

ABITUR *Skript*

Mathema

**MEHR
ERFAHREN**

Das musst du wissen!

Abi Niedersachsen



STARK

Inhalt

Vorwort

Analysis

1	Ganzrationale Funktion und ihre Eigenschaften	1
1.1	Definition	1
1.2	Grenzwertverhalten ganzrationaler Funktionen	2
1.3	Vielfachheit von Nullstellen	2
1.4	Symmetrie (bezüglich des Koordinatensystems)	3
1.5	Verschiebung und Streckung von Funktionsgraphen	4
2	Weitere Funktionen	7
2.1	Natürliche Exponentialfunktion	7
2.2	Natürliche Logarithmusfunktion	8
2.3	ln-Funktion zum Lösen einfacher Exponentialgleichungen	8
2.4	Wurzelfunktion	9
2.5	Sinusfunktion	9
3	Ableitung	10
3.1	Die Ableitung	10
3.2	Ableitungsregeln	11
4	Elemente der Kurvendiskussion, Anwendungen der Ableitung	12
4.1	Monotonieverhalten, Extrem- und Sattelpunkte	12
4.2	Krümmungsverhalten, Wendepunkte	15
4.3	Extremwertaufgaben	18
5	Kurvenanpassung	21
5.1	Bestimmen von ganzrationalen Funktionen mithilfe linearer Gleichungssysteme	21
5.2	Trassierung	23
5.3	Stetigkeit und Differenzierbarkeit	24

6	Integralrechnung	27
6.1	Der Begriff des Integrals	27
6.2	Stammfunktion	29
6.3	Integralfunktion und Hauptsatz	30
6.4	Flächenberechnung	32
6.5	Uneigentliches Integral (eA)	34
6.6	Mittelwert und Volumenberechnung (Volumenberechnung: eA)	36
7	Wachstumsmodelle und Differenzialgleichungen	37
7.1	Exponentielles Wachstum	37
7.2	Begrenztes Wachstum	38
7.3	Logistisches Wachstum	39

Geometrie

1	Punkte im Koordinatensystem	41
1.1	Punkte im Raum	41
1.2	Abstand von zwei Punkten	41
2	Vektoren	42
2.1	Rechnen mit Vektoren	42
2.2	Linearkombination	44
2.3	Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren	45
2.4	Skalarprodukt	45
3	Geraden und Ebenen	47
3.1	Geraden im Raum	47
3.2	Lagebeziehungen zwischen Geraden	48
3.3	Parameterform der Ebenengleichung	49
3.4	Normalenform/Koordinatenform der Ebenengleichung	51
3.5	Umwandlung: Parameterform \leftrightarrow Normalenform/Koordinatenform	51
3.6	Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene	52
3.7	Lagebeziehungen zwischen zwei Ebenen (eA)	54
3.8	Schnittwinkel	55

4	Abstände zwischen geometrischen Objekten	56
4.1	Abstand zu einer Ebene	56
4.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden (eA)	57
4.3	Abstand zweier windschiefer Geraden (eA)	60


Stochastik

1	Grundlagen	61
2	Wahrscheinlichkeitsberechnungen	62
2.1	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	62
2.2	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	62
2.3	Baumdiagramme und Vierfeldertafeln	64
2.4	Bedingte Wahrscheinlichkeit	65
2.5	Stochastische Unabhängigkeit	66
3	Zufallsgrößen	68
3.1	Zufallsgrößen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	68
3.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	69
3.3	Binomialverteilte Zufallsgrößen	71
4	Beurteilende Statistik	75
4.1	Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe	75
4.2	Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit	76
4.3	Wahl eines genügend großen Stichprobenumfangs	77
5	Normalverteilung (eA)	78
5.1	Annäherung der Binomialverteilung durch eine Normalverteilung	78
5.2	Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen	79
	Stichwortverzeichnis	81

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch eine Glühbirne  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** schrittweise beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.
- Steht im Inhalts- und Stichwortverzeichnis sowie im restlichen Buch ein (eA) hinter einem Thema, dann ist der zugehörige Inhalt **nur für das eA** wichtig. Alle anderen Themen sind für beide Anforderungsniveaus, also **gA und eA**, prüfungsrelevant.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

Hartmut Müller-Sommer

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit vollständigen Lösungen finden Sie in den folgenden Bänden:

- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik eA (Bestell-Nr. 35000)
- Abiturprüfung Niedersachsen, Mathematik gA (Bestell-Nr. 35100)

$$3. \int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx; \quad k \in \mathbb{R} \quad (\text{Faktorregel})$$

$$4. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx \quad (\text{Summenregel})$$

$$5. \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx; \quad a < c < b \quad (\text{Intervalladditivität})$$

6.4 Flächenberechnung

Berechnung des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse

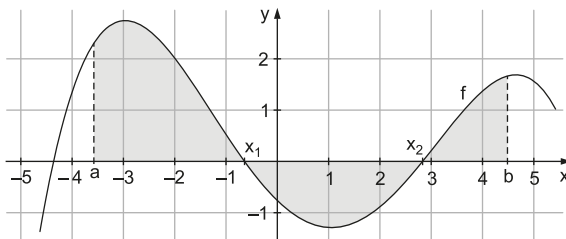
Zur Berechnung des Inhalts der vom Graphen der Funktion f und der x -Achse im Intervall $[a; b]$ eingeschlossenen Fläche muss in diesem Bereich über $f(x)$ integriert werden. Dabei müssen die Teilflächen ober- und unterhalb der x -Achse getrennt betrachtet werden.

