

# abitur Skript

## Mathema

### MEHR ERFAHREN

*Das musst du wissen!*

Abi Niedersachsen



**STARK**

# Inhalt

Vorwort

## Analysis

<b>1 Ganzrationale Funktion und ihre Eigenschaften .....</b>	<b>1</b>
1.1 Definition .....	1
1.2 Grenzwertverhalten ganzrationaler Funktionen .....	2
1.3 Vielfachheit von Nullstellen .....	2
1.4 Symmetrie (bezüglich des Koordinatensystems) .....	3
1.5 Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen .....	4
<b>2 Weitere Funktionen .....</b>	<b>7</b>
2.1 Natürliche Exponentialfunktion .....	7
2.2 Natürliche Logarithmusfunktion .....	8
2.3 In-Funktion zum Lösen einfacher Exponentialgleichungen ....	8
2.4 Wurzelfunktion .....	9
2.5 Sinusfunktion .....	9
<b>3 Ableitung .....</b>	<b>10</b>
3.1 Die Ableitung .....	10
3.2 Ableitungsregeln .....	11
<b>4 Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung .....</b>	<b>12</b>
4.1 Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte .....	12
4.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte .....	15
4.3 Extremwertaufgaben .....	18
<b>5 Kurvenanpassung .....</b>	<b>21</b>
5.1 Bestimmen von ganzrationalen Funktionen mithilfe linearer Gleichungssysteme .....	21
5.2 Trassierung .....	23
5.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit .....	24

<b>6 Integralrechnung .....</b>	<b>27</b>
6.1 Der Begriff des Integrals .....	27
6.2 Stammfunktion .....	29
6.3 Integralfunktion und Hauptsatz .....	30
6.4 Flächenberechnung .....	32
6.5 Uneigentliches Integral (eA) .....	34
6.6 Mittelwert und Volumenberechnung (Volumenberechnung: eA) .....	36
<b>7 Wachstumsmodelle und Differenzialgleichungen .....</b>	<b>37</b>
7.1 Exponentielles Wachstum .....	37
7.2 Begrenztes Wachstum .....	38
7.3 Logistisches Wachstum .....	39
 <b>Geometrie</b>	
<b>1 Punkte im Koordinatensystem .....</b>	<b>41</b>
1.1 Punkte im Raum .....	41
1.2 Abstand von zwei Punkten .....	41
<b>2 Vektoren .....</b>	<b>42</b>
2.1 Rechnen mit Vektoren .....	42
2.2 Linearkombination .....	44
2.3 Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren .....	45
2.4 Skalarprodukt .....	45
<b>3 Geraden und Ebenen .....</b>	<b>47</b>
3.1 Geraden im Raum .....	47
3.2 Lagebeziehungen zwischen Geraden .....	48
3.3 Parameterform der Ebenengleichung .....	49
3.4 Normalenform/Koordinatenform der Ebenengleichung .....	51
3.5 Umwandlung: Parameterform $\leftrightarrow$ Normalenform/Koordinatenform .....	51
3.6 Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene .....	52
3.7 Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen (eA) .....	54
3.8 Schnittwinkel .....	55

<b>4 Abstände zwischen geometrischen Objekten .....</b>	<b>56</b>
4.1 Abstand zu einer Ebene .....	56
4.2 Abstand eines Punktes zu einer Geraden (eA) .....	57
4.3 Abstand zweier windschiefer Geraden (eA) .....	60
<b>Stochastik</b>	
<b>1 Grundlagen .....</b>	<b>61</b>
<b>2 Wahrscheinlichkeitsberechnungen .....</b>	<b>62</b>
2.1 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff .....	62
2.2 Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit .....	62
2.3 Baumdiagramme und Vierfeldertafeln .....	64
2.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit .....	65
2.5 Stochastische Unabhängigkeit .....	66
<b>3 Zufallsgrößen .....</b>	<b>68</b>
3.1 Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	68
3.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung .....	69
3.3 Binomialverteilte Zufallsgrößen .....	71
<b>4 Beurteilende Statistik .....</b>	<b>75</b>
4.1 Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe .....	75
4.2 Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit .....	76
4.3 Wahl eines genügend großen Stichprobenumfangs .....	77
<b>5 Normalverteilung (eA) .....</b>	<b>78</b>
5.1 Annäherung der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung .....	78
5.2 Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen .....	79
<b>Stichwortverzeichnis .....</b>	<b>81</b>

# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen und Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Steht im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im restlichen Buch ein (eA) hinter einem Thema, dann ist der zugehörige Inhalt **nur für das eA** wichtig. Alle anderen Themen sind für beide Anforderungsniveaus, also **gA und eA**, prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Hartmut Müller-Sommer

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden Bänden:

- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik eA (Bestell-Nr. 35000)
- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik gA (Bestell-Nr. 35100)



$$3. \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx; \quad k \in \mathbb{R} \text{ (Faktorregel)}$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \text{ (Summenregel)}$$

$$5. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx; \quad a < c < b \text{ (Intervalladditivität)}$$

## 6.4 Flächenberechnung

### Berechnung des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse

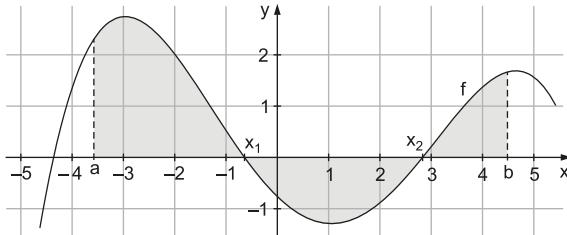
Zur Berechnung des Inhalts der vom Graphen der Funktion  $f$  und der x-Achse im Intervall  $[a; b]$  eingeschlossenen Fläche muss in diesem Bereich über  $f(x)$  integriert werden. Dabei müssen die Teilflächen ober- und unterhalb der x-Achse getrennt betrachtet werden.

#### Vorgehensweise

*Schritt 1:* Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  von  $f$  im Intervall  $[a; b]$  berechnen:  
 $f(x)=0$  mit  $a < x < b$

*Schritt 2:* Inhalt  $A$  der Fläche zwischen dem Graphen von  $f$  und der x-Achse  $\triangleq$  Summe der Beträge der Einzelintegrale über  $f(x)$

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$





Bestimmen Sie die Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3 - 2x^2$  im Intervall  $[-1; 3]$  eingeschlossen wird.

*Schritt 1:* Bestimmung der Nullstellen

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ (doppelte Nullstelle)} \text{ oder } x &= 2 \end{aligned}$$

*Schritt 2:* Berechnung der Fläche

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^2 f(x) dx \right| + \left| \int_2^3 f(x) dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \right| + \left| \left[ \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_2^3 \right| \\ &= \left| 0 - \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) \right| + \left| \left( 4 - \frac{16}{3} \right) - 0 \right| + \left| \left( \frac{81}{4} - 18 \right) - \left( 4 - \frac{16}{3} \right) \right| \\ &= \frac{11}{12} + \frac{4}{3} + \frac{43}{12} = \frac{35}{6} [\text{FE}] \end{aligned}$$

### Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei Graphen

Zur Berechnung des Inhalts der von den Graphen zweier Funktionen  $f$  und  $g$  im Intervall  $[a; b]$  eingeschlossenen Fläche muss über die Differenz von  $f(x)$  und  $g(x)$  integriert werden. Dabei ist es egal, ob die eingeschlossene Fläche ober- bzw. unterhalb der x-Achse liegt, allerdings müssen hier die Teilflächen zwischen den Schnittstellen der beiden Graphen getrennt betrachtet werden.

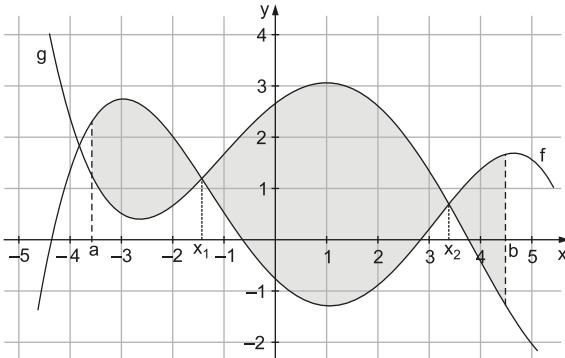
### Vorgehensweise

*Schritt 1:* Schnittstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  der Graphen von  $f$  und  $g$  im Intervall  $[a; b]$  berechnen:  $f(x) = g(x)$  mit  $a < x < b$

*Schritt 2:* Inhalt  $A$  der Fläche zwischen den Graphen von  $f$  und  $g$   
 $\hat{=}$  Summe der Beträge der Einzelintegrale über die Differenzfunktion  $d(x) = f(x) - g(x)$

$$A = \left| \int_a^{x_1} d(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} d(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b d(x) dx \right|$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob der Graph von  $f$  oberhalb des Graphen von  $g$  liegt oder umgekehrt.



## 6.5 Uneigentliches Integral (eA)

Mithilfe der Integralrechnung können auch Flächen untersucht werden, die ins „Unendliche“ reichen. Man spricht dann von „uneigentlichen Integralen“ und unterscheidet zwei Fälle.

### 1. Eine Integrationsgrenze ist „unendlich“:

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ . Der Graph von  $f$  schließt zusammen mit der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[1; \infty[$  eine unendlich ausgedehnte Fläche ein. Um diesen Flächeninhalt zu untersuchen, berechnet man zunächst den Inhalt  $A(b)$  der Fläche über dem Intervall  $[1; b]$ . Es gilt:

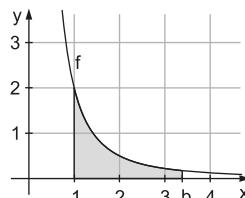
$$A(b) = \int_1^b \frac{2}{x^2} dx = \left[ -\frac{2}{x} \right]_1^b = -\frac{2}{b} + 2$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} A(b) = 2$$

Die unbegrenzte Fläche hat somit den endlichen Inhalt  $A = 2$  [FE]. Man schreibt

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{2}{x^2} dx$$

und nennt dieses Integral uneigentliches Integral.



## 2. Die Funktionswerte sind im Integrationsintervall unbeschränkt:

Der Graph von  $f$  schließt zusammen mit der  $x$ -Achse über dem Intervall  $[0; 2]$  eine unendlich ausgedehnte Fläche ein. An der linken Integrationsgrenze ist die Funktion nicht definiert.

Man berechnet zunächst den Inhalt  $A(b)$  über  $[b; 2]$ :

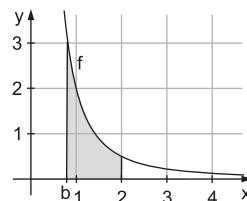
$$A(b) = \int_b^2 \frac{2}{x^2} dx = \left[ -\frac{2}{x} \right]_b^2 = -1 + \frac{2}{b}$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow 0} A(b) = \infty$$

Die unbegrenzte Fläche hat also keinen endlichen Inhalt. Man sagt auch, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^2 \frac{2}{x^2} dx$$

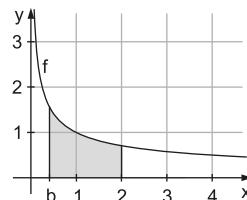
nicht existiert.



Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ . Untersuchen Sie, ob die unbeschränkte Fläche, die der Graph von  $f$  über dem Intervall  $[0; 2]$  mit der  $x$ -Achse einschließt, einen endlichen Flächeninhalt hat.

$$A(b) = \int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[ 2\sqrt{x} \right]_b^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow 0} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{b}) \\ = 2\sqrt{2} \approx 2,83$$



Die Fläche hat einen endlichen Inhalt von ca. 2,83 [FE].



© **STARK Verlag**

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**