GYMNASIUM

MEHR ERFAHREN

STARK in KLAUSUREN

Funktionen ableiten

Christine Thamm

STARK

Inhaltsverzeichnis

Vorwort
So arbeiten Sie mit diesem Buch

Ableitungsbegriff und Ableitungsfunktion **1**

1 Interpretation des Ableitungsbegriffs 1
1.1 Die Steigung einer Kurve 1
1.2 Differenzenquotient und Differenzialquotient 2
1.3 Ableitungsfunktion 11

2 Zeichnerisches Ableiten 13
2.1 Zeichnung der Ableitungsfunktion f'(x) durch Ablesen der Tangentensteigungen von f(x) 13
2.2 Grobe Zeichnung der Ableitungsfunktion f'(x) 20

Klausur 1 28

Ableitungsregeln **31**

3 Elementare Ableitungsregeln 31
3.1 Potenzregel 32
3.2 Faktorregel 33
3.3 Konstantenregel 34
3.4 Summenregel 36

4 Weitere Ableitungsregeln 40
4.1 Kettenregel 40
4.2 Produktregel 42
4.3 Quotientenregel 45

Klausur 2 48

Ableitungen spezieller Funktionen **49**

5 Exponentialfunktionen 49
6 Logarithmusfunktionen 53
7 Trigonometrische Funktionen 55
8 Weitere Verknüpfungen von Funktionen und Kurvenscharen 58

Klausur 3 60

Fortsetzung nächste Seite

Auf einen Blick!

Inhaltsverzeichnis

Lösungen **61**

Ableitungsbegriff und Ableitungsfunktion 61

Klausur 1 75

Ableitungsregeln 78

Klausur 2 99

Ableitungen spezieller Funktionen 103

Klausur 3 127

Anhang **131**

Anwendung der Ableitung im Rahmen der Kurvendiskussion 131

Kleine Formelsammlung 132

Autorin: Christine Thamm

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die Differenzialrechnung ist ein wichtiges Teilgebiet der Analysis und für viele Anwendungsbereiche auch außerhalb der Mathematik essenziell. Mithilfe der Ableitung lassen sich Veränderungen einer Größe aufzeigen. Daher ist die Differenzialrechnung ein wesentlicher Bestandteil in naturwissenschaftlichen, technischen und wirtschaftlichen Anwendungen. Beobachtungen des Bevölkerungswachstums, Aktienkurse zu einem bestimmten Zeitpunkt, die momentane Geschwindigkeit einer Rakete oder die Bestandsveränderung von Bakterien sind nur einige Beispiele dafür. Eng mit diesem Gebiet verbunden ist der Mathematiker und Philosoph Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), der ausgehend vom geometrischen Tangentenproblem die Grundlagen der Differenzialrechnung entwickelte. Parallel dazu hat auch Sir Isaac Newton (1643–1727) den Weg zur Differenzialrechnung geebnet, wobei er mit Erkenntnissen seiner physikalischen Untersuchungen argumentierte.

Das Ableiten von Funktionen ist eine grundlegende und unverzichtbare Fertigkeit innerhalb und außerhalb der Mathematik und wird sowohl direkt als auch indirekt in **Klausuren** und nicht zuletzt der **Abiturprüfung** von Ihnen gefordert.

Dieses Buch hilft Ihnen, Ihr Wissen und Ihre Fertigkeiten in diesem wichtigen Themengebiet zu **vertiefen** und zu **testen**.

- Anschauliche **Schritt-für-Schritt-Erklärungen** und konkrete **Rechenbeispiele** vermitteln die Lerninhalte so, dass Sie sie verstehen und anwenden können.
- Zahlreiche **Aufgaben** helfen Ihnen dabei, den neu gelernten Stoff zu festigen.
- **Klausuren** zur Selbstüberprüfung geben Ihnen einen Überblick über Ihren aktuellen Leistungsstand und die Möglichkeit zur Kontrolle Ihres Lernerfolgs.
- Ausführliche **Lösungsvorschläge** sorgen dafür, dass Sie Ihre Lösungsansätze und Rechenwege selbstständig überprüfen und verbessern können.

So können Sie **stark in** Ihre nächste **Klausur** gehen!

Viel Erfolg wünscht Ihnen

Christine Thamm

Auf einen Blick!

3.4 Summenregel

WISSEN

Werden Funktionsterme addiert bzw. subtrahiert, so können die einzelnen Funktionsterme unabhängig voneinander abgeleitet werden:

$f(x) = g(x) \pm k(x)$

$f'(x) = g'(x) \pm k'(x)$

Für die Teilterme gelten dann die Ableitungsregeln der Abschnitte 3.1 bis 3.3.

Begründung der Summenregel mithilfe des Differenzialquotienten:
Mit $f(x) = g(x) + k(x)$ gilt:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) + k(x+h) - (g(x) + k(x))}{h}$$ Klammer auflösen

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) + k(x+h) - g(x) - k(x)}{h}$$ Terme sortieren

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x) + k(x+h) - k(x)}{h}$$ Bruch trennen

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \right)$$ Grenzwertsatz: $\lim(a \pm b) = (\lim a) \pm (\lim b)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h}$$ Definition von $g'(x)$ bzw. $k'(x)$

$$= g'(x) + k'(x)$$

BEISPIEL

a $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 6x + 5$

$f'(x) = 2 \cdot 4x^{4-1} + 3 \cdot 3x^{3-1} - 6 + 0 = 8x^3 + 9x^2 - 6$

b $f(x) = -x^3 + 5\sqrt{x} - x^{-1} + 2x \quad \text{mit} \quad x > 0$ Verwenden Sie $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = -3x^{3-1} + 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - (-1)x^{-1-1} + 2$

$= -3x^2 + \frac{5}{2\sqrt{x}} + x^{-2} + 2$

Vertiefe dein Wissen!

12 Bilden Sie die Ableitungsfunktion f'(x).

a $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$

b $f(x) = 2x^5 - 3x^4$

c $f(x) = 9x^4 + 5x^3 - t$

d $f(x) = 3x^5 - x^2 + 3k$

e $f(x) = k^2x^3 + kx - k^5$

f $f(x) = nx^{n+3} + 3x - 5$

13 Füllen Sie die Lücken.

a $f(x) = \frac{1}{4}x^7 - 2x^6 + 9x + 35$

$f'(x) = \square x^{\square} - \square x^5 + \square$

b $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 7k$

$f'(x) = \square x^{\square} - \square x$

c $f(x) = \frac{2}{7}x^{7+t} - \frac{1}{2}x^4 - \sqrt{3}x^t$

$f'(x) = \square x^{6+t} - \square x^{\square} - \sqrt{3}tx^{\square}$

d $f(x) = (n-1)x^{n+1} + 3x - 5$

$f'(x) = (n^2-1)x^{\square} + \square$

14 Formen Sie die Funktionsterme zunächst so um, dass Sie die Summenregel anwenden können. Berechnen Sie dann f'(x).

TIPP
Nutzen Sie u. a. die binomischen Formeln und schreiben Sie die Brüche in Teilaufgaben h bis j auf getrennte Bruchstriche.

a $f(x) = (x+3)^2$

b $f(x) = -2(x+2)^2 + 3x^2$

c $f(x) = x^2 \cdot (x^5 - 3x^2 + 1)$

d $f(x) = 2x^2 \cdot (3x-1) + x^3 + 5$

e $f(x) = 3x^4 \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{3}\right)$; $x > 0$

f $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - (x+1)^3)$

***g** $f(x) = \frac{4x^2 - 16}{x-2} + 5x^3$; $x \neq 2$

***h** $f(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x}$; $x \neq 0$

***i** $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + x - 6}{3x}$; $x \neq 0$

***j** $f(x) = \frac{x(x+3)^2 - 2x^3 + x^2 - 4}{x^4}$; $x \neq 0$

15 Differenzieren Sie die Funktionen so lange, bis die n-te Ableitung null ergibt.

a $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 3$

b $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 0{,}4x^2 + \frac{1}{6}x - \sqrt[5]{7}$

c $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 7x^2 - \frac{2}{5}x$

d $f(x) = x^5 - 3x^4 + 0{,}75x^3 + 6$

Vertiefe dein Wissen!

Klausur 2

00:45 MIN

1 14 BE

Leiten Sie die Funktionen ab und vereinfachen Sie das Ergebnis ggf. sinnvoll.

a $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+\frac{3}{5}x-3$

b $f(x)=\frac{3x}{x-2};\quad x\neq 2$

c $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^3$

d $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}-4x^2;\quad x>-1$

e $f(x)=\sqrt{x}\cdot(2x+1);\quad x>0$

f $f(x)=\frac{2x}{2x+1}+3\sqrt{x}-\frac{3}{4}x^2+\sqrt[5]{2};\quad x>0$

2 4 BE

Bestimmen Sie die jeweilige Ableitungsfunktion. Achten Sie dabei auf die betreffende Variable.

a $f(x)=ab^3x^2+5a^2cx-\frac{3}{7}bc^2+1$

b $f(a)=ab^3x^2+5a^2cx-\frac{3}{7}bc^2+1$

c $f(b)=ab^3x^2+5a^2cx-\frac{3}{7}bc^2+1$

d $f(c)=ab^3x^2+5a^2cx-\frac{3}{7}bc^2+1$

3 8 BE

Beim ersten Schritt zur Bildung der Ableitungsfunktion wurden Fehler gemacht. Benennen Sie diese und geben Sie anschließend die korrekte Ableitung an. Vereinfachen Sie ggf. das Ergebnis.

a $f(x)=\frac{1}{x^2}\cdot(2x^2+2)^3;\quad x\neq 0$

$u(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ $\qquad v(x)=(2x^2+2)^3$

$u'(x)=-2x^{-1}=-\frac{2}{x}$ $\qquad v'(x)=3(2x^2+2)^2\cdot 4x=12x(2x^2+2)^2$

$f'(x)=-\frac{2}{x}\cdot(2x^2+2)^3+\frac{1}{x^2}\cdot 12x(2x^2+2)^2=\ldots$

b $f(x)=t^2\cdot(5tx^3-2t)^2$

$u(x)=t^2$ $\qquad v(x)=(5tx^3-2t)^2$

$u'(x)=2t$ $\qquad v'(x)=2(5tx^3-2t)^1\cdot(15tx^2-2)$

$\qquad\qquad =(30tx^2-4)\cdot(5tx^3-2t)$

$f'(x)=2t\cdot(5tx^3-2t)^2+t^2\cdot(30tx^2-4)\cdot(5tx^3-2t)=\ldots$

Punkteverteilung (NP ≙ Notenpunkte; BE ≙ Bewertungseinheiten):

NP	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE	26	25	24–23	22–21	20	19	18–17	16	15–14	13–12	11–10	9–8	7–6	5	4	3–0

Ableitungen spezieller Funktionen

5 Exponentialfunktionen

Funktionen mit Gleichungen der Form **$f(x)=a^x$**, bei denen die Funktionsvariable im Exponenten steht, nennt man **Exponentialfunktionen zur Basis a**, wobei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ist. Diese Einschränkung der Basis ist sinnvoll, denn:
Im Spezialfall $f(x)=1^x$ ergäbe sich die konstante Funktion $y=1$, deren Graph eine Waagerechte darstellt. Falls $a<0$ wäre, würden die Funktionswerte zwischen positiven und negativen Werten umherspringen, je nachdem ob der Exponent gerade oder ungerade ist, und die Funktion wäre nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Falls die Basis a die Euler'sche Zahl e ($\approx 2{,}718$) ist, also **$f(x)=e^x$**, spricht man von der **natürlichen Exponentialfunktion** oder kurz **e-Funktion**. (e-Funktion ist also nicht die Abkürzung für Exponentialfunktion, sondern meint die spezielle Basis e.)

WISSEN

Ableitungsregel für Exponentialfunktionen:
$f(x)=a^x$
$f'(x)=a^x \cdot \ln a$
Es wird also nur der Faktor $\ln a$ ergänzt, wobei ln der natürliche Logarithmus ist (Logarithmus zur Basis e, vgl. Kapitel 6).

Hinweise:

- Der Exponent x darf in diesem Fall nur alleine stehen bzw. mit Faktor 1. Andernfalls muss diese Ableitungsregel mit der Kettenregel kombiniert werden.
- Bei Verknüpfungen von Funktionen gelten zusätzlich alle weiteren bekannten Differenziationsregeln.
- Die Exponentialfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar.

BEISPIEL

a $f(x)=2^x$
$f'(x)=2^x \cdot \ln 2 \approx 0{,}693 \cdot 2^x$

b $f(x)=-3^x$
$f'(x)=-(3^x \cdot \ln 3) \approx -1{,}099 \cdot 3^x$

Ableitung mithilfe der Faktorregel, denn:
$-3^x \neq (-3)^x \qquad -3^x = -1 \cdot 3^x$

Vertiefe dein Wissen!

c $f(x) = 5 \cdot 2^x$

$f'(x) = 5 \cdot 2^x \cdot \ln 2 \approx 3{,}466 \cdot 2^x$ — Ableitung mithilfe der Faktorregel

d $f(x) = 3^x + 6 \cdot 5^x$

$f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 + 6 \cdot 5^x \cdot \ln 5$
$\approx 1{,}099 \cdot 3^x + 9{,}657 \cdot 5^x$ — Ableitung mithilfe der Faktor- und Summenregel

e $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$

Wie im letzten Beispiel gezeigt wurde, entspricht die 1. Ableitung der e-Funktion – und folgend alle weiteren Ableitungen – wieder der Funktionsgleichung $f(x)=e^x$.

WISSEN

Für die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion gilt:
$f(x) = e^x$
$f'(x) = e^x$

Bei wissenschaftlichen Anwendungen, die auf Exponentialfunktionen basieren (z. B. Bevölkerungswachstum, Zinsvergleiche), wird häufig eine allgemeine Basis a auf die Basis e umgerechnet. Diese Umformung kann sinnvoll sein für Vergleichszwecke verschiedener Studien oder zur Vereinheitlichung von Rechnungen. Zudem kann dadurch beim Ableiten auf den Faktor $\ln a$ verzichtet werden, wobei stattdessen die Kettenregel zu beachten ist. Folgende Umformung dient als Beispiel:

BEISPIEL

$f(x) = 2^x$

Umwandlung:

$2 = e^k$

$\ln 2 = k \cdot \ln e$ — Logarithmieren und Anwenden der Logarithmenregel

$\ln 2 = k$ — $\ln e = 1$

$0{,}693 = k$

$f(x) = 2^x = (e^{0{,}693})^x = e^{0{,}693x}$ — Potenzgesetz $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Da der ursprüngliche Exponent x nun nicht mehr den Faktor 1 hat, muss bei der Ableitung die Kettenregel beachtet werden. Die Verkettung betrifft die Funktionen $g(x)=e^x$ und $h(x)=0{,}693x$, gemäß $f=g \circ h$ (h(x) ist hierbei die innere Funktion und g(x) die äußere Funktion).

Vertiefe dein Wissen!

12

a $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 5$

b $f(x) = 2x^5 - 3x^4$

$f'(x) = 10x^4 - 12x^3$

c $f(x) = 9x^4 + 5x^3 - t$

$f'(x) = 36x^3 + 15x^2$

d $f(x) = 3x^5 - x^2 + 3k$

$f'(x) = 15x^4 - 2x$

e $f(x) = k^2x^3 + kx - k^5$

$f'(x) = 3k^2x^2 + k$

f $f(x) = nx^{n+3} + 3x - 5$

$f'(x) = n\cdot(n+3)x^{n+2} + 3 = (n^2 + 3n)x^{n+2} + 3$

13

a $f(x) = \frac{1}{4}x^7 - 2x^6 + 9x + 35$

$f'(x) = \frac{7}{4}x^6 - 12x^5 + 9$

b $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 7k$

$f'(x) = 8x^3 - 10x$

c $f(x) = \frac{2}{7}x^{7+t} - \frac{1}{2}x^4 - \sqrt{3}x^t$

$f'(x) = \frac{2}{7}\cdot(7+t)x^{6+t} - \frac{1}{2}\cdot 4x^3 - \sqrt{3}\cdot tx^{t-1} = \left(2 + \frac{2t}{7}\right)x^{6+t} - 2x^3 - \sqrt{3}tx^{t-1}$

d $f(x) = (n-1)x^{n+1} + 3x - 5$

$f'(x) = (n-1)(n+1)x^n + 3 = (n^2 - 1)x^n + 3$

Im letzten Schritt wurde die dritte binomische Formel angewendet.

14

a $f(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

$f'(x) = 2x + 6$

b $f(x) = -2(x+2)^2 + 3x^2 = -2(x^2 + 4x + 4) + 3x^2 = -2x^2 - 8x - 8 + 3x^2$

$= x^2 - 8x - 8$

$f'(x) = 2x - 8$

Überprüfe deine Ergebnisse!

Klausur 2

1 **a** $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+\frac{3}{5}x-3$

Die Ableitung erfolgt mithilfe der Faktor- und Summenregel:

$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot 3x^2-2x+\frac{3}{5}=\frac{3}{4}x^2-2x+\frac{3}{5}$ (1 BE)

b $f(x)=\frac{3x}{x-2}$

Die Ableitung erfolgt mithilfe der Quotientenregel:

$u(x)=3x$ $v(x)=x-2$

$u'(x)=3$ $v'(x)=1$

$f'(x)=\frac{3\cdot(x-2)-3x\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{3x-6-3x}{(x-2)^2}=\frac{-6}{(x-2)^2}$ (2 BE)

Es lohnt sich nicht, den Nenner $(x-2)^2$ aufzulösen.

c $f(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^3$

Die Ableitung erfolgt mithilfe der Kettenregel:

$f'(x)=\underbrace{3\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2x}_{\text{innere Ableitung}}=3x\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^2$ (2 BE)

Weiteres Vereinfachen durch Auflösen der Klammer mithilfe der binomischen Formel könnte vorgenommen werden. Für das Bestimmen der Lösungen von $f'(x)=0$ wäre dies jedoch nicht sinnvoll und bezüglich der Bildung der 2. Ableitung muss der Aufwand abgeschätzt werden im Vergleich zum Anwenden der Produktregel in Kombination mit der Kettenregel.

d $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}-4x^2=(x^3+1)^{\frac{1}{3}}-4x^2$

Die Ableitung erfolgt mithilfe der Summen- und der Kettenregel:

$f'(x)=\underbrace{\frac{1}{3}(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{3x^2}_{\text{innere Ableitung}}-8x=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}-8x$ (3 BE)

Weiteres Vereinfachen wäre aufwendig und daher nicht sinnvoll und bzgl. des Weiterrechnens im Rahmen der Kurvendiskussion auch nicht nötig.

e $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x+1)$

Die Ableitung erfolgt mithilfe der Produktregel:

$u(x) = \sqrt{x}$ $\qquad$ $v(x) = 2x+1$

$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad$ $v'(x) = 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (2x+1) + \sqrt{x} \cdot 2 = \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2x+1+4x}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$$ (3 BE)

f $f(x) = \frac{2x}{2x+1} + 3\sqrt{x} - \frac{3}{4}x^2 + \sqrt[5]{2}$

Die Ableitung erfolgt mithilfe der Summenregel. Dabei wird die Ableitung jedes Summanden einzeln ermittelt.

Hinweis: $\sqrt[5]{2}$ ist eine Konstante und fällt beim Ableiten weg.

Für den ersten Summanden $g(x) = \frac{2x}{2x+1}$ wird die Quotientenregel angewendet:

$u(x) = 2x$ $\qquad$ $v(x) = 2x+1$

$u'(x) = 2$ $\qquad$ $v'(x) = 2$

$$g'(x) = \frac{2 \cdot (2x+1) - 2x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x+2-4x}{(2x+1)^2} = \frac{2}{(2x+1)^2}$$

Es lohnt sich nicht, den Nenner $(2x+1)^2$ aufzulösen.

Ableitung von f(x):

$$f'(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x$$ (3 BE)

2 Die Funktionsterme in den vier Teilaufgaben sind identisch! Nur die Funktionsvariable (die für das Ableiten relevant ist) ist jeweils eine andere. Markieren Sie deshalb in jeder Funktionsgleichung die Variable, auf die Bezug genommen wird, da Sie nach dieser ableiten müssen. Alle anderen Buchstaben sind Parameter und werden wie Zahlen behandelt. Terme, in denen die betreffende Variable nicht enthalten ist, fallen beim Ableiten nach der Konstantenregel weg. Außerdem gilt die Faktorregel.

a $f(\mathbf{x}) = ab^3\mathbf{x^2} + 5a^2c\mathbf{x} - \frac{3}{7}bc^2 + 1$

$f'(x) = ab^3 \cdot 2x + 5a^2c = 2ab^3x + 5a^2c$

b $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}b^3x^2 + 5\mathbf{a^2}cx - \frac{3}{7}bc^2 + 1$

$f'(a) = b^3x^2 + 5cx \cdot 2a = b^3x^2 + 10acx$

c $f(\mathbf{b}) = a\mathbf{b^3}x^2 + 5a^2cx - \frac{3}{7}\mathbf{b}c^2 + 1$

$f'(b) = ax^2 \cdot 3b^2 - \frac{3}{7}c^2 = 3ab^2x^2 - \frac{3}{7}c^2$

d $f(\mathbf{c}) = ab^3x^2 + 5a^2\mathbf{c}x - \frac{3}{7}b\mathbf{c^2} + 1$

$f'(c) = 5a^2x - \frac{3}{7}b \cdot 2c = 5a^2x - \frac{6}{7}bc$

3 **a** Der Fehler liegt in der Ableitung des ersten Faktors:

$u(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $\qquad$ $v(x) = (2x^2 + 2)^3$

$u'(x) = \mathbf{-2x^{-1} = -\frac{2}{x}}$ $\qquad$ $v'(x) = 3(2x^2 + 2)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2 + 2)^2$

Beim Ableiten wird bei x vom Exponenten 1 abgezogen. Achten Sie besonders bei negativen Exponenten darauf, wie Sie rechnen müssen.

Richtig ist somit: $u'(x) = \mathbf{-2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}}$

Ableitung von f(x) mithilfe der Produktregel:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot (2x^2 + 2)^3 + \frac{1}{x^2} \cdot 12x(2x^2 + 2)^2$$

$$= -\frac{2}{x^3} \cdot (2x^2 + 2)^3 + \frac{12}{x} \cdot (2x^2 + 2)^2$$

$$= (2x^2 + 2)^2 \cdot \left(-\frac{2}{x^3} \cdot (2x^2 + 2) + \frac{12}{x}\right)$$

$$= (2x^2 + 2)^2 \cdot \left(-\frac{4x^2 + 4}{x^3} + \frac{12}{x}\right)$$

$$= (2x^2 + 2)^2 \cdot \left(\frac{-(4x^2 + 4) + 12x^2}{x^3}\right)$$

$$= (2x^2 + 2)^2 \cdot \left(\frac{8x^2 - 4}{x^3}\right)$$

Die vorgestellten Schritte zur Vereinfachung sind nur eine Möglichkeit.

STARK