Vorgehensweise

Schritt 1: Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n von f im Intervall $[a; b]$ berechnen:
 $f(x) = 0$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse $\hat{=}$ Summe der Beträge der Einzelintegrale über $f(x)$

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) \, dx \right|$$





Bestimmen Sie die Fläche, die von der x-Achse und dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2$ im Intervall $[-1; 3]$ eingeschlossen wird.

Schritt 1: Bestimmung der Nullstellen

$$x^3 - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (doppelte Nullstelle) oder } x = 2$$

Schritt 2: Berechnung der Fläche

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^0 f(x) \, dx \right| + \left| \int_0^2 f(x) \, dx \right| + \left| \int_2^3 f(x) \, dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \right| + \left| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_2^3 \right| \\ &= \left| 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} \right) \right| + \left| \left(4 - \frac{16}{3} \right) - 0 \right| + \left| \left(\frac{81}{4} - 18 \right) - \left(4 - \frac{16}{3} \right) \right| \\ &= \frac{11}{12} + \frac{4}{3} + \frac{43}{12} = \frac{35}{6} \text{ [FE]} \end{aligned}$$

Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei Graphen

Zur Berechnung des Inhalts der von den Graphen zweier Funktionen f und g im Intervall $[a; b]$ eingeschlossenen Fläche muss über die Differenz von $f(x)$ und $g(x)$ integriert werden. Dabei ist es egal, ob die eingeschlossene Fläche ober- bzw. unterhalb der x-Achse liegt, allerdings müssen hier die Teilflächen zwischen den Schnittstellen der beiden Graphen getrennt betrachtet werden.

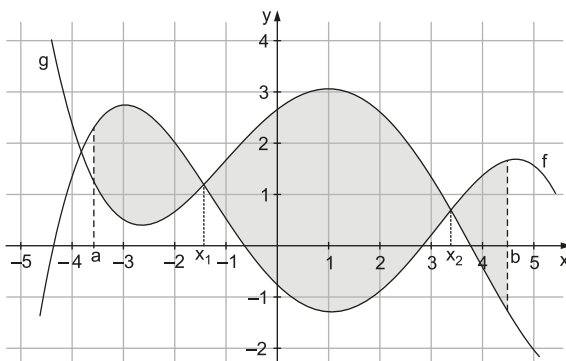
Vorgehensweise

Schritt 1: Schnittstellen x_1, x_2, \dots, x_n der Graphen von f und g im Intervall $[a; b]$ berechnen: $f(x) = g(x)$ mit $a < x < b$

Schritt 2: Inhalt A der Fläche zwischen den Graphen von f und g $\hat{=}$ Summe der Beträge der Einzelintegrale über die Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x)$

$$A = \left| \int_a^{x_1} d(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} d(x) \, dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b d(x) \, dx \right|$$

Dabei spielt es keine Rolle, ob der Graph von f oberhalb des Graphen von g liegt oder umgekehrt.



6.5 Uneigentliches Integral (eA)

Mithilfe der Integralrechnung können auch Flächen untersucht werden, die ins „Unendliche“ reichen. Man spricht dann von „uneigentlichen Integralen“ und unterscheidet zwei Fälle.

1. Eine Integrationsgrenze ist „unendlich“:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2}$. Der Graph von f schließt zusammen mit der x -Achse über dem Intervall $[1; \infty[$ eine unendlich ausgedehnte Fläche ein. Um diesen Flächeninhalt zu untersuchen, berechnet man zunächst den Inhalt $A(b)$ der Fläche über dem Intervall $[1; b]$. Es gilt:

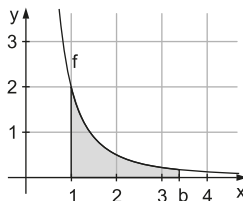
$$A(b) = \int_1^b \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_1^b = -\frac{2}{b} + 2$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow \infty} A(b) = 2$$

Die unbegrenzte Fläche hat somit den endlichen Inhalt $A=2$ [FE]. Man schreibt

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{2}{x^2} dx$$

und nennt dieses Integral uneigentliches Integral.



2. Die Funktionswerte sind im Integrationsintervall unbeschränkt:

Der Graph von f schließt zusammen mit der x -Achse über dem Intervall $[0; 2]$ eine unendlich ausgedehnte Fläche ein. An der linken Integrationsgrenze ist die Funktion nicht definiert.

Man berechnet zunächst den Inhalt $A(b)$ über $[b; 2]$:

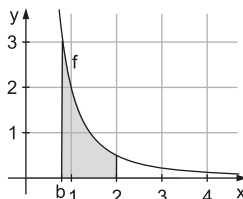
$$A(b) = \int_b^2 \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_b^2 = -1 + \frac{2}{b}$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow 0} A(b) = \infty$$

Die unbegrenzte Fläche hat also keinen endlichen Inhalt. Man sagt auch, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^2 \frac{2}{x^2} dx$$

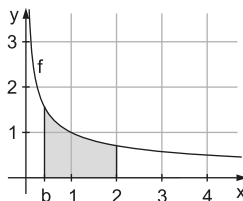
nicht existiert.



Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Untersuchen Sie, ob die unbeschränkte Fläche, die der Graph von f über dem Intervall $[0; 2]$ mit der x -Achse einschließt, einen endlichen Flächeninhalt hat.

$$A(b) = \int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_b^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{b \rightarrow 0} (2\sqrt{2} - 2\sqrt{b}) \\ &= 2\sqrt{2} \approx 2,83 \end{aligned}$$



Die Fläche hat einen endlichen Inhalt von ca. 2,83 [FE].



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK