GYMNASIUM · GESAMTSCHULE

ABITUR Skript

MEHR ERFAHREN

Mathema

Das musst d... n!

Abi Niedersachsen

STARK

Inhalt

Geometrie

Stochastik

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Steht im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im restlichen Buch ein (eA) hinter einem Thema, dann ist der zugehörige Inhalt **nur für das eA** wichtig. Alle anderen Themen sind für beide Anforderungsniveaus, also **gA und eA**, prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Hartmut Müller-Sommer

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden Bänden:

- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik eA (Bestell-Nr. 35000)
- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik gA (Bestell-Nr. 35100)

3. $\int\limits_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)\,dx;\;\; k \in \mathbb{R}$ (Faktorregel)

4. $\int\limits_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx$ (Summenregel)

5. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx;\;\; a < c < b$ (Intervalladditivität)

6.4 Flächenberechnung

Berechnung des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse

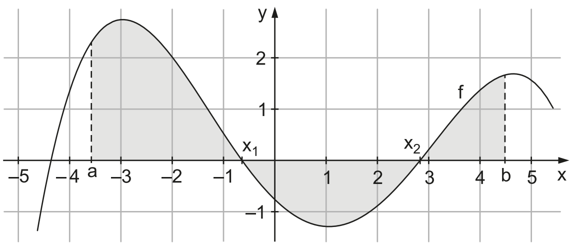
Zur Berechnung des Inhalts der vom Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall [a; b] eingeschlossenen Fläche muss in diesem Bereich über f(x) integriert werden. Dabei müssen die Teilflächen ober- und unterhalb der x-Achse getrennt betrachtet werden.

Vorgehensweise

Schritt 1: Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ von f im Intervall [a; b] berechnen: $f(x) = 0$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse ≙ Summe der Beträge der Einzelintegrale über f(x)

$$A = \left| \int\limits_a^{x_1} f(x)\,dx \right| + \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right| + \dots + \left| \int\limits_{x_n}^{b} f(x)\,dx \right|$$



Bestimmen Sie die Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2$ im Intervall [–1; 3] eingeschlossen wird.

Schritt 1: Bestimmung der Nullstellen

$$
\begin{aligned}
& x^3 - 2x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2(x-2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 0 \text{ (doppelte Nullstelle) oder } x = 2
\end{aligned}
$$

Schritt 2: Berechnung der Fläche

$$
\begin{aligned}
A &= \left| \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{0}^{2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{2}^{3} f(x)\,dx \right| \\
&= \left| \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^{0} \right| + \left| \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 \right]_{0}^{2} \right| + \left| \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 \right]_{2}^{3} \right| \\
&= \left| 0 - \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} \right) \right| + \left| \left(4 - \tfrac{16}{3} \right) - 0 \right| + \left| \left(\tfrac{81}{4} - 18 \right) - \left(4 - \tfrac{16}{3} \right) \right| \\
&= \tfrac{11}{12} + \tfrac{4}{3} + \tfrac{43}{12} = \tfrac{35}{6}\,[\text{FE}]
\end{aligned}
$$

Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei Graphen

Zur Berechnung des Inhalts der von den Graphen zweier Funktionen f und g im Intervall [a; b] eingeschlossenen Fläche muss über die Differenz von f(x) und g(x) integriert werden. Dabei ist es egal, ob die eingeschlossene Fläche ober- bzw. unterhalb der x-Achse liegt, allerdings müssen hier die Teilflächen zwischen den Schnittstellen der beiden Graphen getrennt betrachtet werden.

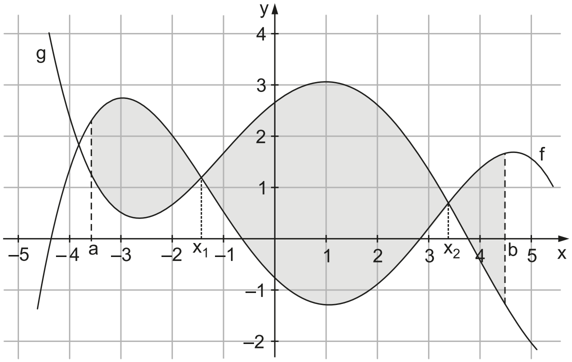
Vorgehensweise

Schritt 1: Schnittstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Graphen von f und g im Intervall [a; b] berechnen: $f(x) = g(x)$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen den Graphen von f und g $\triangleq$ Summe der Beträge der Einzelintegrale über die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$

$$
A = \left| \int_{a}^{x_1} d(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} d(x)\,dx \right| + \ldots + \left| \int_{x_n}^{b} d(x)\,dx \right|
$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob der Graph von f oberhalb des Graphen von g liegt oder umgekehrt.



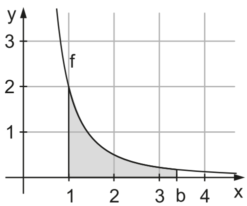
6.5 Uneigentliches Integral (eA)

Mithilfe der Integralrechnung können auch Flächen untersucht werden, die ins „Unendliche“ reichen. Man spricht dann von „uneigentlichen Integralen“ und unterscheidet zwei Fälle.

1. Eine Integrationsgrenze ist „unendlich“:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Der Graph von f schließt zusammen mit der x-Achse über dem Intervall $[1; \infty[$ eine unendlich ausgedehnte Fläche ein. Um diesen Flächeninhalt zu untersuchen, berechnet man zunächst den Inhalt A(b) der Fläche über dem Intervall [1; b]. Es gilt:

$$A(b) = \int_1^b \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^b = -\frac{2}{b} + 2$$

$$\Rightarrow \lim_{b \to \infty} A(b) = 2$$



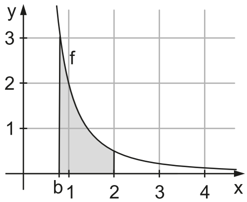
Die unbegrenzte Fläche hat somit den endlichen Inhalt $A = 2$ [FE]. Man schreibt

$$\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{2}{x^2}\,dx$$

und nennt dieses Integral uneigentliches Integral.

2. Die Funktionswerte sind im Integrationsintervall unbeschränkt:
Der Graph von f schließt zusammen mit der x-Achse über dem Intervall [0; 2] eine unendlich ausgedehnte Fläche ein. An der linken Integrationsgrenze ist die Funktion nicht definiert.
Man berechnet zunächst den Inhalt A(b) über [b; 2]:

$$A(b) = \int_b^2 \frac{2}{x^2}\,dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_b^2 = -1 + \frac{2}{b}$$



$$\Rightarrow \lim_{b \to 0} A(b) = \infty$$

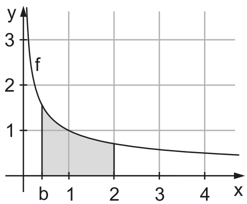
Die unbegrenzte Fläche hat also keinen endlichen Inhalt. Man sagt auch, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^2 \frac{2}{x^2}\,dx$$

nicht existiert.

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Untersuchen Sie, ob die unbeschränkte Fläche, die der Graph von f über dem Intervall [0; 2] mit der x-Achse einschließt, einen endlichen Flächeninhalt hat.

$$A(b) = \int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_b^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{b}$$



$$\Rightarrow \lim_{b \to 0} \int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b \to 0} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{b})$$
$$= 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

Die Fläche hat einen endlichen Inhalt von ca. 2,83 [FE].