

# abitur Skript

## Mathema

MEHR  
ERFAHREN

Das musst du wissen!

Abi Baden-Württemberg

Berufliches Gymnasium

STARK

# Inhalt

## Gleichungen und Gleichungssysteme

<b>1 Gleichungen .....</b>	<b>1</b>
1.1 Quadratische Gleichungen .....	1
1.2 Exponentialgleichungen .....	1
1.3 Nullprodukt und Substitution .....	2
<b>2 Lineare Gleichungssysteme .....</b>	<b>3</b>

## Analysis

<b>1 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften .....</b>	<b>5</b>
1.1 Potenzfunktionen .....	5
1.2 Ganzrationale Funktionen .....	6
1.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen) ....	7
1.4 Natürliche Exponentialfunktion .....	8
1.5 Entwicklung von Funktionen .....	10
1.6 Vielfachheit von Nullstellen .....	12
1.7 Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems) .....	13
<b>2 Ableitung .....</b>	<b>14</b>
2.1 Bedeutung der Ableitung .....	14
2.2 Ableitungen der Grundfunktionen .....	14
2.3 Ableitungsregeln .....	15
2.4 Tangente und Normale .....	16
<b>3 Untersuchung von Funktionen, Anwendungen der Ableitung .....</b>	<b>17</b>
3.1 Monotonieverhalten, Extrempunkte .....	17
3.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte .....	20
<b>4 Integralrechnung .....</b>	<b>24</b>
4.1 Stammfunktion .....	24
4.2 Bestimmtes Integral und Flächenberechnung .....	25
4.3 Weitere Anwendungen des Integrals .....	29

# **Stochastik**

<b>1 Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeiten .....</b>	<b>31</b>
1.1 Ereignisse .....	31
1.2 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff .....	32
1.3 Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit .....	33
1.4 Baumdiagramme und Vierfeldertafeln .....	33
1.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit .....	35
1.6 Urnenmodelle und Bernoulli-Formel .....	37
<b>2 Zufallsvariablen .....</b>	<b>39</b>
2.1 Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung .....	39
2.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung .....	40
<b>3 Binomialverteilung .....</b>	<b>42</b>
3.1 Bernoulli-Experiment, binomialverteilte Zufallsvariablen .....	42
3.2 Erwartungswert und Standardabweichung .....	44
3.3 Sigma-Regeln .....	45
<b>4 Schätzen unbekannter Wahrscheinlichkeiten, Vertrauensintervalle .....</b>	<b>46</b>

# **Wahlgebiet Vektorgeometrie**

<b>1 Vektoren .....</b>	<b>47</b>
1.1 Rechnen mit Vektoren .....	47
1.2 Skalarprodukt .....	48
1.3 Vektorprodukt .....	49
<b>2 Geraden und Ebenen .....</b>	<b>50</b>
2.1 Geraden .....	50
2.2 Ebenen in Parameterform .....	52
2.3 Ebenen in Normalen- bzw. Koordinatenform .....	53
2.4 Umwandlung: Parameterform in Koordinatenform .....	55

<b>3 Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten .....</b>	<b>56</b>
3.1 Lage zweier Geraden .....	56
3.2 Lage einer Geraden zu einer Ebene .....	57
3.3 Lage zweier Ebenen .....	58
3.4 Schnittwinkel .....	60
<b>4 Abstände zwischen geometrischen Objekten .....</b>	<b>61</b>
4.1 Abstand zu einer Ebene .....	61
4.2 Abstand eines Punktes zu einer Geraden .....	62
4.3 Abstand zweier windschiefer Geraden .....	63
4.4 Spiegelung eines Punktes .....	64
 <b>Wahlgebiet Matrizen</b>	
<b>1 Grundlagen .....</b>	<b>65</b>
1.1 Rechnen mit Matrizen .....	65
1.2 Inverse Matrix, Lösen von Matrizengleichungen .....	67
<b>2 Produktionsprozesse .....</b>	<b>68</b>
<b>3 Übergangsprozesse .....</b>	<b>70</b>
3.1 Übergangsdiagramm und Übergangsmatrix .....	70
3.2 Zustandsverteilungen .....	71
3.3 Stabilitätsvektor und Grenzmatrix .....	72
3.4 Populationsentwicklung und zyklische Prozesse .....	74
3.5 Prozesse mit absorbierenden Zuständen .....	76
 <b>Stichwortverzeichnis .....</b>	<b>77</b>



# Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur an den beruflichen Gymnasien benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Stochastik und Lineare Algebra (Wahlgebiet Vektorgeometrie bzw. Wahlgebiet Matrizen) und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im hilfsmittelfreien Teil 1 der Prüfung abgefragt. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Offizielle Prüfungsaufgaben mit hilfreichen Tipps und vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg, Mathematik“ (Bestell-Nr. 825001).



# Analysis

## 1 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

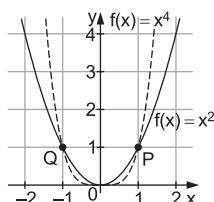
### 1.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form:  $f: x \mapsto x^r$  mit  $r \in \mathbb{R}$   
Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

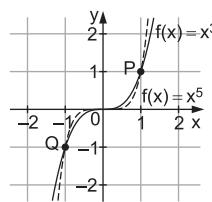
- Exponent positiv:  $f(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ;  $x \in \mathbb{R}$   
Die Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ:  $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ;  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
Die Graphen sind **Hyperbeln**.

#### Graphenverläufe

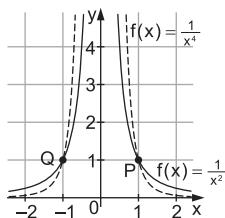
Parabeln:  $n$  gerade; Werte in  $\mathbb{R}_+$



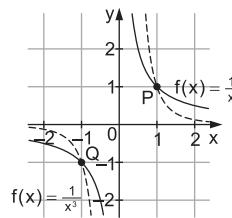
$n$  ungerade; Werte in  $\mathbb{R}$



Hyperbeln:  $n$  gerade; Werte in  $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$



$n$  ungerade; Werte in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

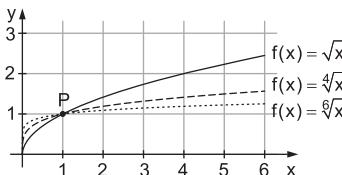


#### Wurzelfunktion

Ist der Exponent  $r$  ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:

$f: x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ;  $x \in \mathbb{R}_+$  ( $n$ -te Wurzelfunktion)

1.  $G_f$  verläuft durch  $P(1 | 1)$ .
2. Einzige Nullstelle:  $x=0$
3. Werte liegen in  $\mathbb{R}_+$
4. Je größer  $n$ , desto
  - flacher verläuft  $G_f$  für  $x > 1$ .
  - steiler nähert sich  $G_f$  dem Koordinatenursprung.



## 1.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad  $n$  versteht man eine Funktion der Form:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; \quad x \in \mathbb{R}$$

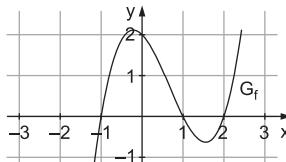
mit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$

Die Werte  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  heißen **Koeffizienten**.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 1.6).



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \\ \Rightarrow \text{Nullstellen bei } x &= 2, \\ x &= -1 \text{ und } x = 1 \end{aligned}$$

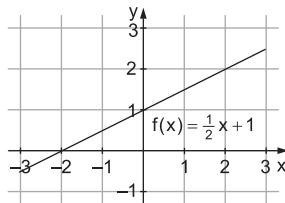


### Spezialfälle

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + t \quad (\text{Grad } 1)$$

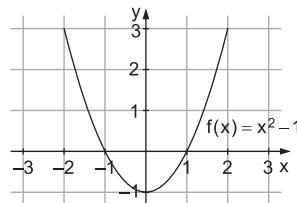
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Grad } 2)$$

Graph ist eine Parabel.





## 2 Zufallsvariablen

### 2.1 Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsvariable** bzw. Zufallsgröße ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsvariablen X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  die Zufallsvariable die möglichen Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  annimmt; in Tabellenform:

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$P(X=x_i)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_n$

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (\text{Normierungsbedingung})$$

Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Histogramm erfolgen.

#### Vorgehensweise

*Schritt 1:* Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, auflisten

*Schritt 2:* Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

*Schritt 3:* Tabelle und ggf. Histogramm erstellen



Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, die die Anzahl der Sechsen beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

*Schritt 1:*

Die Zufallsvariable X kann folgende Werte annehmen:

$x_1=0; x_2=1; x_3=2$  (keine, eine oder zwei Sechsen bei 2 Würfen)

*Schritt 2:*

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (vgl. S. 38) ermittelt werden:

$$P(X=x_1) = P(X=0) = P(„keine 6“) = \binom{2}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^2 = 0,7^2 = 0,49$$

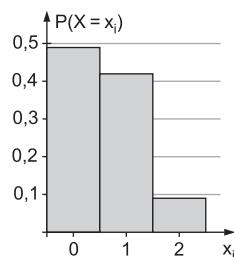
$$P(X=1) = \binom{2}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^1 = 0,42 \qquad P(X=2) = \binom{2}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^0 = 0,09$$

*Schritt 3:*

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

$x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



## 2.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

### Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$$E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + \dots + x_n \cdot P(X=x_n) = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$$

### Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsvariablen X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

$$\text{Var}(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

*Bemerkungen:*

- Der Erwartungswert  $E(X)$  einer Zufallsvariablen X ist häufig kein Wert, den die Zufallsvariable tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.



Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

### Szenario A

Note $x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05



© STARK Verlag

[www.stark-verlag.de](http://www.stark-verlag.de)  
[info@stark-verlag.de](mailto:info@stark-verlag.de)

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH  
ist urheberrechtlich international geschützt.  
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung  
des Rechteinhabers in irgendeiner Form  
verwertet werden.

**STARK**