beispiel die Zuflussgeschwindigkeit in die Badewanne konstant 5 Liter pro Minute, dann fließen in 12 Minuten insgesamt $5\,\frac{\text{Liter}}{\text{min}} \cdot 12\text{ min} = 60\text{ Liter}$ in die Badewanne.

Ist die Änderungsrate nicht konstant, muss man eine weitere Entscheidung treffen.

2. Entscheidungsfrage: Ist ein Funktionsterm für die Änderungsrate gegeben oder soll dieser aufgrund von Messwerten bestimmt werden und wird ein möglichst exakter Wert für die resultierende Größe verlangt?
Beantworten Sie beide Fragen mit „ja“, sollte die Berechnung durch Integration (entweder über die Stammfunktion oder mithilfe eines GTR/CAS) durchgeführt werden $\Rightarrow$ Strategie 2
Genügt jedoch eine Abschätzung oder überschlägige Bestimmung für die resultierende Größe, kann man auch auf die Methode der Summation geeigneter Werte bzw. Mittelwerte zurückgreifen $\Rightarrow$ Strategie 1

Erhöht sich z. B. die Zuflussrate des Wassers in die Badewanne linear mit der Zeit und ist durch die Funktion $r(t) = 6t$ (t in min, r(t) in $\frac{\text{Liter}}{\text{min}}$) gegeben, dann kann man mithilfe des gegebenen Funktionsterms Strategie 2 anwenden und die innerhalb der ersten 8 Minuten in die Badewanne geflossene Wassermenge bestimmen durch:

$$W = \int_0^8 r(t)\,dt = \int_0^8 6t\,dt = \left[3t^2\right]_0^8 = 192 \text{ [Liter]}$$

Möchte man nur einen Näherungswert für die Wassermenge erhalten, dann genügt mithilfe der nachfolgenden Wertetabelle eine einfache Überlegung (Strategie 1):

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r(t)	0	6	12	18	24	30	36	42	48

In der ersten Minute wächst der Zufluss von anfangs 0 Liter pro Minute auf 6 Liter, sodass man durchschnittlich 3 Liter pro Minute als Zuflussrate in der ersten Minute annehmen kann. Entsprechend verfährt man in den weiteren 7 Minuten und erhält damit folgende durchschnittliche Zuflussraten $\overline{r}$ in der jeweiligen Minute:

t	0 … 1	1 … 2	2 … 3	3 … 4	4 … 5	5 … 6	6 … 7	7 … 8
$\overline{r}$	3	9	15	21	27	33	39	45

Somit erhält man näherungsweise einen Gesamtzufluss von:
$Z = 3 + 9 + 15 + 21 + 27 + 33 + 39 + 45 = 192$ (Liter)

Da hierbei in jeder Minute eine gleichbleibende Zuflussrate angenommen wurde, die Zuflussrate also in diesem Zeitraum konstant bleibt, kann für jede Minute eine Multiplikation (vereinfachte Strategie 1) angewendet werden. (Z. B. floss in der 3. Minute (von $t=2$ bis $t=3$) in dieser Näherung das Wasser eine Minute lang konstant mit 15 Litern pro Minute ein, sodass sich in dieser Minute der Wasserstand um $15\,\frac{\text{Liter}}{\text{min}} \cdot 1\text{ min} = 15\text{ Liter}$ erhöhte.) Die Näherungswerte für die einzelnen Minuten müssen dann noch addiert („summiert“) werden.

Im Beispiel stimmt der so ermittelte Näherungswert (wegen der linearen Zunahme der Zuflussrate) sogar exakt mit der genauen Wassermenge überein.

Zusammenfassung:
Allgemein besteht folgender Zusammenhang, auf dem die mathematische Lösung entsprechender Fragestellungen beruht:

Wenn eine Funktion f die **Änderungsrate** einer Größe pro bestimmter Zeiteinheit darstellt, dann entspricht der in einem Zeitintervall [a; b] resultierende **rekonstruierte Bestand** bzw. **Zuwachs des Bestands** stets dem Integral $Z = \int_a^b f(t)\,dt$.

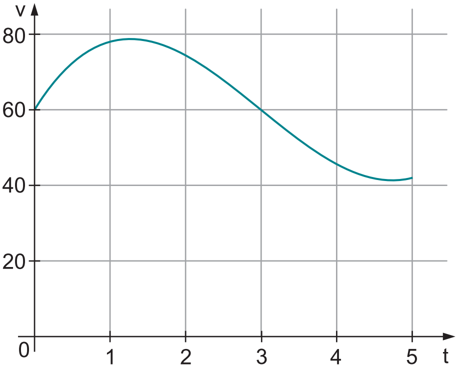
Ersetzt man dabei eine kontinuierlich variierende Änderungsrate durch eine geeignete zeitweilig konstant bleibende Änderungsrate (Näherungsverfahren z. B. durch Mittelwertbildung der Änderungsrate), dann kann man die Integration durch die entsprechende Summation über die Zeitintervalle mit konstanter Änderungsrate durchführen.

Im Normalfall sollten Sie Problemstellungen dieser Art durch Integration lösen (Strategie 2) und nur, wenn dieser Weg nicht möglich ist, auf die Summation zurückgreifen (Strategie 1).

Ausführliche Musteraufgabe – Grundform

Der Fahrtenschreiber eines Lkw zeichnet die Geschwindigkeit des Fahrzeugs während einer 5 Stunden langen Fahrt auf.
Der Verlauf der Geschwindigkeit lässt sich näherungsweise beschreiben durch die Funktion v mit
$v(t) = 1{,}8 \cdot t \cdot (t-3) \cdot (t-6) + 60$,
t in h, v(t) in $\frac{km}{h}$ (s. Bild rechts).

Welchen Weg hat das Fahrzeug in diesen fünf Stunden zurückgelegt?



Strategie Grundform

❶ **a** Identifizieren des Aufgabentyps anhand von Schlüsselbegriffen, hier Zusammenhang zwischen Größen und deren Änderung, speziell Summation von Größen bzw. Rekonstruktion des Bestands

b Identifizieren der aufzusummierenden Größe bzw. der **Änderungsrate** und des zu **rekonstruierenden Bestands**: Die zeitliche Entwicklung welcher Größe wird betrachtet? Welche Größe ergibt sich bei deren Summation?

c Festlegen der Vorgehensweise:
Ist die Änderungsrate im gesamten Zeitintervall konstant?
→ **Multiplikation** (vereinfachte Strategie 1)
Variiert die Änderungsrate im Lauf der Zeit und kann eine Stammfunktion der Änderungsrate bestimmt oder ein Hilfsmittel eingesetzt werden?
→ **Integration** (Strategie 2)
Andernfalls: Näherung der Änderungsrate durch eine geeignete stückweise konstante Änderungsrate, z. B. durch Mittelwertbildung
→ **Summation** (Strategie 1)

❷ Ermitteln des **Bestands(zuwachses)**, je nach Vorgehensweise in ❶ **c**:
Strategie 1: konstante Änderungsrate mit Zeitdauer multiplizieren bzw. stückweise konstante Näherungswerte pro Zeiteinheit aufsummieren
Strategie 2: Integral über die Änderungsrate im betrachteten Zeitraum bilden

❸ Angeben der Lösung im Sachkontext:
Was gibt die ermittelte Größe bzw. der ermittelte Wert an? Wie lauten ggf. die zugehörigen Einheiten?

❹ **a** Interpretieren des Ergebnisses:
Ist der ermittelte Wert realistisch? Welche Bedeutung und ggf. welche Auswirkungen hat das Ergebnis auf die betrachtete Situation?

b Ggf. Vergleichen verschiedener Varianten:
Liefert die Summation eine hinreichend gute Näherung?
Worin bestehen Vor- und Nachteile?

Kreislauf

Lösung **1** **a** Schlüsselbegriffe: **Geschwindigkeit** v(t), **Weg zurückgelegt**
→ Integrations- bzw. Summationsaufgabe

b Die Entwicklung der Geschwindigkeit wird innerhalb eines bestimmten Zeitraums betrachtet und ist als Funktion v in Abhängigkeit der Zeit gegeben. Die aufzusummierende Größe ist also die Geschwindigkeit, der „Bestand", der sich beim Aufsummieren ergibt, ist der in dieser Zeit zurückgelegte Weg.

c Da die Geschwindigkeit, also die Änderungsrate, in Form einer nicht konstanten Funktion v angegeben ist und eine Stammfunktion von v gefunden werden kann, bietet sich hier **Strategie 2 (Integration)** an. Zum Vergleich wird im Folgenden auch eine mögliche Summation durchgeführt.

2 Verwendet man **Strategie 1 (Summation)** für die Lösung, wird die jeweilige Durchschnittsgeschwindigkeit pro Stunde als Näherung für die Berechnung verwendet. Dazu entnimmt man zunächst einer Wertetabelle der Funktion v:

t	0	1	2	3	4	5
v(t) in $\frac{km}{h}$	60	78	74,4	60	45,6	42

Hieraus ergeben sich folgende Durchschnittsgeschwindigkeiten in den einzelnen Stunden:

t	0 … 1	1 … 2	2 … 3	3 … 4	4 … 5
$\overline{v}$ in $\frac{km}{h}$	69	76,2	67,2	52,8	43,8

Dann erhält man für den in den 5 Stunden insgesamt zurückgelegten Weg s durch Summation:

$s = 69\text{ km} + 76{,}2\text{ km} + 67{,}2\text{ km} + 52{,}8\text{ km} + 43{,}8\text{ km} = 309\text{ km}$

Bei Verwendung von **Strategie 2 (Integration)** bildet man das Integral über die Geschwindigkeitsfunktion v in den Grenzen von t = 0 bis t = 5; für den gesamten Weg s erhält man hier:

$$s = \int_0^5 v(t)\,dt = \int_0^5 (1{,}8\cdot t\cdot(t-3)\cdot(t-6)+60)\,dt = \int_0^5 (1{,}8t^3-16{,}2t^2+32{,}4t+60)\,dt$$

$$= \left[0{,}45t^4-5{,}4t^3+16{,}2t^2+60t\right]_0^5 = 311{,}25$$

Überprüfen bzw. bestätigen lässt sich dieser Wert hier auch anhand des Graphen durch Abzählen der Kästchen im relevanten Bereich. Man erhält etwa 15,5 Kästchen, wobei 1 Kästchen aufgrund der Skalierung der Achsen dem Wert 20 entspricht, also insgesamt einen Wert von ca. $15{,}5\cdot 20 = 310$.

3 Da die Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$ und die Zeit in h angegeben ist, ergibt sich für den Weg die Einheit km. Der Lkw hat in den 5 Stunden insgesamt 311,25 km (bzw. ca. 309 km) zurückgelegt.

Übungsaufgaben

10 Ein Porsche 911 Turbo S besitzt folgende Beschleunigungswerte:

$0-80\,\frac{km}{h}$	$0-100\,\frac{km}{h}$	$0-120\,\frac{km}{h}$	$0-130\,\frac{km}{h}$	$0-160\,\frac{km}{h}$	$0-180\,\frac{km}{h}$	$0-200\,\frac{km}{h}$
2,1 s	2,9 s	4,0 s	4,6 s	6,5 s	8,2 s	10,2 s

Daten nach: auto motor und sport, Heft 21/2013

a) Bestimmen Sie eine Näherung für den Weg, den dieses Fahrzeug bis zum Erreichen der Geschwindigkeit von $200\,\frac{km}{h}$ zurücklegt.
Legen Sie hierzu für die einzelnen Zeitintervalle eine geeignete Durchschnittsgeschwindigkeit fest und bestimmen Sie hieraus den zurückgelegten Weg.

b) Die Geschwindigkeit des Porsche kann während des Beschleunigungsvorgangs näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion v mit
$v(t) = 65 \cdot (1 - e^{-0{,}19t})$; t in s; v(t) in $\frac{m}{s}$.
Bestimmen Sie hiermit den während der Beschleunigung auf $200\,\frac{km}{h}$ zurückgelegten Weg.

11 Aus einem Pumpspeicherwerk werden im Lauf eines Tages bestimmte Wassermengen zur Stromerzeugung entnommen. Die Entnahmeraten pro Minute für einzelne Zeitpunkte sind nachfolgender Tabelle zu entnehmen.

Zeitpunkt in Minuten	0	30	60	90	120	150	180	210	240
Entnahmerate in $\frac{m^3}{min}$	70	90	105	115	125	128	130	125	120

a) Bestimmen Sie über eine geeignete Summation eine Abschätzung für die Wassermenge, die in den betrachteten vier Stunden entnommen worden ist.

b) Zeigen Sie, dass die Entnahmerate näherungsweise durch die Funktion r mit $r(t) = 100 + \frac{1}{5}t - \frac{(t-120)^2}{500}$ (t in min; r(t) in $\frac{m^3}{min}$) beschrieben werden kann.
Bestimmen Sie hiermit die Wassermenge, die innerhalb der vier Stunden entnommen wurde.

→ ❹ Diese Exponentialfunktion nähert die Messdaten sehr gut an, man kann also annehmen, dass es sich tatsächlich um einen radioaktiven Zerfall handelt.

Dies kann auch quantitativ durch Vergleich der Messwerte mit den exponentiellen Näherungswerten bestätigt werden:

1.1 | 1.2 | *Nicht gespeicherte

	A zeit	B anzahl	C funktion	D
=			=7369.69*(0.9!	
1	0	7250	7369.69	
2	5	6000	5983.83	
3	10	4900	4858.58	
4	15	4000	3944.93	
5	20	3150	3203.09	

C1 =7369.69

1.1 | 1.2 | *Nicht gespeicherte

	A zeit	B anzahl	C funktion	D
=			=7369.69*(0.9!	
7	30	2100	2111.69	
8	35	1700	1714.59	
9	40	1400	1392.16	
10	45	1150	1130.37	
11	50	900	917.803	

C11 =917.80254023858

In der GTR-Tabelle wurden in der ersten Spalte die Zeit, in der zweiten Spalte die Anzahl der Zerfälle laut Grafik und in der dritten Spalte die Funktionswerte der ermittelten Regressionsfunktion und somit die Regressions-Näherungswerte eingegeben.
Mit Ausnahme des ersten Messpunktes weichen diese Näherungswerte stets um höchstens ca. 50 Zerfälle von den real gemessenen Werten ab.

10 Schlüsselbegriffe: Beschleunigungswerte, (Durchschnitts-)**Geschwindigkeit**,
→ ❶ a **zurückgelegter Weg** → Integrations- bzw. Summationsaufgabe

→ ❶ b, c a) Die Entwicklung der Geschwindigkeit des Porsche ist durch die jeweils benötigte Zeit für die Beschleunigung auf eine bestimmte Geschwindigkeit in Tabellenform gegeben. Die aufzusummierende Größe ist die Geschwindigkeit, der „Bestand" ist der in dieser Zeit zurückgelegte Weg.

Da die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit nicht in Form einer Funktion angegeben ist, sondern nur indirekt durch die Beschleunigungszeiten, kann der zurückgelegte Weg hier nur mithilfe einer **Summation (Strategie 1)** ermittelt werden.

→ ❷❸ Wie in der Aufgabenstellung bereits vorgegeben, bestimmt man dazu für die einzelnen Zeitintervalle geeignete Durchschnittsgeschwindigkeiten.

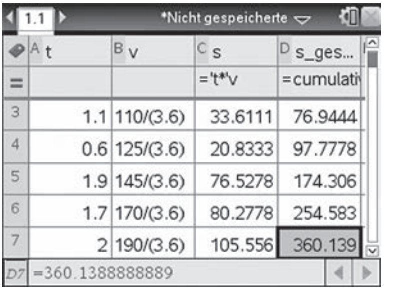
Die gegebene Tabelle wird folgendermaßen ergänzt (s. nächste Seite):
In der dritten Zeile steht die Zeitdifferenz zwischen zwei Messwerten in s, d. h. die Zeit, die der Porsche zusätzlich benötigt, um die jeweils nächstgrößere Geschwindigkeit zu erreichen, wenn er weiterhin beschleunigt.
In der vierten Zeile wird die Durchschnittsgeschwindigkeit in den jeweiligen Zeitintervallen in $\frac{km}{h}$ angegeben.

Da die Zeit in s angegeben ist, werden diese Durchschnittsgeschwindigkeiten in die Einheit $\frac{m}{s}$ umgerechnet (fünfte Zeile), um die in den entsprechenden Intervallen zurückgelegte Wegstrecke berechnen zu können ($1\,\frac{km}{h} = \frac{1}{3{,}6}\,\frac{m}{s}$).
In der sechsten Zeile wird schließlich jeweils das Produkt der Zeiträume mit der Durchschnittsgeschwindigkeit genommen; dadurch erhält man die zurückgelegten Wegstrecken zwischen den zwei entsprechenden Messpunkten.

Geschwindigkeitsbereich in $\frac{km}{h}$	0–80	0–100	0–120	0–130	0–160	0–180	0–200
Zeit ab Start	2,1 s	2,9 s	4,0 s	4,6 s	6,5 s	8,2 s	10,2 s
Zeitintervall t	2,1 s	0,8 s	1,1 s	0,6 s	1,9 s	1,7 s	2,0 s
Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$ in $\frac{km}{h}$	$40\,\frac{km}{h}$	$90\,\frac{km}{h}$	$110\,\frac{km}{h}$	$125\,\frac{km}{h}$	$145\,\frac{km}{h}$	$170\,\frac{km}{h}$	$190\,\frac{km}{h}$
$\overline{v}$ in $\frac{m}{s}$	$11{,}1\,\frac{m}{s}$	$25{,}0\,\frac{m}{s}$	$30{,}6\,\frac{m}{s}$	$34{,}7\,\frac{m}{s}$	$40{,}3\,\frac{m}{s}$	$47{,}2\,\frac{m}{s}$	$52{,}8\,\frac{m}{s}$
Wegstrecke	23,3 m	20,0 m	33,7 m	20,8 m	76,6 m	80,2 m	105,6 m

Zuletzt werden diese einzelnen Wegstrecken addiert:
$23{,}3\text{ m} + 20{,}0\text{ m} + 33{,}7\text{ m} + 20{,}8\text{ m} + 76{,}6\text{ m} + 80{,}2\text{ m} + 105{,}6\text{ m} = 360{,}2\text{ m}$

Der Porsche legt bis zum Erreichen der Geschwindigkeit von $200\,\frac{km}{h}$ insgesamt eine Wegstrecke von ca. 360 Meter zurück.



	A t	B v	C s	D s_ges...
=			='t'*v	=cumulati
3	1.1	110/(3.6)	33.6111	76.9444
4	0.6	125/(3.6)	20.8333	97.7778
5	1.9	145/(3.6)	76.5278	174.306
6	1.7	170/(3.6)	80.2778	254.583
7	2	190/(3.6)	105.556	360.139

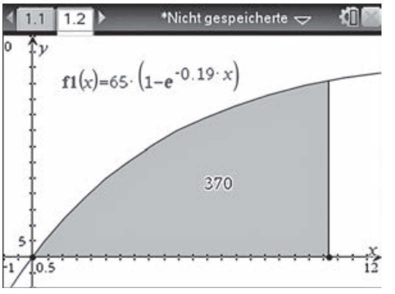
→ ❹ a Das Ergebnis lässt sich z. B. durch Überschlagsrechnungen überprüfen. Fährt der Porsche beispielsweise die gesamte Zeit durchschnittlich $100\,\frac{km}{h}$, würde er eine Strecke von $\frac{100}{3{,}6}\,\frac{m}{s} \cdot 10{,}2\text{ s} \approx 283\text{ m}$ zurücklegen. Da er bereits nach 3 s Beschleunigung die Geschwindigkeit von $100\,\frac{km}{h}$ erreicht hat, legt er insgesamt eine größere Strecke zurück.

→ ❶ b, c b) Die Entwicklung der Geschwindigkeit des Porsche ist nun als Funktion v in Abhängigkeit der Zeit gegeben. Deshalb bietet sich hier zum Berechnen der zurückgelegten Wegstrecke eine **Integration (Strategie 2)** an.

→ ❷❸ Da der Porsche insgesamt 10,2 s benötigt, um die Endgeschwindigkeit von $200\,\frac{km}{h}$ zu erreichen, bildet man das bestimmte Integral über die Geschwindigkeitsfunktion v(t) in den Grenzen von $t=0$ bis $t=10{,}2$.

Mit einem GTR/CAS lassen sich die Geschwindigkeitskurve zeichnen und hieraus grafisch näherungsweise der Wert des Integrals bestimmen:

$$s = \int_0^{10,2} v(t)\,dt \approx 370$$



Alternativ lässt sich die Geschwindigkeitsfunktion auch von Hand mithilfe einer Stammfunktion oder mithilfe eines GTR/CAS exakt integrieren:

$$s = \int_0^{10,2} 65 \cdot (1 - e^{-0,19t})\,dt$$

$$= 65 \cdot \left[t - \frac{1}{-0,19} e^{-0,19t} \right]_0^{10,2} \approx 370$$

Da die Geschwindigkeiten v(t) bereits in $\frac{m}{s}$ angegeben sind, ergibt sich bei der Integration die Wegstrecke in Meter.
Mit dieser Methode ergibt sich eine Wegstrecke von ca. 370 Meter.

→ ❹ b Die Summation in Teilaufgabe a liefert eine gute Näherung der exakten Berechnung in Teilaufgabe b, allerdings sind dazu einige Rechnungen und Überlegungen nötig. Andererseits lässt sich auf diese Weise der zurückgelegte Weg rein anhand der Messwerte näherungsweise ermitteln, ohne dass die genaue Entwicklung der Geschwindigkeit durch eine Funktion modelliert ist.

11 Gegeben sind die **Entnahmeraten** von Wasser aus einem Pumpspeicherwerk.
→ ❶ a, b Gefragt ist nach der **Wassermenge**, die in einem bestimmten Zeitraum insgesamt entnommen wurde. Diese ergibt sich als „rekonstruierter Bestand" der Entnahmeraten (Änderungsraten) durch Aufsummieren oder Integrieren.

→ ❶ c a) Die Entnahmeraten pro min sind tabellarisch für einzelne Zeitpunkte gegeben. Wie auch vorgegeben, kann die entnommene Wassermenge durch eine Summation näherungsweise bestimmt werden.

→ ❷❸ Für diese Abschätzung gibt es mehrere Wege:
Denkbar wäre es, einfach den Mittelwert der Entnahmeraten über die gesamte Zeit zu bestimmen und damit die gesamte Entnahmemenge zu approximieren:

$$\overline{r} = \frac{70+90+105+115+125+128+130+125+120}{9} = \frac{1\,008}{9} = 112 \left[\frac{m^3}{min}\right]$$