2020 Training

Abschlussprüfung

MEHR ERFAHREN

Realschule Bayern

Mathematik I

+ *Ausführliche Lösungen*
+ *Hinweise und Tipps*

LÖSUNGEN

STARK

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dies ist das Lösungsbuch zu dem Band **Training Abschlussprüfung 2020, Mathematik I, Realschule, Bayern** (Bestell-Nr. 915101). Es enthält zu allen Aufgaben von unseren Autoren ausgearbeitete Lösungen, die jeden Rechenschritt ausführlich erklären. Dabei wird besonderer Wert auf die Lösungsansätze und Vorüberlegungen gelegt. Zur Veranschaulichung und dem besseren Verständnis der Lösungen helfen dir zahlreiche Skizzen.

Versuche stets, jede Aufgabe zunächst selbstständig zu lösen, und dann deine Lösung mit den Lösungen im Buch zu vergleichen. Solltest du nicht weiterkommen, helfen dir die **Hinweise und Tipps**. Hast du eine Aufgabe nicht richtig gelöst, ist es ganz wichtig, diese zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal durchzurechnen. Durch das Üben wirst du dich sicher fühlen und kannst beruhigt in die Prüfung gehen.

Wir wünschen dir viel Erfolg!

Autoren: Markus Schmidl unter Mitarbeit von Markus Hochholzer
Lösung der Original-Abschlussprüfung: Alois Einhauser

Training Grundwissen

1 Grundwissen 5.–8. Klasse

Hinweise und Tipps

1 a) $25b^2+40bc+16c^2=(5b)^2+2\cdot(5b\cdot 4c)+(4c)^2$
$=(5b+4c)^2$

1. binomische Formel „rückwärts“

b) $\frac{9}{16}m^2+\frac{3}{4}mp+\frac{1}{4}p^2=\left(\frac{3}{4}m\right)^2+2\cdot\left(\frac{3}{4}m\cdot\frac{1}{2}p\right)+\left(\frac{1}{2}p\right)^2$
$=\left(\frac{3}{4}m+\frac{1}{2}p\right)^2$

1. binomische Formel „rückwärts“

c) $0{,}25-36g^2=(0{,}5+6g)(0{,}5-6g)$

3. binomische Formel „rückwärts“

d) $0{,}81a^8-49a^{-6}=(0{,}9a^4-7a^{-3})(0{,}9a^4+7a^{-3})$

Beachte: $(7a^{-3})^2 \overset{\text{5. Potenzgesetz}}{=} 49a^{-3\cdot 2}=49a^{-6}$

---

2 a) $(2p+q)^2-(2p-q)^2$

Wende die 1. und 2. binomische Formel an.

$=4p^2+4pq+q^2-(4p^2-4pq+q^2)$

Klammer auflösen

$=4p^2+4pq+q^2-4p^2+4pq-q^2$
$=8pq$

Zusammenfassen

b) $\left(\frac{3}{4}u-0{,}8v\right)^2=\left(\frac{3}{4}u-\frac{4}{5}v\right)^2$

Es empfiehlt sich, Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche umzuformen. 2. binomische Formel anwenden

$=\left(\frac{3}{4}u\right)^2-2\cdot\frac{3}{4}u\cdot\frac{4}{5}v+\left(\frac{4}{5}v\right)^2$
$=\frac{9}{16}u^2-2\cdot\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{5}uv+\frac{16}{25}v^2$
$=\frac{9}{16}u^2-\frac{6}{5}uv+\frac{16}{25}v^2$

Rechtzeitig kürzen

$=\frac{9}{16}u^2-1\frac{1}{5}uv+\frac{16}{25}v^2$

c) $(a^3-3b^2)^2=(a^3)^2-2\cdot a^3\cdot 3b^2+(3b^2)^2$
$=a^6-2\cdot 3a^3b^2+9b^4$
$=a^6-6a^3b^2+9b^4$

2. binomische Formel und 5. Potenzgesetz anwenden

d) $(4a-5)^2-(6a+7)^2+5(2a+4)(2a-4)$

Binomische Formeln anwenden

$=(4a)^2-2\cdot 4a\cdot 5+5^2-[(6a)^2+2\cdot 6a\cdot 7+7^2]+5[(2a)^2-4^2]$
$=16a^2-2\cdot 4\cdot 5a+25-(36a^2+2\cdot 6\cdot 7a+49)+5(4a^2-16)$
$=16a^2-40a+25-(36a^2+84a+49)+20a^2-80$
$=16a^2-40a+25-36a^2-84a-49+20a^2-80$
$=-124a-104$

Zusammenfassen

e) $(3y+2)^3=(3y+2)^2(3y+2)$

Faktorisieren, um die 1. binomische Formel anwenden zu können

$=[(3y)^2+2\cdot 3y\cdot 2+2^2]\cdot(3y+2)$
$=(9y^2+2\cdot 3\cdot 2y+4)\cdot(3y+2)$
$=(9y^2+12y+4)\cdot(3y+2)$

Jeder Summand der ersten Summe wird mit jedem Summanden der zweiten Summe multipliziert.

Hinweise und Tipps

$= 27y^3 + 18y^2 + 36y^2 + 24y + 12y + 8$ — Zusammenfassen

$= 27y^3 + 54y^2 + 36y + 8$

f) $(\sqrt{8} - 3\sqrt{18})^2 = \sqrt{8}^2 - 2 \cdot \sqrt{8} \cdot 3\sqrt{18} + (3\sqrt{18})^2$ — $\sqrt{8}^2 = 8$

$= 8 - 6\sqrt{8 \cdot 18} + 9 \cdot 18$ — $\sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{16 \cdot 9} = 4 \cdot 3 = 12$

$= 8 - 6\sqrt{16 \cdot 9} + 162$

$= 170 - 6 \cdot 12$

$= 98$

3

$A_{rot}(x) = A_{gr.\,Quadrat} - A_{kl.\,Quadrat}$ — $A_{rot}(x)$ = Differenz von $A_{gr.\,Quadrat}$ und $A_{kl.\,Quadrat}$

$A_{rot}(x) = [(x+3)^2 - (x-4)^2]$ FE — Binomische Formeln anwenden

$A_{rot}(x) = [x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 8x + 16)]$ FE

$A_{rot}(x) = (x^2 + 6x + 9 - x^2 + 8x - 16)$ FE — Zusammenfassen

$A_{rot}(x) = (14x - 7)$ FE

4

$A_{rot}(x) = \frac{1}{2} A_{gr.\,Quadrat}$ — Die Diagonale teilt das Quadrat in zwei kongruente Teildreiecke.

$A_{rot}(x) = \left[\frac{1}{2}(x+5)^2\right]$ FE — Anwendung der 1. binomischen Formel „Potenz vor Punkt …“ beachten

$A_{rot}(x) = \left[\frac{1}{2}(x^2 + 10x + 25)\right]$ FE — Ausmultiplizieren

$A_{rot}(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 5x + 12\frac{1}{2}\right)$ FE

5

a) $T(x) = -4x^2 + 12x - 16$ — Der Faktor –4 wird ausgeklammert, indem man jeden Summanden in der Klammer durch den auszuklammernden Faktor dividiert.

$T(x) = -4[x^2 - 3x + 4]$ — Der Term der quadratisch ergänzt werden muss, ist die Hälfte des Faktors vor der Variablen x. Die Hälfte von 3 ist 1,5, also ergänze $1{,}5^2$.

$T(x) = -4[x^2 - 2 \cdot x \cdot 1{,}5 \mathbf{+ 1{,}5^2 - 1{,}5^2} + 4]$ — Binomische Formel

$T(x) = -4[(x - 1{,}5)^2 - 2{,}25 + 4]$ — Zusammenfassen

$T(x) = -4[(x - 1{,}5)^2 + 1{,}75]$ — Ausmultiplizieren

$T(x) = -4(x - 1{,}5)^2 - 7$

$T_{max} = -7$ für $x = 1{,}5$ — Maximalen Termwert und zugehörigen Wert für x angeben.

b) $T(a) = \frac{1}{2}a^2 - 12a + 16$ — Der Faktor $\frac{1}{2}$ wird ausgeklammert, indem man jeden Summanden in der Klammer durch den auszuklammernden Faktor dividiert.

$T(a) = \frac{1}{2}[a^2 - 24a + 32]$ — Quadratisch ergänzen

$T(a) = \frac{1}{2}[a^2 - 24a \mathbf{+ 12^2 - 12^2} + 32]$ — Binomische Formel

$T(a) = \frac{1}{2}[(a - 12)^2 - 144 + 32]$ — Zusammenfassen

$T(a) = \frac{1}{2}[(a - 12)^2 - 112]$ — Ausmultiplizieren

Hinweise und Tipps

190 a) $1\text{ mm} = 10^x\text{ m}$

$\Leftrightarrow\ x = -3$, da $10^{-3}\text{ m} = \frac{1}{10^3}\text{ m} = \frac{1}{1\,000}\text{ m} = 1\text{ mm}$

Grundbeziehungen:
$1\text{ km} = 1\,000\text{ m} = 10^3\text{ m}$
$1\text{ m} = 10\text{ dm} = 10^0\text{ m}$
$1\text{ dm} = 10\text{ cm} = 10^{-1}\text{ m}$
$1\text{ cm} = 10\text{ mm} = 10^{-2}\text{ m}$
$1\text{ mm} = 10^{-3}\text{ m}$

b) $1\text{ mm}^2 = 10^x\text{ m}^2$

$\Leftrightarrow\ x = -6$, da $10^{-6}\text{ m}^2 = \frac{1}{10^6}\text{ m}^2 = \frac{1}{1\,000\,000}\text{ m}^2 = 1\text{ mm}^2$

Grundbeziehungen:
$1\text{ km}^2 = 100\text{ ha (Hektar)} = 10^6\text{ m}^2$
$1\text{ ha} = 100\text{ a (Ar)} = 10^4\text{ m}^2$
$1\text{ a} = 100\text{ m}^2 = 10^2\text{ m}^2$
$1\text{ m}^2 = 100\text{ dm}^2 = 10^0\text{ m}^2$
$1\text{ dm}^2 = 100\text{ cm}^2 = 10^{-2}\text{ m}^2$
$1\text{ cm}^2 = 100\text{ mm}^2 = 10^{-4}\text{ m}^2$
$1\text{ mm}^2 = 10^{-6}\text{ m}^2$

c) $1\text{ mm}^3 = 10^x\text{ m}^3$

$x = -9$, da $10^{-9}\text{ m}^3 = \frac{1}{10^9}\text{ m}^3 = \frac{1}{1\,000\,000\,000}\text{ m}^3 = 1\text{ mm}^3$

Grundbeziehungen:
$1\text{ m}^3 = 1\,000\text{ dm}^3 = 10^0\text{ m}^3$
$1\text{ dm}^3 = 1\,000\text{ cm}^3 = 10^{-3}\text{ m}^3$
$1\text{ cm}^3 = 1\,000\text{ mm}^3 = 10^{-6}\text{ m}^3$
$1\text{ mm}^3 = 10^{-9}\text{ m}^3$

d) $1\text{ mg} = 10^x\text{ t}$

$\Leftrightarrow\ x = -9$, da $10^{-9}\text{ t} = \frac{1}{10^9}\text{ t} = \frac{1}{1\,000\,000\,000}\text{ t} = 1\text{ mg}$

Grundbeziehungen:
$1\text{ t} = 1\,000\text{ kg} = 10^0\text{ t}$
$1\text{ kg} = 1\,000\text{ g} = 10^{-3}\text{ t}$
$1\text{ g} = 1\,000\text{ mg} = 10^{-6}\text{ t}$
$1\text{ mg} = 10^{-9}\text{ t}$

---

191 a) $(5^{-4} : 5^3) \cdot 5^9 = 5^{-4-3} \cdot 5^9 = 5^{-7} \cdot 5^9 = 5^{-7+9} = 5^2 = 25$

Anwendung des 2. und des 1. Potenzgesetzes

b) $\frac{3x^6 \cdot 2x^4}{2x^2 \cdot 5x^3} = \frac{3x^6 \cdot \cancel{2}x^4}{\cancel{2}x^2 \cdot 5x^3} = \frac{3x^{6+4}}{5x^{2+3}} = \frac{3x^{10}}{5x^5} = \frac{3}{5}x^5$

Denke an frühzeitiges Kürzen.
Gleiche Basis, also werden bei der Multiplikation die Exponenten addiert.
Anwendung des 2. Potenzgesetzes: $x^{10-5} = x^5$

c) $\left(\frac{4}{ab}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^3b^2}{4}\right)^3 = \left(\frac{\cancel{4}}{\cancel{a}\cdot\cancel{b}} \cdot \frac{a^{\cancel{3}\,2}\,b^{\cancel{2}\,1}}{\cancel{4}}\right)^3 = (a^2b)^3 = a^6b^3$

Anwendung des 3. Potenzgesetzes: Die Exponenten stimmen überein, die Basen werden multipliziert.
Der Klammerausdruck kann durch Anwendung des 5. Potenzgesetzes eliminiert werden.

d) $(2x^2y^3)^3 \cdot (5x^3y)^2 = 2^{\mathbf{3}}x^{2\cdot\mathbf{3}}y^{3\cdot\mathbf{3}} \cdot 5^{\mathbf{2}}x^{3\cdot\mathbf{2}}y^{\mathbf{2}}$

Anwendung des 5. Potenzgesetzes. Beachte: $2 = 2^1$, damit kann auch für 2 das Potenzgesetz angewendet werden: $(2^1)^3 = 2^{1\cdot 3} = 2^3$

$= 8x^6y^9 \cdot 25x^6y^2$

Kommutativgesetz der Multiplikation anwenden

$= 8 \cdot 25x^6 \cdot x^6 \cdot y^9 \cdot y^2$

$= 200x^{6+6}y^{9+2}$

$= 200x^{12}y^{11}$

Anwendung des 1. Potenzgesetzes:
$x^6 \cdot x^6 = x^{6+6} = x^{12}$
$y^9 \cdot y^2 = y^{9+2} = y^{11}$

e) $\frac{36x^4}{6x^{-5}} + \frac{30x^2}{5x^{-3}} = \frac{6x^4}{x^{-5}} + \frac{6x^2}{x^{-3}}$

Rechtzeitiges Kürzen vereinfacht die Aufgabe.

$= 6 \cdot (x^4 : x^{-5}) + 6 \cdot (x^2 : x^{-3})$

Bei gleichen Basen werden die Exponenten subtrahiert.

$= 6x^{4-(-5)} + 6x^{2-(-3)}$

$= 6x^9 + 6x^5$

f) $(a^2 + 6a + 9) \cdot (a+3)^3 = (a+3)^2 \cdot (a+3)^3$

Beachte die Anwendung der 1. binomischen Formel in der 1. Klammer. 1. Potenzgesetz anwenden

$= (a+3)^{2+3}$

$= (a+3)^5$

192 a) $\frac{x^{2n-1}}{x^{n+3}} = x^{2n-1-(n+3)} = x^{2n-1-n-3} = x^{n-4}$

Division von Potenzen mit gleicher Basis: Anwendung des 2. Potenzgesetzes: Subtraktion der Exponenten

b) $\frac{(xy)^{4n-2}}{(xy)^{2(n-1)}} = (xy)^{4n-2-2(n-1)} = (xy)^{4n-2-2n+2} = (xy)^{2n}$

Division von Potenzen mit gleicher Basis: Anwendung des 2. Potenzgesetzes: Subtraktion der Exponenten

c) $\frac{\left(a^2-b^2\right)^{3x}}{(a+b)^{3x}} = \left(\frac{\cancel{(a+b)}(a-b)}{\cancel{(a+b)}}\right)^{3x} = (a-b)^{3x}$

Division von Potenzen mit gleichem Exponenten: Anwendung des 4. Potenzgesetzes

Vereinfache durch Anwendung der 3. binomischen Formel.

d) $\frac{(a+b)^{12x+5}}{(b+a)^{8x}} = \frac{(a+b)^{12x+5}}{(a+b)^{8x}}$

$= (a+b)^{12x+5-8x}$

$= (a+b)^{4x+5}$

Kommutativgesetz der Addition: $b+a=a+b$

Division von Potenzen mit gleicher Basis: Subtraktion der Exponenten

e) $a^x \cdot a^{x-1} : a^{2x} = a^{x+x-1} : a^{2x}$

$= a^{2x-1} : a^{2x}$

$= a^{2x-1-2x}$

$= a^{-1}$

$= \frac{1}{a}$

Multiplikation /Division von Potenzen mit gleicher Basis: Anwendung des 1. Potenzgesetzes: Addition der Exponenten

Anwendung des 2. Potenzgesetzes: Subtraktion der Exponenten

f) $(n+0{,}25m)^{0{,}5x-1} \cdot (n+0{,}25m)^{1+0{,}5x}$

$= (n+0{,}25m)^{0{,}5x-1+1+0{,}5x}$

$= (n+0{,}25m)^{x}$

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis: Anwendung des 1. Potenzgesetzes: Addition der Exponenten

g) $\left(\frac{1}{2}a\right)^b \cdot (16a^2)^b = \left(\frac{1}{2}a \cdot 16a^2\right)^b = \left(\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot a \cdot a^2\right)^b = (8a^3)^b$

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten: Anwendung des 3. Potenzgesetzes: Multiplikation der Basen

h) $\left(\frac{5}{x}\right)^{2a+1} \cdot (2x)^{2a+1} = \left(\frac{5}{x} \cdot 2x\right)^{2a+1} = 10^{2a+1}$

Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten: Anwendung des 3. Potenzgesetzes

---

193 a) $16^3 : \left[-\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\right] = 16^3 : [-4^3]$

$= 16^3 : (-4)^3$

$= [16 : (-4)]^3$

$= (-4)^3$

$= -64$

Beachte: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Wende das 4. Potenzgesetz an.

b) $(\sqrt{32})^{-1} : (\sqrt{72})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{32}} : \frac{1}{\sqrt{72}}$

$= \frac{1}{\sqrt{16 \cdot 2}} : \frac{1}{\sqrt{36 \cdot 2}}$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}} : \frac{1}{6\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{1}$

Beachte: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Teilweises Radizieren

Multipliziere mit dem Kehrbruch.

Kürze mit dem Produkt $2\sqrt{2}$.

Hinweise und Tipps

$$=\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$
$$=1\frac{1}{2}$$

c) $\frac{6^{-2}\cdot 24^{-2}}{36^{-2}}=\frac{(6\cdot 24)^{-2}}{36^{-2}}=\left(\frac{6\cdot 24}{36}\right)^{-2}=4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16}$

Anwendung des 3. Potenzgesetzes und Anwendung des 4. Potenzgesetzes
Kürze.

d) $2^{-4}\cdot\frac{0{,}125}{8^{-3}}=\frac{1}{2^4}\cdot 0{,}125\cdot\frac{1}{8^{-3}}$

$0{,}125=\frac{1}{8}$

$=\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{8}\cdot 8^3$

Kürze.

$=\frac{1}{2^4}\cdot 8^2$

Ersetze $8=2^3$.

$=\frac{\left(2^3\right)^2}{2^4}$

Wende das 5. Potenzgesetz an.

$=\frac{2^6}{2^4}$

Wende das 2. Potenzgesetz an.

$=2^2$
$=4$

---

194 a) $v_{\text{Raumschiff}}=\frac{1}{1\,000}\cdot 3\cdot 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

Beachte:
Der Buchstabe s wird sowohl als Symbol der Größeneinheit Sekunde als auch als Formelsymbol für den Weg verwendet.

$v_{\text{Raumschiff}}=10^{-3}\cdot 3\cdot 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

$v_{\text{Raumschiff}}=3\cdot 10^{-3}\cdot 10^5\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$

$v_{\text{Raumschiff}}=3\cdot 10^2\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\ \left(=300\ \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)$

$$\text{Geschwindigkeit}=\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

$\Leftrightarrow\quad \text{Zeit}=\frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}$

Dividiere den Erdumfang durch die Geschwindigkeit des Raumschiffs.

$\Leftrightarrow\quad t=\frac{4\cdot 10^4\ \cancel{\text{km}}}{3\cdot 10^2\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\text{s}}}$

$\Leftrightarrow\quad t=\frac{4}{3}\cdot 10^2\ \text{s}$

$\Leftrightarrow\quad t=133\frac{1}{3}\ \text{s}$

Das Raumschiff umrundet die Erde in $133\frac{1}{3}$ Sekunden.

b) $\text{Zeit}=\frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}$

Dividiere die Entfernung von der Erde zur Sonne durch die Geschwindigkeit des Raumschiffs.

$\Leftrightarrow\quad t=\frac{1{,}5\cdot 10^8\ \cancel{\text{km}}}{3\cdot 10^2\ \frac{\cancel{\text{km}}}{\text{s}}}$

$\Leftrightarrow\quad t=\frac{1{,}5}{3}\cdot 10^6\ \text{s}$

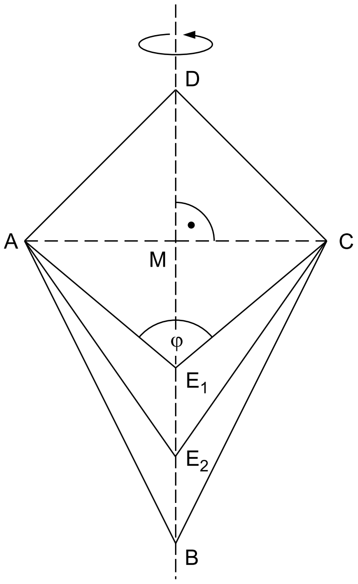
Original-Abschlussprüfung

Abschlussprüfung 2019

Teil A

Hinweise und Tipps

Aufgabe A 1.0



Aufgabe A 1.1

Einzeichnen des Drachenvierecks AE_2CD

Da $\varphi = 70°$ gelten soll, müssen die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck AE_2C das Maß $(180° - 70°) : 2 = 55°$ haben.

Bestätigung der unteren Intervallgrenze für φ:
Im rechtwinkligen Dreieck ABM gilt:

$$\tan \sphericalangle MBA = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \quad \text{mit } \overline{BM} = \overline{BD} - \overline{DM} = (6-2)\text{ cm} = 4\text{ cm} \text{ und } \sphericalangle MBA = 0{,}5 \cdot \varphi_{min}$$

$$\tan(0{,}5 \cdot \varphi_{min}) = \frac{2\text{ cm}}{4\text{ cm}}$$

$$\varphi_{min} = 53{,}13°$$

Der kleinstmögliche Wert φ_{min} ergibt sich, wenn E_n auf B liegt, d. h., es gilt:
$\varphi_{min} = 2 \cdot \sphericalangle MBA$