GYMNASIUM

MEHR ERFAHREN

KLAUSUREN

Mathematik Ober

Claudia Hagan

STARK

Inhalt

Autorin: Claudia Hagan

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die Inhalte des Mathematikunterrichts in der Qualifikationsphase der Oberstufe werden drei großen Themengebieten zugeordnet, in denen Sie am Ende Ihr schriftliches Abitur ablegen werden:

- Analysis, Infinitesimalrechnung (ca. 50 %)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung, Stochastik und Statistik (ca. 25 %)
- Analytische Geometrie (ca. 25 %)

Dieses Buch hilft Ihnen mit entsprechend zusammengestellten **Musterklausuren** bei der gezielten Vorbereitung auf schriftliche Leistungsnachweise innerhalb der Oberstufe. Abhängig davon, ob diese sehr früh oder sehr spät im Halbjahr stattfinden, können Sie anhand des Inhaltsverzeichnisses individuell die für Sie passenden Klausuren heraussuchen.

Die Stoffverteilung über die zwei Jahre der Qualifikationsphase ist im Lehrplan Mathematik nicht genau vorgegeben. Dieses Buch ist so konzipiert, dass die ersten beiden Themenbereiche im Regelfall den Stoff der Jahrgangsstufe 11 abdecken und die übrigen zwei den Stoff der Jahrgangsstufe 12. Durch eventuelle Stoffumstellungen, sehr frühem oder sehr spätem Termin für eine Klausur können sich wichtige Inhalte Ihrer **individuellen Klausurvorbereitung** auch in einem anderen Bereich finden, als diese Einteilung vermuten lässt. In Jahrgangsstufe 12 können zudem auch Bereiche aus Jahrgangsstufe 11 als Grundwissen abgeprüft werden.

Dieser Klausurentrainer bietet Ihnen sorgfältig konzipierte und im Mathematikunterricht erprobte Aufgaben mit **ausführlich kommentierten Lösungen**. Zusätzlich ermöglichen Ihnen folgende Elemente eine Einschätzung des eigenen Leistungsstandes sowie eine optimale Vorbereitung auf die Prüfungssituation:

- **Hinweise und Tipps** helfen Ihnen, wenn Ihnen der Einstieg in eine Aufgabe schwerfällt. Diese finden Sie zwischen der Aufgabenstellung und den ausführlichen Lösungen. Sie sollten diese bei Unsicherheiten zurate ziehen, bevor Sie sich gleich die Gesamtlösung ansehen.

- Die **Bearbeitungszeit** für jede Klausur beträgt **60 Minuten**, hinzu kommen 5 bis 15 Minuten zum Einlesen. Aufgaben mit Anwendungsorientierung erfordern grundsätzlich mehr Einlesezeit.

- Pro Klausur können maximal **40 Bewertungseinheiten** erreicht werden. In der Oberstufe greift in Mathematik grundsätzlich ein Notenschlüssel von 20 % – 40 % – 55 % – 70 % – 85 % – 100 % auf die Notenstufen 6, 5, 4, 3, 2, 1. Pädagogisch gesetzte minimale Abweichungen sind möglich und sinnvoll. In der Tabelle sehen Sie eine mögliche BE-Punkte-Zuordnung.

Punkteschlüssel								
Punkte	15	14	13	12	11	10	9	8
BE	40–39	38–37	36–35	34–33	32–31	30–29	28–27	26–25
Punkte	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	24–23	22–21	20–19	18–17	16–15	14–12	11–9	8–0

- Die Zahl der „Nüsse“ im Aufgabenteil informiert Sie über den **Schwierigkeitsgrad** einer Aufgabe.

 einfach

 mittel

 schwer

- Die **Merkhilfe** für Mathematik, auf die in den Lösungen bei Formeln und Regeln verwiesen wird, finden Sie im Internet auf den Seiten des bayerischen Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (www.isb.bayern.de) unter den Materialien.

Bei gewissenhafter und kontinuierlicher Arbeit mit diesem Klausurentrainer gelingt es Ihnen sicher, Ihren momentanen Leistungsstand rasch und sicher einzuschätzen und, wenn nötig, eine schnelle positive Änderungsrate in die Wege zu leiten.

Ich bin überzeugt, dass dieses Buch eine gute Mischung aus klassischen, aber auch innovativen Aufgaben in der richtigen Gewichtung bietet, und wünsche Ihnen allen viel Erfolg in Ihren Klausuren und dem Abitur!

Claudia Hagan

Claudia Hagan

Klausur 1

BE

1 Gegeben sind folgende Funktionen f, g und h. Berechnen Sie die zugehörigen Ableitungsfunktionen. Die Termvereinfachung ist nicht verlangt.

a) $f\colon\ x \mapsto \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 - 5x + 1$ 1

b) $g\colon\ x \mapsto 3(x^2 + 5x + 1)(-x^3 + 7x - 1)$ 2

c) $h\colon\ x \mapsto \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 1}$ 2

2 Geben Sie den Funktionsterm f(x) einer Funktion an, die sich ohne Absetzen des Stifts zeichnen lässt und an der Stelle $x = 5$ definiert, aber nicht differenzierbar ist.
Beschreiben Sie Ihr Vorgehen und zeichnen Sie den Graphen Ihrer Funktion in der Umgebung der Stelle $x = 5$. 3

3 Geben Sie einen Term einer ganzrationalen Funktion f an, die folgende Bedingungen erfüllt:
(1) Bei $x = 1$ hat der Graph von f eine waagrechte Tangente.
(2) Die Steigung des Graphen von f ist nie positiv.
Beschreiben Sie Ihren Lösungsweg. 4

4 Bestimmen Sie einen Term einer gebrochenrationalen Funktion f, die folgende drei Bedingungen erfüllt:
- G_f hat die schräge Asymptote $a(x) = 2x - 1$.
- G_f hat die senkrechte Asymptote $x = -3$.
- G_f hat eine Nullstelle $N(0\,|\,0)$.

Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg. 5

5 Gegeben ist die Funktion $f\colon\ x \mapsto x^3 - 10{,}5x^2 + 30x - 22{,}5;\ \ x \in \mathbb{R}$

a) Geben Sie das Verhalten im Unendlichen an.
Notieren Sie den Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse.
Fertigen Sie eine Grobskizze für den möglichen Verlauf des Graphen G_f an. 2

b) Bestimmen Sie die Punkte mit waagrechter Tangente rechnerisch.
Schließen Sie auf Monotonie und Art der Extrema. Argumentieren Sie anschaulich. 7

c) Zeigen Sie, dass G_f für $x \in \,]1; 1{,}5[$ eine Nullstelle hat.
Ermitteln Sie dann in $T(1 \mid f(1))$ die Gleichung der Tangente t an G_f.
Zeichnen Sie auf einem separaten Blatt die Tangente und den Graphen der Funktion G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.
Platzbedarf in y-Richtung: $-23 < y < 5$
[Zwischenergebnis: $t(x) = 12x - 14$] 8

d) Wenden Sie die Newton-Formel auf den Punkt T als Startwert an.
Was stellt der errechnete x_1-Wert dar?
Erläutern Sie ausführlich unter Verwendung der Fachsprache das Newton-Verfahren. 6

Hinweise und Tipps

1 Ableitungsregeln anwenden (Merkhilfe!).

2 Standardbeispiel einer nicht differenzierbaren Funktion: Betragsfunktion

3 Stellen Sie zuerst einen möglichen Term der Ableitungsfunktion f' auf und schließen Sie dann auf f(x).

4 Lösungsansatz: $f(x) = a(x) + r(x)$; r(x) echt gebrochenrationaler Anteil.

5
- Das Verhalten im Unendlichen wird nur durch die höchste Potenz von x bestimmt.
- Die Grobskizze des Graphen G_f kann für die folgenden Aufgaben nützlich sein.
- Benutzen Sie für b die Merkhilfe.
- Berechnen Sie bei c die Funktionswerte der gegebenen Intervallgrenzen.
- Für die Gleichung der Tangente benötigen Sie deren Steigung sowie einen Punkt.
- Die Merkhilfe enthält die Newton-Formel. Vorgehensweise möglichst gut in Worte fassen.

Vertiefende Hinweise zum Lösen der Aufgaben finden Sie in
Abitur-Training Analysis

1.3 Ganzrationale Funktionen
1.4 Gebrochenrationale Funktionen
3.1 Grenzwerte vom Typ $x \to \pm\infty$
3.3 Asymptoten
4.1 Differenzierbarkeit
4.2 Ableitungsregeln
4.4 Tangenten und Normalen
4.5 Newton-Verfahren
5.1 Steigungsverhalten
5.2 Relative Extrema
10 Steckbriefaufgaben

Lösung

BE

1 a) 1 Minute,

$$f(x) = \frac{1}{4}x^5 - 3x^3 - 5x + 1$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{5}{4}x^4 - 9x^2 - 5$$ 1

b) 3 Minuten,

$$g(x) = 3 \cdot [\underbrace{(x^2 + 5x + 1)}_{u(x)}\underbrace{(-x^3 + 7x - 1)}_{v(x)}]$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = 3 \cdot [\underbrace{(2x + 5)}_{u'(x)}\underbrace{(-x^3 + 7x - 1)}_{v(x)}$$ Produktregel 1

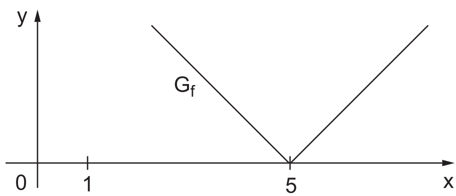
$$+\underbrace{(x^2 + 5x + 1)}_{u(x)}\underbrace{(-3x^2 + 7)}_{v'(x)}]$$ 1

c) 3 Minuten,

$$h(x) = \frac{5x^3 - 1}{x^2 + 1}$$

$$h'(x) = \frac{(x^2 + 1) \cdot 15x^2 - (5x^3 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$ Quotientenregel 2

2 6 Minuten,
Die Betragsfunktion $g(x) = |x|$ lässt sich z. B. an der Stelle $x = 0$ ohne Absetzen des Stifts durchzeichnen, ist dort aber nicht differenzierbar; ihr Graph hat an dieser Stelle einen Knick. Die gesuchte Funktion soll diese Eigenschaften bei $x = 5$ aufweisen. Um dies zu erreichen, verschiebt man den Graphen der Betragsfunktion um 5 Einheiten nach rechts. 1
Die zugehörige Funktionsgleichung lautet:
$f(x) = |x - 5|$ 1



1

Klausur 11

BE

1 Berechnen Sie die Menge aller Stammfunktionen (das unbestimmte Integral). Dokumentieren Sie dabei Ihr Vorgehen ausführlich unter Angabe der verwendeten Regeln. Vereinfachen Sie die Ergebnisse.

a) $g:\ x \mapsto 5x \cdot e^{x^2+3} \qquad x \in \mathbb{R}$ 3

b) $k:\ x \mapsto \ln(x^2)+7 \qquad x \in \mathbb{R}^+$ 5

2 Eine Supermarktkette führt eine neue Sorte Bodylotion ein, für die ganz besonders Werbung gemacht wird. In den ersten fünf Wochen ergeben sich folgende Verkaufszahlen:

Verkaufswoche x	1	2	3	4	5
verkaufte Stückzahl f(x)	26	45	62	75	86

Modellhaft werden die Verkaufszahlen durch eine Funktionenschar f der folgenden Form beschrieben:

$$f:\ x \mapsto \frac{a \cdot x + 30}{c \cdot x + 30} \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+ \qquad a > 0 \qquad c > 0$$

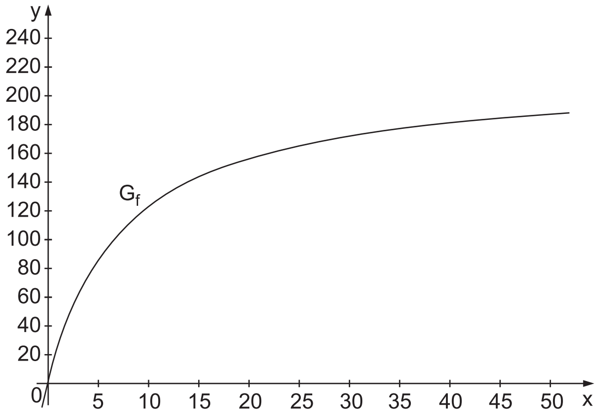
a) Eigentlich gilt im Sachzusammenhang $x \in \mathbb{N}$, dennoch ist es in der Infinitesimalrechnung sinnvoll, als Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ zu wählen. Nehmen Sie dazu begründet Stellung. 2

b) Berechnen Sie anhand der Verkaufszahlen für die erste und die fünfte Woche die Parameter a und c.

[Zwischenergebnis: $f(x) = \dfrac{854x+30}{4x+30}$] 7

c) Zeigen Sie, dass der angegebene Funktionsterm auch die Verkaufszahlen der dazwischenliegenden Wochen gut wiedergibt. 3

Auf der folgenden Abbildung ist der Graph der Funktion für das erste Verkaufsjahr abgebildet.



d) Wie entwickeln sich die Verkaufszahlen nach dem Modell langfristig? Wie entwickeln sich die Zahlen im ersten Verkaufsjahr? Um wie viel Prozent weichen die Verkaufszahlen nach einem Jahr noch von den langfristig erwarteten Werten ab? 7

e) Zeigen Sie, dass sich der Term der Funktion f folgendermaßen umschreiben lässt:

$$f(x) = 213{,}5 - \frac{6\,375}{4x + 30}$$ 2

f) Zeichnen Sie im Graphen ein, wodurch die Anzahl der innerhalb des ersten Jahres verkauften Bodylotions wiedergegeben wird. Berechnen Sie dann, wie viele Bodylotions im ersten Jahr verkauft wurden. 11

Hinweise und Tipps

1
- Verwenden Sie bei Aufgabe a die Regel für $\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx$ aus der Merkhilfe.
- Schreiben Sie bei Aufgabe b zunächst den Term um, sodass Sie die Regel für $\int \ln x\,dx$ aus der Merkhilfe anwenden können.

2
- Überlegen Sie bei Aufgabe a, welche Voraussetzungen eine Funktion mindestens erfüllen muss, damit Differenzieren und Integrieren möglich ist.
- Stellen Sie für Aufgabe b zwei Bedingungen auf und lösen Sie das lineare Gleichungssystem.
- Berechnen Sie für Aufgabe c die entsprechenden Wertepaare.
- Langfristige Entwicklung bedeutet Verhalten für $x \to \infty$, Verkaufszahlen nach einem Jahr bedeutet $x = 52$.
- Führen Sie für Aufgabe e eine Polynomdivision durch.
- Die aufsummierte Anzahl der verkauften Lotions ergibt sich als Fläche unter dem Graphen. Dies entspricht rechnerisch einem bestimmten Integral.

Vertiefende Hinweise zum Lösen der Aufgaben finden Sie in
Abitur-Training Analysis

1.4 Gebrochenrationale Funktionen
3.1 Grenzwerte vom Typ $x \to \pm\infty$
4.1 Differenzierbarkeit
5.1 Steigungsverhalten
7.1 Stammfunktionen
7.2 Das bestimmte Integral
9.1 Erste elementare Integrationsregel
9.3 Dritte elementare Integrationsregel

Lösung

BE

1 Bei beiden Integrationen werden die Formeln der Merkhilfe benötigt.

a) 5 Minuten,

$\int 5x \cdot e^{x^2+3}\,dx = ?$

Es wird die Regel $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$ verwendet. 0,5

$f(x) = x^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$ 0,5

$\int 5xe^{x^2+3}\,dx = 2{,}5 \cdot \int 2x \cdot e^{x^2+3}\,dx$ Eigenschaften des Integrals 1

$= 2{,}5 \cdot e^{x^2+3} + C$ Formel aus der Merkhilfe 1

b) 7 Minuten,

$\int (\ln(x^2) + 7)\,dx = ?$

Es wird die Formel $\int \ln x\,dx = -x + x\ln x + C$ verwendet. 1

Dazu wird der Term umgeschrieben, was wegen $x \in \mathbb{R}^+$ ohne weitere Überlegung möglich ist: 1

$\int (\ln(x^2) + 7)\,dx = \int (2\ln x + 7)\,dx$ 1

$= 2\int \ln x\,dx + 7\int 1\,dx$ Eigenschaften des Integrals

$= 2 \cdot (-x + x\ln x) + 7x + C$ Formel aus der Merkhilfe 1

$= -2x + 2x\ln x + 7x + C$

$= 2x\ln x + 5x + C$ 1

2 a) 3 Minuten,

x gibt die jeweilige Woche an, d. h. $x \in \{1; 2; 3; \ldots\} = \mathbb{N}$ 0,5

In der Infinitesimalrechnung wird differenziert und integriert. Dazu ist es mindestens nötig, dass sich der Funktionsgraph im Definitionsbereich ohne Absetzen des Stifts durchzeichnen lässt. Dies ist nur möglich, wenn die Funktion auf einem Teilintervall von $\mathbb{R}$ definiert ist. 1 0,5