MEHR ERFAHREN

Mathem…

Auf einen …

Stochastik

Prüfung…

STARK

MEHR ERFAHREN

Mathem

Auf einen

Stochastik

Prüfung

STARK

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Heft bietet Ihnen einen **kompakten Überblick** über die in der Schule behandelten Inhalte in der **Stochastik** und dient als nützlicher Baustein bei der Vorbereitung auf Klausuren und die Abiturprüfung. Das Besondere dabei: Jedes Thema ist konsequent im praktischen **Doppelseitenformat** dargestellt. **Auf einen Blick** erfassen Sie so alle Zusammenhänge oder verwenden die Doppelseite als Hilfestellung bei einer vorgegebenen Aufgabe.

Jede Doppelseite bietet

- eine kompakte Einführung zum Thema (**Auf einen Blick**).
- eine Aufstellung wichtiger **Begriffe, Schreibweisen und Formeln** zum jeweiligen Thema.
- **Beispielaufgaben**, die sich mit für das Thema typischen Aufgabenstellungen befassen und ausführlich gelöst werden.
- eine Zusammenstellung von Punkten, die bei der Einordnung des Themas in einen Gesamtzusammenhang helfen oder bei der Lösung von Aufgaben beachtet werden sollten, um typischen Fehlern vorzubeugen (**Worauf Sie achten sollten …**).

Ein Zusatzteil, der sich mit dem Umgang mit **Stochastiktabellen** befasst, rundet die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten dieses Hefts ab.

Begleitend zum Inhalt bietet die **Mindmap** eine Übersicht der Themen dieses Hefts und verdeutlicht deren Zusammenhänge.

Viel Erfolg bei der Arbeit mit diesem Heft!

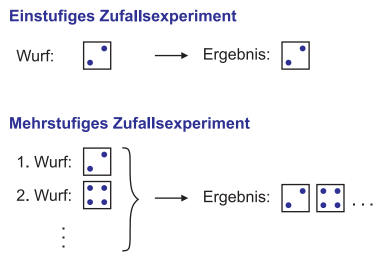
K. Neumeier

Kathrin Neumeier

Auf einen Blick

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Versuch mit mehreren möglichen Ausgängen, bei dem vorher nicht klar ist, welcher Ausgang eintreten wird.

Wird dieser Versuch einmal durchgeführt, handelt es sich um ein **einstufiges Zufallsexperiment**. Besteht das Experiment aus mehreren Einzelversuchen, spricht man von einem **mehrstufigen Zufallsexperiment**.

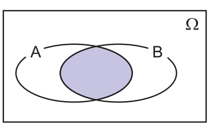


Begriffe, Schreibweisen und Formeln

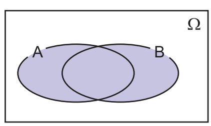
Ergebnisse und Ereignisse

- Als **Ergebnisraum** oder **Ergebnismenge Ω** wird die Menge aller möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments bezeichnet. Diese nennt man **Ergebnisse** und sie werden mit ω_1, ω_2 etc. bezeichnet:
  $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \ldots; \omega_m\}$
- Die Anzahl m der Ergebnisse gibt die **Mächtigkeit** der Ergebnismenge an. Man schreibt:
  $|\Omega| = m$
- Bei einem **einstufigen Zufallsexperiment** enthalten die Ergebnisse jeweils **nur ein Element**.
- Bei einem **n-stufigen Zufallsexperiment** bestehen die Ergebnisse aus **Tupeln**, die **n Elemente** enthalten: $(e_1; e_2; \ldots; e_n)$ oder kurz $e_1e_2\ldots e_n$
- Jede Teilmenge der Ergebnismenge Ω stellt ein **Ereignis** dar. Die Menge aller Teilmengen von Ω wird als **Ereignisraum** bezeichnet.
- Ein Ereignis A enthält k Ergebnisse. Man schreibt: $|A| = k$

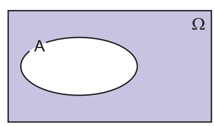
Verknüpfung von Ereignissen und Gegenereignis



Schnittmenge der Ereignisse A und B: $A \cap B$



Vereinigungsmenge der Ereignisse A und B: $A \cup B$



Gegenereignis von Ereignis A: $\overline{A}$

Besondere Ereignisse

- Ereignis enthält **alle** Ergebnisse der Ergebnismenge Ω: **sicheres Ereignis**
- Ereignis enthält **genau ein** Ergebnis der Ergebnismenge Ω: **Elementarereignis**
- Ereignis enthält **kein** Ergebnis der Ergebnismenge Ω: **unmögliches Ereignis**
- Zwei Ereignisse enthalten **kein gemeinsames Ergebnis ($A \cap B = 0$)** der Ergebnismenge Ω: **disjunkte** oder **unvereinbare Ereignisse**

Ein- und mehrstufige Zufallsexperimente

Beispielaufgaben

1. Bei welchen der folgenden Versuche handelt es sich um Zufallsexperimente? Begründen Sie.
   a) Wurf eines Würfels
   b) Ausstrahlung der Sendungen eines Fernsehsenders
   c) Ziehen eines Loses

2. Ein Clown jongliert mit einem roten, einem blauen und einem grünen Ball so lange, bis einer dieser Bälle herunterfällt. Es wird betrachtet, welcher Ball zuerst fällt.
   a) Geben Sie die Ergebnismenge an, wenn der Versuch einmal durchgeführt wird.
   b) Geben Sie die Ergebnismenge an, wenn der Versuch zweimal durchgeführt wird.
   c) Für das zweistufige Zufallsexperiment werden die Ereignisse $A = \{rr;\ bb;\ gg\}$ und $B = \{rr;\ rb;\ rg\}$ festgelegt. Dabei gilt: $r = \text{rot}$, $b = \text{blau}$ und $g = \text{grün}$
   Bestimmen Sie die Schnittmenge und die Vereinigungsmenge von A und B sowie das Gegenereignis von A.

Lösung:

1. a) Bei einem Würfel können die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 fallen. Es ist vorher nicht klar, welche der Zahlen oben liegen wird. Daher handelt es sich um ein Zufallsexperiment.
   b) Das Fernsehprogramm eines Senders wird genau geplant und festgelegt. Daher weiß man, welche Sendungen ausgestrahlt werden. Es handelt sich also nicht um ein Zufallsexperiment.
   c) Beim Ziehen eines Loses weiß man nicht, was sich in den jeweiligen Losen befindet. Ob man einen Gewinn oder eine Niete zieht, ist zufällig. Es handelt sich deshalb um ein Zufallsexperiment.

2. a) Mit $r = \text{rot}$, $b = \text{blau}$ und $g = \text{grün}$ gilt:
   $\Omega = \{r;\ b;\ g\}$
   b) $\Omega = \{rr;\ rb;\ rg;\ br;\ bb;\ bg;\ gr;\ gb;\ gg\}$
   c) Schnittmenge: $A \cap B = \{rr\}$
   Vereinigungsmenge: $A \cup B = \{rr;\ rb;\ rg;\ bb;\ gg\}$
   Gegenereignis von A: $\overline{A} = \{rb;\ rg;\ br;\ bg;\ gr;\ gb\}$

Vereinigungsmenge
Das Ergebnis rr ist in beiden Ereignissen enthalten.
Es wird daher bei der Vereinigungsmenge nur einmal aufgelistet.

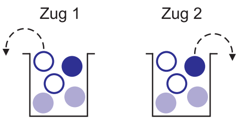
Worauf Sie achten sollten …

- Jedes Zufallsexperiment lässt sich als **Urnenexperiment** veranschaulichen. Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten unterscheidet man zwischen den Fällen **mit Zurücklegen** und **ohne Zurücklegen**. [▶ S. 12 f.]
- Bei der Betrachtung eines Zufallsexperiments kann die Verwendung eines **Baumdiagramms** hilfreich sein. [▶ S. 10 f.]
- Besondere Zufallsexperimente: **Laplace-** [▶ S. 8 f.] und **Bernoulli-Experimente** [▶ S. 20 f.]
- Häufig werden die Begriffe Ergebnis und Ereignis miteinander verwechselt. Als Ergebnis wird jeder mögliche Ausgang des Zufallsexperiments bezeichnet. Ein Ereignis kann kein oder genau ein Ergebnis enthalten oder auch mehrere Ergebnisse.
- Bei der Veranschaulichung von Verknüpfungen von Ereignissen helfen **Mengendiagramme**. [▶ S. 2, *Verknüpfung von Ereignissen und Gegenereignis*]

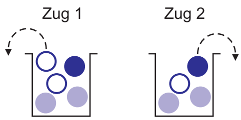
Auf einen Blick

Zufallsexperimente lassen sich durch **Urnenmodelle** veranschaulichen. Es befindet sich eine bestimmte Anzahl von Kugeln mit unterschiedlichen Merkmalen in einer Urne, aus der zufällig Kugeln gezogen werden. Man unterscheidet:

Ziehen **mit Zurücklegen**



Ziehen **ohne Zurücklegen**



Die **Reihenfolge** der gezogenen Kugeln wird

- beachtet: ○ ● ≠ ● ○
- **nicht** beachtet: ○ ● = ● ○

Begriffe, Schreibweisen und Formeln

Ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

- **Fakultät n!:** Anzahl der Möglichkeiten, n unterschiedliche Kugeln zu ziehen:
  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1;\ \ n \in \mathbb{N}_0$
- **k-Permutation:** Anzahl der Möglichkeiten, k Kugeln aus insgesamt n unterschiedlichen Kugeln zu ziehen: $\frac{n!}{(n-k)!};\ \ n, k \in \mathbb{N}_0;\ k \le n$

Ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge

- **Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$:** Anzahl der Möglichkeiten, k Kugeln aus insgesamt n Kugeln ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!};\ \ n, k \in \mathbb{N}_0;\ k \le n$

Mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge

- **k-Tupel:** Anzahl der Möglichkeiten, k Kugeln aus insgesamt n unterschiedlichen Kugeln zu ziehen: n^k; $n, k \in \mathbb{N}_0$; k kann größer, kleiner oder gleich n sein

Wahrscheinlichkeit beim Urnenmodell „ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge“

- In einer Urne befinden sich N Kugeln, von denen K Kugeln ein bestimmtes Merkmal aufweisen. Es werden n Kugeln gezogen. Die Wahrscheinlichkeit, dass **unter diesen n Kugeln k Kugeln** das bestimmte Merkmal haben, ist:

$$P(k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}};\ \ n \le N;\ k \le K;\ K \le N$$

Beispielaufgaben

1. Mia denkt sich einen Code für ihr Zahlenschloss am Fahrrad aus. Er muss aus 4 Zahlen zwischen 0 und 9 bestehen.
   a) Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wenn die Ziffern mehrfach vorkommen dürfen.
   b) Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wenn jede Ziffer nur maximal einmal vorkommen darf.
   c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Code aus vier gleichen Zahlen besteht, wenn die Bedingung aus Teilaufgabe a gelten soll.

2. 10 Freunde treffen sich regelmäßig zu einem Stammtisch. Zu einem Treffen erscheinen 6 Freunde.
   Ermitteln Sie die Anzahl der möglichen Konstellationen.

3. Lukas besitzt 4 blaue und 2 schwarze Hosen. Für den Urlaub möchte er 3 Hosen einpacken. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er nur blaue Hosen einpackt.

Lösung:

1. a) Mit Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge:
   $10^4 = 10\,000$

   b) Ohne Zurücklegen, mit Beachtung der Reihenfolge:
   $\frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$

   c) Das Ereignis „vier gleiche Ziffern“ beinhaltet folgende Ergebnisse: 0000, 1111, …, 9999
   $\Rightarrow$ 10 günstige Ergebnisse
   $P(\text{vier gleiche Ziffern}) = \frac{10}{10^4} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001 = 0{,}1\,\%$

Laplace-Experiment

$$P = \frac{\text{Anzahl aller günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$$

2. Ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge:
   $\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot (10-6)!} = 210$

3. Ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge:
   $N = 4 + 2 = 6;\ K = 4;\ n = 3;\ k = 3$
   $P(\text{3 blaue Hosen}) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{2}{0}}{\binom{6}{3}} = \frac{4 \cdot 1}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\,\%$

Worauf Sie achten sollten …

- Die Bestimmung der möglichen Anzahlen unter bestimmten Voraussetzungen wird als **Kombinatorik** bezeichnet.
- Die Formeln auf ▶ S. 12 beruhen auf dem **allgemeinen Zählprinzip**. Dieses besagt, dass es bei einem n-stufigen Zufallsexperiment $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ verschiedene Ergebnisse gibt, falls für die i-te Stufe k_i Möglichkeiten zur Verfügung stehen.
- Zu $\binom{n}{k}$ sagt man „k aus n“. Im Taschenrechner wird dies oft mit der Kombination
  [n] → SHIFT → ÷ → [k]
  eingegeben bzw. mithilfe der Taste mit der Aufschrift „nCr“.
- Wichtige Werte des Binomialkoeffizienten:
  $\binom{n}{0} = 1;\ \binom{n}{1} = n;\ \binom{n}{n-1} = n;\ \binom{n}{n} = 1;\ \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$
- Der Fall „ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge“ führt auf die **Bernoulli-Kette** bzw. die **Binomialverteilung**. [▶ S. 20 f. bzw. S. 22 f.]
- Der Fall „mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge“ ist in diesem Heft nicht aufgeführt, da er im Schulunterricht selten eine Rolle spielt.