

ABITUR *Skrint*

Mathema

**MEHR
ERFAHREN**

Das musst du wissen!

Abi Baden-Württemberg

Berufliches Gymnasium



STARK

Inhalt

Gleichungen und Gleichungssysteme

1 Gleichungen	1
1.1 Quadratische Gleichungen	1
1.2 Exponentialgleichungen	1
1.3 Nullprodukt und Substitution	2
2 Lineare Gleichungssysteme	3

Analysis

1 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften	5
1.1 Potenzfunktionen	5
1.2 Ganzrationale Funktionen	6
1.3 Sinus- und Kosinusfunktion (trigonometrische Funktionen)	7
1.4 Natürliche Exponentialfunktion	8
1.5 Entwicklung von Funktionen	10
1.6 Vielfachheit von Nullstellen	12
1.7 Symmetrie (bzgl. des Koordinatensystems)	13
2 Ableitung	14
2.1 Bedeutung der Ableitung	14
2.2 Ableitungen der Grundfunktionen	14
2.3 Ableitungsregeln	15
2.4 Tangente und Normale	16
3 Untersuchung von Funktionen, Anwendungen der Ableitung	17
3.1 Monotonieverhalten, Extrempunkte	17
3.2 Krümmungsverhalten, Wendepunkte	20
4 Integralrechnung	24
4.1 Stammfunktion	24
4.2 Bestimmtes Integral und Flächenberechnung	25
4.3 Weitere Anwendungen des Integrals	29

Stochastik

1	Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeiten	31
1.1	Ereignisse	31
1.2	Der Wahrscheinlichkeitsbegriff	32
1.3	Laplace-Experimente, Laplace-Wahrscheinlichkeit	33
1.4	Baumdiagramme und Vierfeldertafeln	33
1.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	35
1.6	Urnenmodelle und Bernoulli-Formel	37
2	Zufallsvariablen	39
2.1	Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung	39
2.2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	40
3	Binomialverteilung	42
3.1	Bernoulli-Experiment, binomialverteilte Zufallsvariablen	42
3.2	Erwartungswert und Standardabweichung	44
3.3	Sigma-Regeln	45
4	Schätzen unbekannter Wahrscheinlichkeiten, Vertrauensintervalle	46

Wahlgebiet Vektorgeometrie

1	Vektoren	47
1.1	Rechnen mit Vektoren	47
1.2	Skalarprodukt	48
1.3	Vektorprodukt	49
2	Geraden und Ebenen	50
2.1	Geraden	50
2.2	Ebenen in Parameterform	52
2.3	Ebenen in Normalen- bzw. Koordinatenform	53
2.4	Umwandlung: Parameterform in Koordinatenform	55

3	Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten	56
3.1	Lage zweier Geraden	56
3.2	Lage einer Geraden zu einer Ebene	57
3.3	Lage zweier Ebenen	58
3.4	Schnittwinkel	60
4	Abstände zwischen geometrischen Objekten	61
4.1	Abstand zu einer Ebene	61
4.2	Abstand eines Punktes zu einer Geraden	62
4.3	Abstand zweier windschiefer Geraden	63
4.4	Spiegelung eines Punktes	64

Wahlgebiet Matrizen


1	Grundlagen	65
1.1	Rechnen mit Matrizen	65
1.2	Inverse Matrix, Lösen von Matrizengleichungen	67
2	Produktionsprozesse	68
3	Übergangsprozesse	70
3.1	Übergangsdiagramm und Übergangsmatrix	70
3.2	Zustandsverteilungen	71
3.3	Stabilitätsvektor und Grenzmatrix	72
3.4	Populationsentwicklung und zyklische Prozesse	74
3.5	Prozesse mit absorbierenden Zuständen	76

Stichwortverzeichnis	77
-----------------------------	-----------

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur an den beruflichen Gymnasien benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Stochastik und Lineare Algebra (Wahlgebiet Vektorgeometrie bzw. Wahlgebiet Matrizen) und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im hilfsmittelfreien Teil 1 der Prüfung abgefragt. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol  gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Offizielle Prüfungsaufgaben mit hilfreichen Tipps und vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg, Mathematik“ (Bestell-Nr. 825001).

Analysis

1 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

1.1 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form: $f: x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$

Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R}$

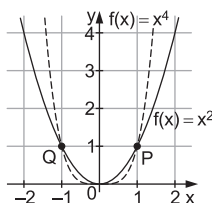
Die Graphen sind **Parabeln**.

- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

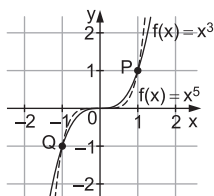
Die Graphen sind **Hyperbeln**.

Graphenverläufe

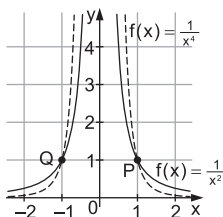
Parabeln: n gerade; Werte in \mathbb{R}_+



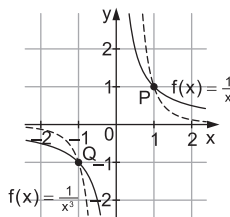
n ungerade; Werte in \mathbb{R}



Hyperbeln: n gerade; Werte in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$



n ungerade; Werte in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

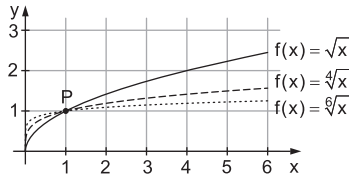


Wurzelfunktion

Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:

$f: x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $x \in \mathbb{R}_+$ (n -te Wurzelfunktion)

1. G_f verläuft durch $P(1 \mid 1)$.
2. Einzige Nullstelle: $x=0$
3. Werte liegen in \mathbb{R}_+
4. Je größer n , desto
 - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
 - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



1.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

$$f: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0; x \in \mathbb{R}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

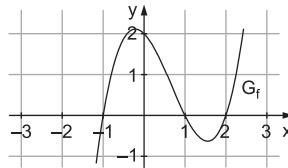
Die Werte $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 1.6).



$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ &= (x-2)(x^2-1) \\ &= (x-2)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

\Rightarrow Nullstellen bei $x=2$,
 $x=-1$ und $x=1$

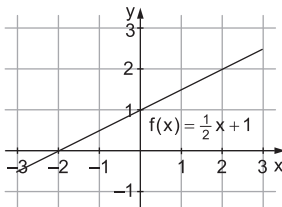


Spezialfälle

Lineare Funktion:

$$f(x) = mx + t \quad (\text{Grad } 1)$$

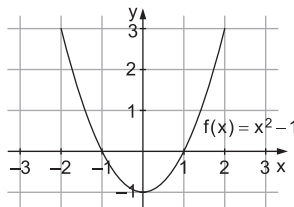
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{Grad } 2)$$

Graph ist eine Parabel.



2 Zufallsvariablen

2.1 Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsvariable** bzw. Zufallsgröße ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsvariablen X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, \dots, p_n die Zufallsvariable die möglichen Werte x_1, x_2, \dots, x_n annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \quad (\text{Normierungsbedingung})$$

Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise

Schritt 1: Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Histogramm erstellen



Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X , die die Anzahl der Sechsen beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:

Die Zufallsvariable X kann folgende Werte annehmen:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = 2 \quad (\text{keine, eine oder zwei Sechsen bei 2 Würfeln})$$

Schritt 2:

Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (vgl. S. 38) ermittelt werden:

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0,3^0 \cdot 0,7^2 = 0,7^2 = 0,49$$

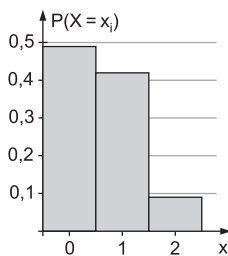
$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0,3^1 \cdot 0,7^1 = 0,42 \quad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^0 = 0,09$$

Schritt 3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



2.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n) = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$$

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsvariablen X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

$$\text{Var}(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert $E(X)$ einer Zufallsvariablen X ist häufig kein Wert, den die Zufallsvariable tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.



Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

Szenario A

Note x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de

info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK