2020

Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Berlin

Mathematik LK

+ Übungsaufgaben
+ Online-Glossar

Active**Book**
Interaktives Training

STARK

Inhalt

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Sabine Flohrer:
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2016, Aufgaben 1.1, 2.1, 2.2, 3.1 und 3.2;
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2017, Aufgaben 1.1, 2.1, 2.2, 3.1 und 3.2

Dr. Detlef Launert:
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2016, Aufgaben 1.2 und 1.2 (CAS)
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2017, Aufgaben 1.2 und 1.2 (CAS)
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2018, Aufgaben 1.1 und 1.2
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2019, Aufgabe 1 Analysis, Aufgaben 2.1, 2.2
Übungsaufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Lauri Lehmann:
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2018, Aufgaben 2.1, 2.2, 3.1 und 3.2
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2019, Aufgabe 1 Geometrie und Stochastik, Aufgaben 3.1, 3.2, 4.1 und 4.2

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2020** für den **Leistungskurs in Berlin** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das **Abitur 2020**. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.
- Im zweiten Teil stehen Ihnen **Übungsaufgaben** zum **hilfsmittelfreien Teil** zur Verfügung. Diese bestehen aus den entsprechenden Aufgaben des Abiturs in Brandenburg und dienen zur Orientierung für den hilfsmittelfreien Teil des Abiturs in Berlin ab 2019.
- Der dritte Teil enthält die **Original-Prüfungsaufgaben 2016 bis 2019** von Berlin und Brandenburg. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Der Zugangscode auf den Farbseiten vorne in diesem Buch ermöglicht es Ihnen, Aufgaben im Rahmen eines **Online-Prüfungstrainings zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** interaktiv zu lösen.
- Die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.
- Zu allen Original-Prüfungsaufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die es Ihnen ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2020 vom LISUM Berlin-Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell.

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2020

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

Die Grundlagen für die von Ihnen zu bearbeitenden Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe in der Ausgabe von 2014 und die Bildungsstandards der KMK für die allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den im oben genannten Rahmenlehrplan beschriebenen bzw. aufgelisteten abschlussorientierten Standards.

Prüfungsrelevante Themen

Die Prüfungsaufgaben im Fach Mathematik basieren auf dem **Kerncurriculum**.
Grundsätzlich **nicht** gefordert werden das Erläutern und Entwickeln von Beweisen, die Nutzung der Sinus- und Kosinusfunktion zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge sowie Simulationen.

Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben

Bei der Aufgabenstellung 1, den hilfsmittelfreien Aufgaben, stehen die Aufgaben und ihre Teilaufgaben in keinem übergeordneten Zusammenhang. Sie beziehen sich auf alle drei Themengebiete und können auch in begrenztem Umfang Problemstellungen enthalten, die dem Anforderungsbereich III zuzuordnen sind.
Es gibt 6 Aufgaben zu je 5 BE.

Bei den weiteren Aufgabenstellungen ist jede Aufgabe als strukturierte, inhaltlich zusammenhängende Aufgabe konstruiert, die in mehrere Teilaufgaben untergliedert ist. Jede dieser Aufgaben enthält entsprechende Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen. Üblicherweise beginnen die Aufgaben mit den dem Anforderungsbereich I zugeordneten Grundaufgaben. Es empfiehlt sich immer, die Aufgabe zunächst vollständig zu lesen, da Zwischenergebnisse gelegentlich auch in nachfolgenden Aufgabenteilen enthalten sein können.

Aufgabenteile, die dem Anforderungsbereich III zugeordnet sind, finden sich meist am Ende der jeweiligen Aufgabe. Nur, wenn es der Zusammenhang erfordert, können sie auch schon früher eingegliedert sein. Wenn sich die Möglichkeit bietet, wird die Aufgabe so formuliert, dass eine praktische Anwendung des mathematischen Sachverhaltes beschrieben wird.

In jedem der drei Themengebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik ist genau eine Aufgabe zu lösen, wobei der Prüfling jeweils die Wahl zwischen zwei gleichwertigen Aufgaben hat. Die Wahlmöglichkeiten sind in folgender Tabelle dargestellt:

Aufgabenstellung 1 ohne Wahlmöglichkeit 75 min	Aufgabe 1: **hilfsmittelfreier Teil** (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik)
Aufgabenstellung 2 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 2.1 oder Aufgabe 2.2 **Analysis**
Aufgabenstellung 3 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 3.1 oder Aufgabe 3.2 **Analytische Geometrie**
Aufgabenstellung 4 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 4.1 oder Aufgabe 4.2 **Stochastik**

Für die Bearbeitung der vier Prüfungsaufgaben stehen **300 Minuten** zur Verfügung.
Davon entfallen 75 Minuten auf die Aufgabenstellung 1.
30 Minuten sind zudem als Lesezeit vorgesehen, in denen die Aufgaben gelesen werden können und eine Wahl zwischen den beiden Aufgaben in jedem Themengebiet getroffen werden kann.

Für die Frage, welche **Hilfsmittel** bei der Prüfung zugelassen sind, ist entscheidend, ob die Abiturprüfung ohne oder mit Verwendung eines Computer-Algebra-Systems (CAS) bearbeitet wird.
Grundsätzlich sind folgende Hilfsmittel zugelassen:
- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen und an der Schule eingeführt ist (Aufgabenstellung 2, 3 und 4).

Für die Bearbeitung **ohne CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:
Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.

Für die Bearbeitung **mit CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:
Für die Bearbeitung der Abiturprüfung können ein PC oder folgende Geräte Anwendung finden:

Texas Instruments	TI-92, TI-Voyage, TI-Nspire
Casio	Classpad

Ein PC-gestütztes CAS-Abitur kann mit CAS-Software wie MuPad, Geogebra oder Derive oder mit Emulationen von o.g. CAS-Geräten durchgeführt werden.

Grundsätzlich gilt, dass die Benutzung weiterer Software über das CAS hinaus nicht zugelassen ist.

Berlin – Mathematik Leistungskurs
2017 – Aufgabe 3.2: Stochastik

Freizeit BE

Fernsehen ist die mit Abstand häufigste Freizeitbeschäftigung der deutschen Bevölkerung ab 14 Jahre: 96 % aller Personen sehen mindestens einmal pro Woche fern. Zwei weitere beliebte Freizeitbeschäftigungen der Bevölkerung sind beispielsweise Lesen (Zeitungen, Zeitschriften und Bücher): 72,6 % und Arbeit am Computer: 60,3 %.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   A: Zufällig ausgewählte Personen werden nacheinander befragt. Erst die fünfte befragte Person antwortet, dass sie gern am Computer arbeitet.
   B: Nur die dritte und fünfte von acht zufällig ausgewählten Personen arbeitet gern am Computer.
   C: Unter 20 zufällig ausgewählten Personen befinden sich mehr als 18 Personen, die mindestens einmal pro Woche fernsehen. 8

b) Berechnen Sie die Anzahl der Personen, die mindestens befragt werden müssten, um mit einer Mindestwahrscheinlichkeit von 98 % wenigstens eine Person zu finden, die in ihrer Freizeit nicht gern liest. 4

c) 76 % der weiblichen Bevölkerung und 69 % der männlichen Bevölkerung lesen in ihrer Freizeit gern.
   Berechnen Sie den Anteil der Frauen in der deutschen Bevölkerung.
   Veranschaulichen Sie Ihren Lösungsansatz z. B. durch ein (reduziertes) Baumdiagramm oder eine Vierfeldertafel. 5

Ein Buchhändler organisiert eine Lesung des aktuellen Bestsellers eines beliebten Autors. Die Veranstaltung findet in einem Saal mit einer Kapazität von 175 Plätzen statt. Da im Mittel 5 % der bestellten Karten storniert werden, lässt der Buchhändler 180 Kartenreservierungen annehmen.

d) Es ist k die Anzahl der stornierten Karten.
   Geben Sie einen Term für P(k) an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass genau k der 180 bestellten Karten storniert werden.
   Ermitteln Sie den größten Wert dieser Wahrscheinlichkeit P(k). 4

e) Tatsächlich nehmen 174 Besucher an der Lesung teil, darunter ein Deutschkurs und dessen Lehrerin. Es werden fünf Personen ausgelost, die eine Freikarte für die nächste Veranstaltung des Buchhändlers erhalten.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Lehrerin unter den Gewinnern einer Freikarte ist.
   Begründen Sie, dass das Modell der Binomialverteilung für die Berechnung ungeeignet ist. 4

25

Lösungen zu Aufgabe 3.2

a) K steht für Personen, die gerne am Computer arbeiten. $\overline{K}$ ist das Gegenereignis.

$$P(A) = (P(\overline{K}))^4 \cdot P(K) = 0{,}397^4 \cdot 0{,}603 \approx \underline{\underline{0{,}0150}}$$

$$P(B) = (P(K))^2 \cdot (P(\overline{K}))^6 = 0{,}603^2 \cdot 0{,}397^6 \approx \underline{\underline{0{,}0014}}$$

Es handelt es sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 20 mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}96$ und $k = 19$ sowie $k = 20$ Treffern.
X sei die Anzahl der Personen, die mindestens einmal pro Woche fernsehen.

$$P(C) = P(X > 18) = P(X \geq 19) = P(X = 19) + P(X = 20)$$

$$= \binom{20}{19} \cdot 0{,}96^{19} \cdot 0{,}04 + 0{,}96^{20} \approx \underline{\underline{0{,}8103}}$$

b) Y sei die Anzahl der Personen, die nicht gerne lesen.
Der Text entspricht der mathematischen Gleichung:

$$P(Y \geq 1) = 0{,}98$$

$$1 - P(Y = 0) = 0{,}98$$

Das Gegenereignis zu $Y \geq 1$ ist $Y = 0$ (Personen, die gerne lesen).

$$1 - 0{,}726^n = 0{,}98 \qquad | + 0{,}726^n \quad | -0{,}98$$

$$0{,}02 = 0{,}726^n \qquad | \ln$$

$$\ln 0{,}02 = n \cdot \ln 0{,}726$$

Anwendung des 3. logarithmischen Rechengesetztes: $\ln a^b = b \cdot \ln a$

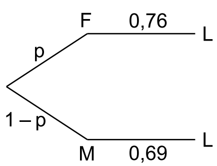
$$\frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}726} = n$$

$$n \approx 12{,}2$$

Es müssten mindestens $\underline{\underline{13}}$ Personen befragt werden, um die Bedingungen zu erfüllen.

c) $\left.\begin{array}{l}\text{76 \% der Frauen (F)}\\ \text{69 \% der Männer (M)}\end{array}\right\}$ lesen gern $\hat{=}$ L

$P(F) = p$, $P(M) = 1 - p$



$$P(L) = 0{,}76 \cdot p + 0{,}69 \cdot (1 - p)$$

Den Gesamtprozentsatz der Leute, die gerne lesen, erfährt man zu Beginn der Aufgabe.

$$
\begin{aligned}
0{,}76 \cdot p + 0{,}69 \cdot (1-p) &= 0{,}726 \\
0{,}76 \cdot p + 0{,}69 - 0{,}69 \cdot p &= 0{,}726 \\
0{,}07p &= 0{,}036 \\
p &\approx 0{,}5143
\end{aligned}
$$

Der Anteil der Frauen in der deutschen Bevölkerung beträgt ungefähr $\underline{\underline{51{,}4\,\%}}$.

Alternative mit Vierfeldertafel:

	M	F	
L	$0{,}69 \cdot (1-p)$	$0{,}76 \cdot p$	0,726
$\overline{L}$	$0{,}31 \cdot (1-p)$	$0{,}24 \cdot p$	0,274
	$1-p$	p	1

Mit der Zeile für L (gerne lesen) aus der Vierfeldertafel erhält man die Gleichung $0{,}69 \cdot (1-p) + 0{,}76 \cdot p = 0{,}726$. Diese Gleichung und die nachfolgende Berechnung sind analog zur obigen aus dem Baumdiagramm. Die sich ergebende Gleichung $0{,}31 \cdot (1-p) + 0{,}24 \cdot p = 0{,}274$ aus der Zeile für $\overline{L}$ könnte ebenso zur Berechnung des Frauenanteils verwendet werden.

d) Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge 180 mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}05$.

$$P(k) = \binom{180}{k} \cdot 0{,}05^k \cdot 0{,}95^{180-k}$$

Da es sich um eine Binomialverteilung handelt, entspricht der Erwartungswert dem größten Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Für den Erwartungswert ergibt sich:

$$E(k) = n \cdot p = 180 \cdot 0{,}05 = 9.$$

Für den größten Wert der Wahrscheinlichkeit gilt somit:

$$\underline{\underline{P(k=9) \approx 0{,}1352}}$$

e) Die Aufgabe lässt sich mit dem Lottomodell lösen.
Die Gesamtzahl der Besucher beträgt 174, von denen 5 ausgelost werden. Die Lehrerin erhält eine Freikarte. Die 4 weiteren Freikarten werden aus den restlichen 173 Teilnehmern ausgewählt.

$$P(\text{Lehrerin erhält eine Freikarte}) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{173}{4}}{\binom{174}{5}} \approx \underline{\underline{0{,}0287}}$$

Das Modell der Binomialverteilung geht von einem „Ziehen mit Zurücklegen“ aus, was hier nicht vorliegt.

Es handelt sich auch nicht um eine sehr große Anzahl von Versuchen, bei der man die Binomialverteilung als Näherungsansatz nehmen kann, da nur 174 Personen vorhanden sind und die Wahrscheinlichkeit des Erhalts einer Freikarte sich nach jedem Ziehen (Auslosen) ändert.