BERUFLICHES GYMNASIUM

ABITUR Skript

MEHR ERFAHREN

Mathema

Das musst d...n!

Abi Baden-Württemb...

Berufliches Gymnasium

STARK

Inhalt

Stochastik

Wahlgebiet Vektorgeometrie

Wahlgebiet Matrizen

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie im Mathematik-Abitur an den beruflichen Gymnasien benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Abiturstoff der Prüfungsgebiete Analysis, Stochastik und Lineare Algebra (Wahlgebiet Vektorgeometrie bzw. Wahlgebiet Matrizen) und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Abiturvorbereitung. Ein Großteil der Inhalte dieses Heftes wird auch im hilfsmittelfreien Teil 1 der Prüfung abgefragt. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor dem Abitur.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Abiturprüfung!

STARK Verlag

Offizielle Prüfungsaufgaben mit hilfreichen Tipps und vollständigen Lösungen enthält das Buch „Abiturprüfung Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg, Mathematik“ (Bestell-Nr. 825001).

Analysis

1 Elementare Funktionen und ihre Eigenschaften

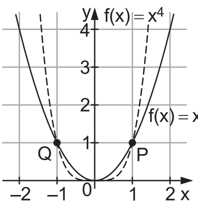
1.1 Potenzfunktionen

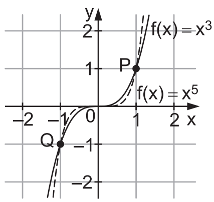
Potenzfunktionen sind Funktionen der Form: $f\colon x \mapsto x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$
Für ganzzahlige Exponenten unterscheidet man:

- Exponent positiv: $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R}$
  Die Graphen sind **Parabeln**.
- Exponent negativ: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
  Die Graphen sind **Hyperbeln**.

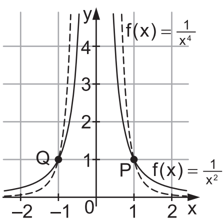
Graphenverläufe

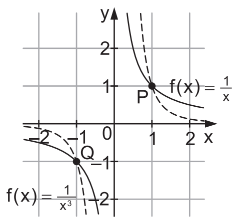
Parabeln: n gerade; Werte in $\mathbb{R}_+$ n ungerade; Werte in $\mathbb{R}$





Hyperbeln: n gerade; Werte in $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ n ungerade; Werte in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

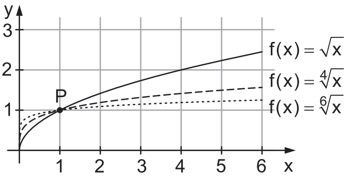




Wurzelfunktion

Ist der Exponent r ein Bruch, ergeben sich Wurzelfunktionen, speziell:
$f\colon x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$; $x \in \mathbb{R}_+$ (n-te Wurzelfunktion)

1. G_f verläuft durch $P(1 \mid 1)$.
2. Einzige Nullstelle: $x = 0$
3. Werte liegen in $\mathbb{R}_+$
4. Je größer n, desto
   - flacher verläuft G_f für $x > 1$.
   - steiler nähert sich G_f dem Koordinatenursprung.



1.2 Ganzrationale Funktionen

Unter einer ganzrationalen Funktion (oder Polynomfunktion) vom Grad n versteht man eine Funktion der Form:

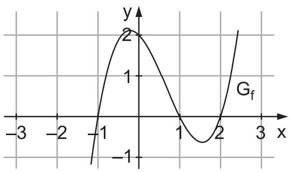
$f\colon x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0;\ \ x \in \mathbb{R}$

mit $n \in \mathbb{N},\ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$

Die Werte $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ heißen **Koeffizienten**.
Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion können der Linearfaktorzerlegung entnommen werden (vgl. auch Abschnitt 1.6).

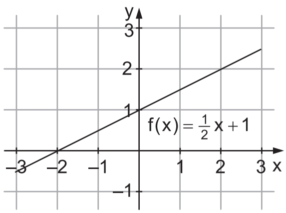
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
&= (x-2)(x^2-1) \\
&= (x-2)(x+1)(x-1)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Nullstellen bei $x = 2$, $x = -1$ und $x = 1$

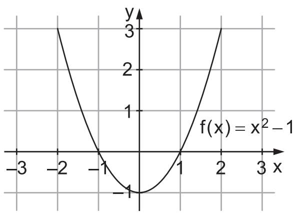


Spezialfälle

Lineare Funktion:
$f(x) = mx + t$ (Grad 1)
Graph ist eine Gerade.



Quadratische Funktion:
$f(x) = ax^2 + bx + c$ (Grad 2)
Graph ist eine Parabel.



2 Zufallsvariablen

2.1 Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung

Eine **Zufallsvariable** bzw. Zufallsgröße ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsexperiments eine reelle Zahl zu.
Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** einer Zufallsvariablen X gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Zufallsvariable die möglichen Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ annimmt; in Tabellenform:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Dabei muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten stets 1 ergeben:
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ (Normierungsbedingung)
Die Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch ein Histogramm erfolgen.

Vorgehensweise
Schritt 1: Werte, die die Zufallsvariable X annehmen kann, auflisten

Schritt 2: Zugehörige Wahrscheinlichkeiten berechnen

Schritt 3: Tabelle und ggf. Histogramm erstellen

Bei einem gezinkten Würfel wird die Augenzahl 6 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 geworfen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X, die die Anzahl der Sechsen beim zweimaligen Werfen dieses Würfels angibt.

Schritt 1:
Die Zufallsvariable X kann folgende Werte annehmen:
$x_1 = 0;\quad x_2 = 1;\quad x_3 = 2$ (keine, eine oder zwei Sechsen bei 2 Würfen)

Schritt 2:
Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Werte von X können mithilfe der Bernoulli-Formel (vgl. S. 38) ermittelt werden:

$$P(X = x_1) = P(X = 0) = P(\text{„keine 6“}) = \binom{2}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^2 = 0{,}7^2 = 0{,}49$$

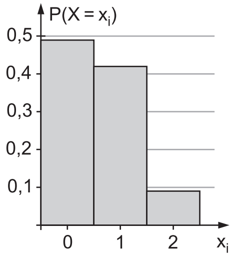
$$P(X = 1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^1 = 0{,}42 \qquad P(X = 2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}09$$

Schritt 3:

Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	0,49	0,42	0,09

Histogramm:



2.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen X gibt an, welcher Mittelwert bei oftmaliger Wiederholung des Zufallsexperiments zu erwarten ist.

$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n) = x_1 \cdot p_1 + \ldots + x_n \cdot p_n$

Varianz und Standardabweichung

Die Varianz und die Standardabweichung einer Zufallsvariablen X erfassen die Streuung der Werte um den Erwartungswert von X.

$\mathrm{Var}(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + \ldots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$

$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$

Bemerkungen:

- Der Erwartungswert E(X) einer Zufallsvariablen X ist häufig kein Wert, den die Zufallsvariable tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist **fair**, wenn der Erwartungswert des Gewinns für jeden Spieler gleich null ist.

Ein Englischlehrer stellt für die Notenverteilung der nächsten Schulaufgabe zwei mögliche Szenarien gegenüber.

Szenario A

Note x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	0,1	0,15	0,5	0,2	0	0,05

© STARK Verlag

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK