

2020

Abitur

Original-Prüfung
mit Lösungen

**MEHR
ERFAHREN**

Berlin

Mathematik

+ Übungsaufgaben
+ Online-Glossar

ActiveBook
• Interaktives
Training



STARK

Inhalt

Vorwort	
Stichwortverzeichnis	

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2020

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik	I
Prüfungsrelevante Themen	I
Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben	I
Zur Bewertung der Prüfung	III
Zum Umgang mit diesem Buch	III
Tipps zur Vorbereitung und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben	IV
Hinweise und Tipps zum Lösen von Abituraufgaben mit CAS-Rechnern	IV
Weiterführende Informationen	VI

Übungsaufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Übungsaufgabe 1	1
Übungsaufgabe 2	11
Übungsaufgabe 3	18
Übungsaufgabe 4	24

Zentrale schriftliche Abiturprüfung

Jahrgang 2016

Aufgabe 1.1: Analysis: $f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t$	2016-1
Aufgabe 1.1: Analysis (CAS): $f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t$	2016-8
Aufgabe 1.2: Analysis: $f(x) = -e^{0,3x^2} + 5$	2016-14
Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie	2016-20
Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie	2016-26
Aufgabe 3.1: Stochastik	2016-32
Aufgabe 3.2: Stochastik	2016-37

Jahrgang 2017

Aufgabe 1.1: Analysis: $f(x) = -\frac{1}{500}x^3 + \frac{3}{50}x^2 + 1$	2017-1
Aufgabe 1.2: Analysis: $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x}$	2017-7
Aufgabe 1.2: Analysis (CAS): $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x}$	2017-13
Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie	2017-20
Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie	2017-25
Aufgabe 3.1: Stochastik	2017-31
Aufgabe 3.2: Stochastik	2017-35

Jahrgang 2018

Aufgabe 1.1: Analysis: $g(x) = \frac{1}{1000} \cdot \left(\frac{1}{2000} x^4 - 10x^2 + 50\,000 \right)$; $h(x) = 0,05x^2 + 54$	2018-1
Aufgabe 1.2: Analysis: $f(x) = (x+1) \cdot e^{-0,5x}$; $g(x) = x+1$	2018-11
Aufgabe 2.1: Analytische Geometrie	2018-19
Aufgabe 2.2: Analytische Geometrie	2018-24
Aufgabe 3.1: Stochastik	2018-30
Aufgabe 3.2: Stochastik	2018-34

Jahrgang 2019

Aufgabe 1: hilfsmittelfreier Teil	2019-1
Aufgabe 2.1: Analysis: $h(t) = -0,1 \cdot t^4 + 20 \cdot t^2$	2019-8
Aufgabe 2.2: Analysis: $h(t) = 8t \cdot e^{-0,04} + 50$	2019-17
Aufgabe 3.1: Analytische Geometrie	2019-25
Aufgabe 3.2: Analytische Geometrie	2019-31
Aufgabe 4.1: Stochastik	2019-37
Aufgabe 4.2: Stochastik	2019-42



Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind. Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf den Farbseiten vorne in diesem Buch.

Jeweils zu Beginn des neuen Schuljahres erscheinen die neuen Ausgaben der Abiturprüfungsaufgaben mit Lösungen.

Autoren:

Sabine Flohrer:
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2016 und 2017
Dr. Detlef Launert
Übungsaufgaben zum hilfsmittelfreien Teil
Lauri Lehmann
Lösungen zur Abiturprüfung Berlin 2018 und 2019

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieses Übungsbuch ist die ideale Hilfe bei der Vorbereitung auf das **Zentralabitur 2020** für den **Grundkurs in Berlin** im Fach **Mathematik**.

- Sie erhalten im ersten Teil des Buches wichtige **Informationen** über Inhalt und Aufbau der Prüfungsaufgaben für das Abitur 2020. Dies ermöglicht Ihnen, sich gezielt auf die Abiturprüfung vorzubereiten. Darüber hinaus finden Sie viele **Hinweise und Tipps**, die Ihnen helfen, effektiv und erfolgreich an die Lösung der Prüfungsaufgaben heranzugehen.
- Im zweiten Teil stehen Ihnen **Übungsaufgaben** zum **hilfsmittelfreien Teil** zur Verfügung. Diese bestehen aus den entsprechenden Aufgaben des Abiturs in Brandenburg und dienen zur Orientierung für den hilfsmittelfreien Teil des Abiturs in Berlin ab 2019. Da es sich um Aufgaben für das erhöhte Anforderungsniveau handelt, sind bestimmte Teilaufgaben, die im Schwierigkeitsgrad über das Grundkursniveau hinausgehen, besonders gekennzeichnet.
- Der dritte Teil enthält die **Original-Prüfungsaufgaben 2016 bis 2019**. Damit können Sie sich ein genaues Bild davon machen, wie die Prüfung in den letzten Jahren ausgesehen hat.
- Der Zugangscode auf den Farbseiten vorne in diesem Buch ermöglicht es Ihnen, Aufgaben im Rahmen eines **Online-Prüfungstrainings zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** interaktiv zu lösen.
- Die Original-Prüfungsaufgaben sind zusätzlich mit **separaten Tipps zum Lösungsansatz** versehen, die Ihnen Hilfestellungen für die Lösung der Aufgabe geben. Wenn Sie mit einer Aufgabe nicht zurechtkommen, schauen Sie deshalb nicht gleich in die Lösungen, sondern nutzen Sie schrittweise die Lösungstipps, um selbst die Lösung zu finden.
- Zu allen Original-Prüfungsaufgaben wurde **eine vollständige, ausführlich kommentierte Lösung mit allen erforderlichen Rechenschritten** erstellt, die es Ihnen ermöglicht, Ihre Lösung eigenständig zu kontrollieren und die Rechenwege Schritt für Schritt nachzuvollziehen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abitur-Prüfung 2020 vom LISUM Berlin-Brandenburg bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell.

Die Autoren wünschen Ihnen für die Prüfungsvorbereitung und für das Abitur viel Erfolg!

Hinweise und Tipps zum Zentralabitur 2020

Die zentrale schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

Die Grundlagen für die von Ihnen zu bearbeitenden Prüfungsaufgaben sind der Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe in der Ausgabe von 2014 und die Bildungsstandards der KMK für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik (Beschluss vom 18.10.2012). Die zu überprüfenden Kompetenzen sowie die inhaltsbezogenen Prüfungsgegenstände ergeben sich aus den dort genannten abschlussorientierten Standards und den fachlichen Inhalten.

Prüfungsrelevante Themen

Die Prüfungsaufgaben im Fach Mathematik basieren auf dem **Kerncurriculum**. Folgende zusätzliche Festlegungen sind dabei zu berücksichtigen:

Grundsätzlich **nicht** gefordert werden das Erläutern und Entwickeln von Beweisen. Zudem **nicht** gefordert wird die Nutzung von Grenzwerten bei der Bestimmung von Ableitung oder Integral, Potenzfunktionen mit Exponenten, die nicht Elemente der natürlichen Zahlen sind, sowie Simulationen.

Aufbau und Bearbeitung der Prüfungsaufgaben

Bei der Aufgabenstellung 1, den hilfsmittelfreien Aufgaben, stehen die Aufgaben und ihre Teilaufgaben in keinem übergeordneten Zusammenhang. Sie beziehen sich auf alle drei Themengebiete und können auch in begrenztem Umfang Problemstellungen enthalten, die dem Anforderungsbereich III zuzuordnen sind. Es gibt 4 Aufgaben zu je 5 BE.

Bei den weiteren Aufgabenstellungen ist jede Aufgabe als strukturierte, inhaltlich zusammenhängende Aufgabe konstruiert, die in mehrere Teilaufgaben untergliedert ist. Jede dieser Aufgaben enthält entsprechende Anteile aus allen drei Anforderungsbereichen. Üblicherweise beginnen die Aufgaben mit den dem Anforderungsbereich I zugeordneten Grundaufgaben. Es empfiehlt sich immer, die Aufgabe zunächst vollständig zu lesen, da Zwischenergebnisse gelegentlich auch in nachfolgenden Aufgabenteilen enthalten sein können.

Aufgabenteile, die dem Anforderungsbereich III zugeordnet sind, finden sich meist am Ende der jeweiligen Aufgabe. Nur, wenn es der Zusammenhang erfordert, können sie auch schon früher eingegliedert sein. Wenn sich die Möglichkeit bietet, wird die Aufgabe so formuliert, dass eine praktische Anwendung des mathematischen Sachverhaltes beschrieben wird.

In jedem der drei Themengebiete Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik ist genau eine Aufgabe zu lösen, wobei der Prüfling jeweils die Wahl zwischen zwei gleichwertigen Aufgaben hat. Die Wahlmöglichkeiten sind in folgender Tabelle dargestellt:

Aufgabenstellung 1 ohne Wahlmöglichkeit 45 min	Aufgabe 1: hilfsmittelfreier Teil (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik)
Aufgabenstellung 2 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 2.1 oder Aufgabe 2.2 Analysis
Aufgabenstellung 3 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 3.1 oder Aufgabe 3.2 Analytische Geometrie
Aufgabenstellung 4 Der Prüfling wählt aus.	Aufgabe 4.1 oder Aufgabe 4.2 Stochastik

Für die Bearbeitung der vier Prüfungsaufgaben stehen **255 Minuten** zur Verfügung. Davon entfallen 45 Minuten auf die Aufgabenstellung 1.

30 Minuten sind zudem als Lesezeit vorgesehen, in denen die Aufgaben gelesen werden können und eine Wahl zwischen den beiden Aufgaben in jedem Themengebiet getroffen werden kann.

Für die Frage, welche **Hilfsmittel** bei der Prüfung zugelassen sind, ist entscheidend, ob die Abiturprüfung ohne oder mit Verwendung eines Computer-Algebra-Systems (CAS) bearbeitet wird.

Grundsätzlich sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

- Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
- Formelsammlung, die von der zuständigen Senatsverwaltung bzw. dem zuständigen Ministerium für die Verwendung im Abitur zugelassen und an der Schule eingeführt ist (Aufgabenstellung 2, 3 und 4).

Für die Bearbeitung **ohne CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder dem automatisierten Lösen von Gleichungen verfügen.

Für die Bearbeitung **mit CAS** sind folgende Hilfsmittel zugelassen:

Für die Bearbeitung der Abiturprüfung können ein PC oder folgende Geräte Anwendung finden:

Texas Instruments	TI-92, TI-Voyage, TI-Nspire
Casio	Casio Classpad

Ein PC-gestütztes CAS-Abitur kann mit CAS-Software wie MuPad, Geogebra oder Derive oder mit Emulationen von o.g. CAS-Geräten durchgeführt werden.

Grundsätzlich gilt, dass die Benutzung weiterer Software über das CAS hinaus nicht zugelassen ist.

Startbahn Ost

Bei östlichen Winden wird vom Flughafen in Berlin-Tegel von einer Startbahn gestartet, die in eine nordöstliche Richtung zeigt.

Ein Jet hebt im Punkt $P_0(1\,140\,|\,240\,|\,0)$ von der Startbahn ab und erreicht eine Sekunde später die Position $P_1(1\,200\,|\,251\,|\,30)$.

Der Jet verändert seine Richtung beim Starten nicht nach rechts oder links.

Der Jet fliegt geradlinig und verändert seine Geschwindigkeit zunächst nicht.

Der Flughafen und Berlin liegen in der x-y-Ebene. Es gilt $1\text{ LE} = 1\text{ m}$.



Avda/www.avda-foto.de/ CC BY-SA 3.0

BE

- a) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P_1}$ und eine Gleichung der Geraden g an, auf der der Jet unmittelbar nach dem Start fliegt.

Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Jet in einer Sekunde zurücklegt.

Berechnen Sie die Startgeschwindigkeit des Jets in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Berechnen Sie den Winkel, mit dem der Jet gestartet ist.

7

- b) In gerader Verlängerung der Startbahn liegt 7 km vom Punkt $P_0(1\,140\,|\,240\,|\,0)$ entfernt das Rathaus Pankow.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Rathauses.

Runden Sie auch Zwischenergebnisse ganzzahlig.

[Kontrollergebnis: $R(8\,040\,|\,1\,505\,|\,0)$]

5

- c) 10 Sekunden nach dem Start ändert der Jet im Punkt $P_{10}(1\,740\,|\,350\,|\,300)$ seine

Geschwindigkeit und fliegt weniger steil mit der Richtung $\vec{r}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 90 \\ 16,5 \\ 4,5 \end{pmatrix}$ weiter.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Jet das Rathaus überfliegt.

Bestimmen Sie die Höhe, in der das Rathaus überflogen wird.

4

- d) In der Ebene E mit der Gleichung $x - 20z = -1\,560$ befindet sich die untere Begrenzung einer dichten Wolkendecke.

Weisen Sie nach, dass die neue Flugbahn parallel zu der unteren Begrenzung der Wolkendecke verläuft.

Der Bürgermeister schaut vom Rathaus in dem Moment nach oben, in dem sich der Jet genau über dem Rathaus befindet. Untersuchen Sie, ob der Bürgermeister den Jet sehen kann oder nur die Wolkendecke.

$\frac{4}{20}$

Lösungen zu Aufgabe 2.1

a) Mit dem Richtungsvektor

$$\vec{r} = \overrightarrow{P_0 P_1} = \begin{pmatrix} 60 \\ 11 \\ 30 \end{pmatrix}$$

und dem Stützpunkt P_0 lautet die Gleichung der Fluggeraden:

$$g: \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 1140 \\ 240 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 11 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ mit } k \in \mathbb{R}}}$$

Die Länge der Strecke in einer Sekunde entspricht der Länge des Richtungsvektors.

$$\left| \begin{pmatrix} 60 \\ 11 \\ 30 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{60^2 + 11^2 + 30^2} = \sqrt{4\,621} \approx 68$$

In einer Sekunde legt der Jet ungefähr 68 m zurück.

$$v = \frac{68 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{68 \cdot 60 \cdot 60 \text{ m}}{1 \text{ h}} = \frac{244\,800 \text{ m}}{1 \text{ h}} \approx 245 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Startgeschwindigkeit beträgt ungefähr 245 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Der Winkel zwischen der Startgeraden g und der Ebene E_{xy} berechnet sich mittels Sinusansatz zwischen dem Richtungsvektor von g und einem Normalenvektor der Ebene E_{xy} .

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Vektor kollinear zur z -Achse und steht somit senkrecht auf der x - y -Ebene.

Er ist als Normalenvektor geeignet.

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \circ \vec{r}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{r}|} \approx \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 60 \\ 11 \\ 30 \end{pmatrix} \right|}{1 \cdot 68} = \frac{30}{68} \approx 0,4412$$

$$\alpha \approx \sin^{-1}(0,4412) \approx 26^\circ$$

Der Startwinkel beträgt näherungsweise 26°.

b) Das Rathaus Pankow liegt auf der Geraden p , deren Stützvektor der Ortsvektor des Startpunktes P_0 ist. Der Richtungsvektor ist die Projektion des Richtungsvektors der Fluggeraden g in die Ebene E_{xy} , da das Rathaus auf der geraden Verlängerung der Startbahn in der Grundebene liegt. Der Richtungsvektor von p unterscheidet sich daher nur in der z -Komponente. Da Pankow in nordöstlicher Richtung von Tegel liegt, sind nur positive Werte für den Parameter u zugelassen.

$$p: \underline{\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 1140 \\ 240 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } u \in \mathbb{R}^+}}$$

Das Rathaus liegt 7 km = 7 000 m von P_0 entfernt.

Es ist der Wert für u gesucht, sodass der von P_0 aus zurückgelegte Weg die Länge 7 000 m hat.

$$\begin{aligned} 7\,000 &= \left| u \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\ 7\,000 &= \sqrt{u^2 \cdot (60^2 + 11^2)} \\ 7\,000 &= \sqrt{u^2 \cdot 3\,721} \\ 7\,000 &= u \cdot \sqrt{3\,721} \\ u &= \frac{7\,000}{\sqrt{3\,721}} \\ u &\approx 115 \end{aligned}$$

Für die Koordinaten des Rathauses folgt:

$$\vec{x}_R = \begin{pmatrix} 1\,140 \\ 240 \\ 0 \end{pmatrix} + 115 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\,040 \\ 1\,505 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Rathaus hat die Koordinaten $R(8\,040 | 1\,505 | 0)$.

- c) Die neue Fluggerade wird bestimmt durch den Richtungsvektor $\vec{r}_{\text{neu}}$ und den Stützpunkt P_{10} .

$$g_{\text{neu}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1\,740 \\ 350 \\ 300 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 16,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

„Das Flugzeug überfliegt das Rathaus“ bedeutet, dass der Punkt auf der Flugbahn senkrecht über dem Rathaus liegen muss. Seine Koordinaten unterscheiden sich also nur in der z-Komponente von den Koordinaten des Rathauses. x- und y-Koordinate müssen mit den Koordinaten des Rathauses übereinstimmen.

Die x- und y-Koordinate der neuen Flugbahn liefern folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1\,740 + 90s &= 8\,040 &\Rightarrow s &= 70 \\ 350 + 16,5s &= 1\,505 &\Rightarrow s &= 70 \end{aligned}$$

Da beide Gleichungen denselben Wert für s liefern, ist das Gleichungssystem erfüllt, d. h., das Flugzeug überfliegt das Rathaus.

Die Höhe über dem Rathaus entspricht der z-Komponente.

$$z = 300 + 70 \cdot 4,5 = 615$$

Das Rathaus wird in einer Höhe von 615 m überflogen.

- d) Aus der gegebenen Ebenengleichung (Koordinatenform aus der Normalenform der Ebenengleichung) kann man den Normalenvektor der Ebene E sofort ablesen.

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Die neue Flugbahn liegt parallel zur Ebene E der unteren Wolkendecke, wenn der Normalenvektor der Ebene auch senkrecht auf dem Richtungsvektor der Fluggeraden $\vec{g}_{\text{neu}}$ steht. Das zugehörige Skalarprodukt muss null ergeben.

$$\vec{n}_E \circ \vec{r}_{\text{neu}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 90 \\ 16,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} = 90 + 0 - 90 = 0$$

Die neue Flugbahn liegt parallel zur unteren Begrenzung der Wolkendecke.

Der Bürgermeister blickt vom Rathaus nach oben. Er trifft mit seinem Blick also auf einen Punkt B (8 040 | 1505 | z) der Wolkenebene, senkrecht über der Position des Rathauses.

z gibt die Höhe der Wolkendecke über dem Rathaus an.

Setzt man den Punkt B in die Ebenengleichung der Wolkendecke, so ergibt sich:

$$8\,040 - 20z = -1\,560$$

$$8\,040 + 1\,560 = 20z$$

$$z = 480$$

Die Wolkendecke liegt in einer Höhe von 480 m über dem Rathaus. Der Jet überfliegt das Rathaus in einer Höhe von 615 m (Teilaufgabe c). Da der Jet oberhalb der Wolkendecke fliegt, kann der Bürgermeister den Jet nicht sehen.



© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK