Abitur

Original-Prüf
mit Lösungen

MEHR ERFAHREN

Rheinland-Pfalz

Mathematik

+ Übungsaufgaben

STARK

Inhaltsverzeichnis

Original-Abituraufgaben

Sitzen alle mathematischen Begriffe? Unter
www.stark-verlag.de/mathematik-glossar/
finden Sie ein kostenloses Glossar zum schnellen Nachschlagen aller wichtigen Definitionen mitsamt hilfreicher Abbildungen und Erläuterungen.

Autorinnen und Autoren

Marcel Gruner:	Tipps und Lösungen zur Abiturprüfung 2017, 2018 und 2019 (G8 und G9; jeweils für WTR); Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung
Dr. Hubert Langlotz:	Tipps und Lösungen zur Abiturprüfung 2017 (G8 für CAS; Aufgabe 1)
Dr. Wilfried Zappe:	Tipps und Lösungen zur Abiturprüfung 2017 (G8 für CAS; Aufgabe 2)

Die Tipps und Lösungen zur Abiturprüfung 2017 (G9 für CAS), 2018 (G8 und G9 für CAS) und 2019 (G8 und G9 für CAS) wurden von der Redaktion erstellt.

Die Übungsaufgaben wurden von Georg Breitenfeld (Aufgabe 8), Viola Dengler (Aufgabe 9), Herbert Kompernaß (Aufgaben 1, 4), Dr. Jürgen Leitz (Aufgabe 7), Werner Neidhardt (Aufgaben 3, 6, 10) und Ulrich Rauch (Aufgaben 2, 5) erstellt.

Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

Sie werden das Abitur im Fach Mathematik ablegen. Seit 2017 wird ein Aufgabenblock (Analysis) der schriftlichen Abituraufgaben in Mathematik einheitlich für alle Schülerinnen und Schüler in Rheinland-Pfalz zentral vom Ministerium für Bildung gestellt. Die Aufgaben der anderen beiden Blöcke werden weiterhin dezentral erstellt.

Der vorliegende Band soll Ihnen dabei helfen, sich optimal auf die schriftliche Prüfung in Mathematik vorzubereiten. Das einführende Kapitel „**Hinweise und Tipps zur schriftlichen Abiturprüfung**" informiert Sie über die offiziellen Rahmenvorgaben, macht Sie mit den Arbeitsanweisungen (Operatoren) vertraut und erläutert, wie Sie einzelne Aufgaben und die Abiturprüfung im Allgemeinen am besten angehen.

Die sich anschließenden zahlreichen **Übungsaufgaben** basieren auf den abiturrelevanten Unterrichtsthemen und ermöglichen Ihnen die Wiederholung des Prüfungsstoffs und eine optimale Vorbereitung auf die Abiturprüfung. Im letzten Teil des Buches finden Sie die **offiziellen, zentral gestellten Abiturprüfungsaufgaben der Jahre 2017, 2018 und 2019** (G8 und G9, jeweils für WTR und CAS), anhand deren Sie sich ein gutes Bild zum Analysisteil Ihrer Abschlussprüfung machen können. Außerdem erhalten Sie zusätzliche Hinweise zu den entsprechenden GTR-Versionen.

Zu jedem Aufgabenblock finden Sie einen ausführlichen **Lösungsvorschlag**, mit dem Sie Ihre eigenen Ausarbeitungen vergleichen können. Den Lösungsvorschlägen vorangestellt sind **Lösungshinweise**, die Ihnen bei der Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben helfen.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung vom Ministerium für Bildung bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter: www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

Die Autoren und der Verlag wünschen Ihnen eine gute Vorbereitungsphase und viel Erfolg in der Abiturprüfung!

5 Allgemeine Tipps rund um die Abiturprüfung

5.1 Vorbereitung

Beginnen Sie frühzeitig und langfristig mit der Vorbereitung! Eine regelmäßige Wiederholung sorgt zudem für eine bessere Festigung des Stoffes als ein kurzfristiges Lernen vor der Prüfung.

- Die beste Vorbereitung ist: im Unterricht aufpassen, mitarbeiten, Hausaufgaben machen.
- Nutzen Sie schon ab der 11. Klasse jeweils die Ferien nicht nur zum nötigen Entspannen, sondern auch, um Zusammenfassungen in Ihren Prüfungsfächern zu schreiben. Dann haben Sie in der Endphase mehr Zeit.
- Fertigen Sie eine Übersicht über den prüfungsrelevanten Stoff an und teilen Sie die Inhalte in sinnvolle Teilbereiche ein. Machen Sie sich einen Zeitplan, bis wann Sie welche Inhalte wiederholt haben möchten.
- Bedenken Sie, dass Sie für Stoff, den Sie nicht so gut können, mehr Zeit benötigen als für Stoff, den Sie schon relativ sicher beherrschen.
- Nutzen Sie auch eine Ich-kann-Liste zur Selbsteinschätzung, um sich immer wieder vor Augen zu führen, was Sie bereits alles können (oder was Sie ggf. noch mal wiederholen sollten). Erstellen Sie dazu eine Tabelle, in denen alle prüfungsrelevanten Punkte aus dem aufgelistet sind, und ordnen Sie jeden Punkt einer der Kategorien „kann ich sicher", „kann ich relativ sicher" und „muss ich noch üben" zu.
- Bilden Sie Lerngruppen mit Mitschülern. Am meisten lernt man, indem man Zusammenhänge und Aufgaben anderen erklärt. Außerdem können die Mitschüler Ihnen Ihre Fragen beantworten.
- Nehmen Sie sich noch einmal alte Kursarbeiten und Hausaufgabenüberprüfungen vor. Die Aufgaben darin entsprechen dem Stil Ihres Fachlehrers und somit dem Stil der (dezentralen) Aufgaben. Lassen Sie sich ggf. auch Kursarbeiten aus den Parallelkursen geben (besonders, wenn diese Kurse die Abiturprüfung gemeinsam schreiben). Das ist – neben dem Aufpassen (siehe oben) – die zweitbeste Vorbereitung.
- Schauen Sie sich Ihre Fehler (sowohl aus alten Kursarbeiten als auch nun bei Übungsaufgaben) genau an. Überlegen Sie sich, warum die Lösung falsch war, und korrigieren Sie die Fehler. Auch aus Fehlern können und sollten Sie lernen!
- Nutzen Sie unbedingt Ihre Unterrichtsaufzeichnungen und Ihr Lehrbuch zur Vorbereitung.
- Bewahren Sie Ihre korrigierten und mit Anmerkungen (was hat Ihnen Schwierigkeiten bereitet, wozu hatten Sie Fragen o. Ä.) versehenen Unterlagen vom Lernen übersichtlich auf. Das erleichtert spätere Wiederholungen.

5.6 Tipps zum Umgang mit dem Buch

- Wie Sie wissen, werden zwei der drei Aufgabenblöcke, die Sie in der Prüfung bearbeiten müssen, von der jeweiligen Fachlehrkraft und somit **nicht zentral** erstellt. Bei der Erstellung wird Ihre Lehrkraft darauf achten, dass diese Aufgaben der gewählten **Schwerpunktsetzung** im Unterricht entsprechen. Folglich kann es sein, dass in den Übungsaufgaben Themengebiete abgedeckt sind, die in Ihrem Unterricht gar nicht oder nur am Rande behandelt wurden. Sollte dies der Fall sein, können Sie selbstverständlich die entsprechenden (Teil-)Aufgaben überspringen.
- In diesem Übungsbuch sind die zentral gestellten Originalprüfungen mit Tipps und Lösungen nur in den Versionen für WTR und CAS komplett abgedruckt. Die **GTR-Versionen** wurden jeweils in Anlehnung an eine der beiden anderen Versionen erstellt, wobei es sich bei den Abweichungen nur um wenige Teilaufgaben handelt. Jeweils nach dem Lösungsteil derjenigen Version, auf deren Grundlage die GTR-Version erstellt wurde, sind die abweichenden Teilaufgaben der GTR-Version angegeben und durch Hinweise zur Lösung ergänzt.
- Unabhängig davon, ob Sie eine **G8-** oder eine **G9-Schule** besuchen, sollten Sie auch die Originalprüfungen des jeweils anderen Modells zur Vorbereitung nutzen, da sich die Vorgaben für prüfungsrelevante Themengebiete nicht unterscheiden.
- Da der Zeitfaktor in der Prüfung eine wichtige Rolle spielt, ist es nützlich, die **Prüfungssituation** so gut es geht zu **simulieren**. Suchen Sie sich drei passende Aufgabenblöcke dieses Buches (typisch in der Kombination Analysis – Lineare Algebra/Analytische Geometrie – Stochastik) aus und bearbeiten Sie diese in einem Durchlauf und ohne Rückgriff auf die Musterlösungen in 270 Minuten. Suchen Sie sich dafür einen ruhigen Arbeitsplatz, an dem Sie nicht gestört werden.
- Wenn Sie in einer Aufgabe nicht weiterwissen, nutzen Sie zunächst stets die **Lösungshinweise und Tipps**, die sich zwischen Aufgabenstellung und Lösungsvorschlag befinden und durch graue Kästen gekennzeichnet sind. Erst wenn Sie trotz dieser Hilfestellungen Schwierigkeiten bei der Bearbeitung einer Aufgabe haben, sollten Sie die Musterlösungen zurate ziehen. Versuchen Sie in diesem Fall, die angebotene Lösung (und insbesondere die Lösungswege) Schritt für Schritt zu verstehen und nachzuvollziehen.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Schar der Funktionen f_k mit $f_k(x) = -x^4 + 6kx^2$, $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von f_k.

b) Begründen Sie, dass G_k für alle Werte von k symmetrisch zur y-Achse ist und für $k \leq 0$ nicht oberhalb der x-Achse verläuft.

c) Weisen Sie nach, dass G_k für $k > 0$ genau zwei Hochpunkte besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Hochpunkte in Abhängigkeit von k.
[*Zur Kontrolle:* Koordinaten eines Hochpunkts: $(\sqrt{3k} \,|\, 9k^2)$]

d) Untersuchen Sie für $k > 0$ mithilfe der Lage eines der beiden Hochpunkte von G_k in Abhängigkeit von k, wie viele gemeinsame Punkte G_k und die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ haben.

e) Die in Abbildung 1 dargestellten Graphen gehören jeweils zu einem der Werte $k = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$ und $k = 1$.
Ordnen Sie die angegebenen Werte von k jeweils einem der Graphen zu.
Begründen Sie Ihre Zuordnung.

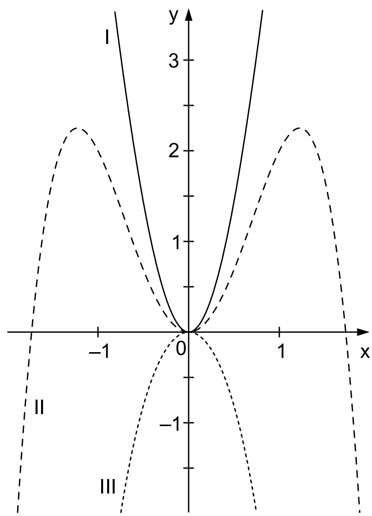

Abb. 1

f) Deuten Sie für $k > 0$ das Integral $\int_0^{\sqrt{3k}} (9k^2 - f_k(x))\,dx$ mithilfe einer geeigneten Skizze geometrisch.

Aufgabe 2

Ein Trainingsgerät zur Schulung der Koordination besteht aus einem Unterbau und einem Standbrett (vgl. Abbildung 2). Das zwei Zentimeter dicke Standbrett schließt seitlich ohne Überstand mit dem Unterbau ab.

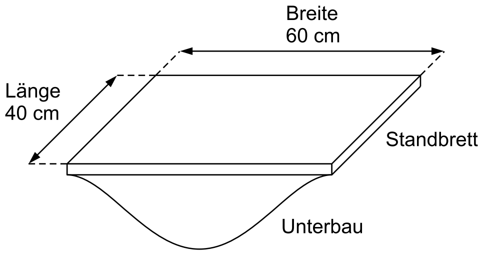

Abb. 2

Das Trainingsgerät hat auf seiner gesamten Länge den gleichen Querschnitt. In diesem Querschnitt wird die untere Profillinie des Unterbaus betrachtet.

Bei horizontal ausgerichtetem Standbrett soll die Profillinie durch eine Funktion modellhaft beschrieben werden. Das Modell geht von einem horizontalen Untergrund aus, der im Querschnitt durch die x-Achse des Koordinatensystems dargestellt wird; eine Längeneinheit im Koordinatensystem soll einem Dezimeter in der Realität entsprechen.

Die Profillinie wird für $-3 \leq x \leq 3$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion p mit

$$p(x) = -\frac{1}{48} \cdot (x^4 - 18x^2)$$

beschrieben. Abbildung 3 zeigt den Graphen von p.

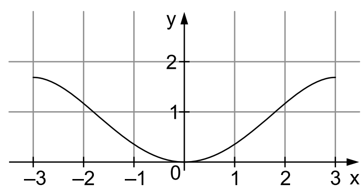

Abb. 3

a) Der Graph von p geht durch eine Streckung aus einem der Graphen von f_k mit $f_k(x) = -x^4 + 6kx^2$ aus Aufgabe 1 hervor.

Geben Sie den passenden Wert von k sowie den Streckfaktor an.

b) Begründen Sie, dass der Graph von p im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt hat und genau zwei Hochpunkte besitzt, die in ihren y-Koordinaten übereinstimmen.

c) Bestimmen Sie die Höhe des Trainingsgeräts in Zentimetern.

d) Der Unterbau und das Standbrett sind ohne Hohlraum aus Holz gefertigt. Ein Kubikzentimeter des Holzes hat eine Masse von 0,5 Gramm.
Berechnen Sie die Masse des Trainingsgeräts in Kilogramm.

TIPP **Lösungshinweise**

Teilaufgabe 1 a

Welchen Grad hat die ganzrationale Funktion? Was bedeutet das für die möglichen Anzahlen der Nullstellen?

Wenden Sie das Kriterium für Nullstellen an.

Formen Sie dann die Funktionsvorschrift um und führen Sie eine passende Fallunterscheidung bezüglich k durch.

Teilaufgabe 1 b

Bei ganzrationalen Funktionen lassen sich Symmetrieaussagen mithilfe der Exponenten machen.

„Nicht oberhalb der x-Achse“ bedeutet, dass f_k nur negative Funktionswerte oder den Funktionswert 0 hat, also $f_k(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Untersuchen Sie dies durch eine einfache Abschätzung.

Teilaufgabe 1 c

Bestimmen Sie die Maximalstellen mithilfe der hinreichenden Bedingung.

Vergessen Sie nicht, die y-Koordinate der Hochpunkte zu berechnen, indem Sie die gefundenen x-Werte in die Funktionsvorschrift einsetzen.

Teilaufgabe 1 d

Zunächst sollten Sie sich den qualitativen Verlauf des Graphen (insbesondere bezüglich der Geraden $y = 4$) klarmachen. Dabei helfen die Ergebnisse der vorigen Teilaufgaben.

Es müssen drei Fälle für die Anzahl der Schnittpunkte unterschieden werden.

Machen Sie sich ggf. eine Skizze.

Zielführend ist es, wenn Sie den Grenzfall betrachten.

Teilaufgabe 1 e

Nutzen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben b und c.

Teilaufgabe 1 f

Deuten Sie das Integral als Flächeninhalt.

Deuten Sie den Summanden $9k^2$ als (konstante) Funktion und überlegen Sie sich den Verlauf des zugehörigen Funktionsgraphen.

Sicher erinnern Sie sich: Mit einem Integral der Form $\int (g(x) - f(x))\,dx$ lässt sich der Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen berechnen.

Beachten Sie die Grenzen des Integrals. In welchem Quadranten liegt der Flächeninhalt?

Teilaufgabe 2 a

Bestimmen Sie zuerst den Streckfaktor, dann k. Führen Sie einen Koeffizientenvergleich durch.

Teilaufgabe 2 b

Beziehen Sie die Erkenntnisse aus den Teilaufgaben 1 c und 2 a in Ihre Argumentation ein.

Zeigen Sie, dass die Maximalstellen von f_3 innerhalb des Definitionsbereichs von p liegen.

Teilaufgabe 2 c

Bestimmen Sie den vertikalen Abstand zwischen dem Tiefpunkt und den Hochpunkten von p.

Vergessen Sie nicht das Standbrett sowie die Umrechnung der Längeneinheiten.

Teilaufgabe 2 d

Die Berechnung der Masse erfolgt mithilfe der physikalischen Formel $m = \rho \cdot V$ (Masse = Dichte · Volumen).

Welche dieser Größen ist aus der Aufgabenstellung bekannt?

Das Volumen des Unterbaus ergibt sich aus dem Produkt der Querschnittsfläche und der Länge des Trainingsgeräts.

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

a) Notwendiges Kriterium für Nullstellen ist $f_k(x) = 0$, also:

$$-x^4 + 6kx^2 = 0$$

$$-x^2 \cdot (x^2 - 6k) = 0$$

Ein Produkt ist gleich 0, wenn mindestens einer der Faktoren gleich 0 ist. Somit hat die Funktion aufgrund des Faktors $-x^2$ unabhängig vom Parameter k eine (doppelte) Nullstelle bei $x_1 = 0$ und somit mindestens eine Nullstelle.

Für weitere Nullstellen muss der Term in der Klammer untersucht werden:

$x^2 - 6k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{6k}$

Es ergeben sich drei Fälle:

- $k < 0$: Der Radikand ist negativ; es ergibt sich keine weitere Nullstelle
  $\Rightarrow \quad f_k$ hat insgesamt eine Nullstelle.
- $k = 0$: Es ergibt sich $x_1 = 0$; diese Nullstelle wurde bereits ermittelt
  $\Rightarrow \quad f_k$ hat insgesamt eine Nullstelle.
- $k > 0$: Der Radikand ist positiv und der Term liefert zwei weitere Nullstellen
  $x_2 = -\sqrt{6k}$ und $x_3 = \sqrt{6k} \quad \Rightarrow \quad f_k$ hat insgesamt drei Nullstellen.

b) Der Funktionsterm der ganzrationalen Funktion f_k enthält nur Potenzen von x mit geradem Exponenten (2 und 4). Damit ist G_k für alle k achsensymmetrisch zur y-Achse.

Ist $k \le 0$, so ist auch $6kx^2 \le 0$, da $x^2 \ge 0$ ist. Daher gilt:

$f_k(x) = -x^4 + 6kx^2 \le -x^4 \le 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

c) Die Bedingung für die Existenz von Hochpunkten lautet $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

> **TIPP** Die erste der beiden Bedingungen bedeutet, dass an einem Extrempunkt bei x_0 eine waagrechte Tangente vorliegen muss. Die zweite Bedingung bedeutet, dass der Graph der 1. Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 fällt, also einen Vorzeichenwechsel von + nach – hat, bzw. dass der Graph der Funktion an der Stelle rechtsgekrümmt ist.

Die ersten beiden Ableitungen werden mit der Potenz- und der Summenregel bestimmt:

$f_k'(x) = -4x^3 + 12kx$ und $f_k''(x) = -12x^2 + 12k$

Mit der ersten (notwendigen) Bedingung für einen Hochpunkt erhält man:

$f_k'(x) = -4x^3 + 12kx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (-4x^2 + 12k) = 0$

Es muss also $x = 0$ oder $-4x^2 + 12k = 0$ gelten.

Die zweite Gleichung liefert:

$4x^2 = 12k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3k \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3k}$

Die zweite Ableitung an den gefundenen Stellen wird geprüft:

$f_k''(-\sqrt{3k}) = -12 \cdot (-\sqrt{3k})^2 + 12k = -12 \cdot 3k + 12k = -24k$

Wegen $k > 0$ gilt $-24k < 0 \quad \Rightarrow$ Die Funktion f_k hat bei $x = -\sqrt{3k}$ einen Hochpunkt.

$f_k''(0) = -12 \cdot 0^2 + 12k = 12k > 0$

$\Rightarrow$ Die Funktion f_k hat bei $x = 0$ einen Tiefpunkt.

$f_k''(\sqrt{3k}) = -12 \cdot (\sqrt{3k})^2 + 12k = -12 \cdot 3k + 12k = -24k < 0$

$\Rightarrow$ Die Funktion f_k hat bei $x = \sqrt{3k}$ einen Hochpunkt.

Insgesamt besitzt G_k somit für $k > 0$ genau zwei Hochpunkte.

Durch Einsetzen in die Grundfunktion erhält man die y-Koordinaten der Hochpunkte:

$f_k(-\sqrt{3k}) = -(-\sqrt{3k})^4 + 6k(-\sqrt{3k})^2 = -9k^2 + 6k \cdot 3k = -9k^2 + 18k^2 = 9k^2$

$f_k(\sqrt{3k}) = -(\sqrt{3k})^4 + 6k(\sqrt{3k})^2 = -9k^2 + 6k \cdot 3k = -9k^2 + 18k^2 = 9k^2$

Die beiden Hochpunkte haben die Koordinaten $(-\sqrt{3k} \mid 9k^2)$ und $(\sqrt{3k} \mid 9k^2)$.

TIPP Sowohl bei der Überprüfung der zweiten Ableitung als auch bei der Berechnung der y-Koordinaten der Hochpunkte kann für eine der beiden Extremstellen $x = \sqrt{3k}$ oder $x = -\sqrt{3k}$ auf die explizite Rechnung verzichtet und stattdessen mit der Symmetrie von G_k argumentiert werden.

d) Nach den bisherigen Teilaufgaben ist bekannt, dass für $k > 0$ der Graph G_k zur y-Achse symmetrisch ist und zwei Hochpunkte sowie einen Tiefpunkt besitzt. Zudem hat diese ganzrationale Funktion f_k den Grad 4. Daher sieht der zugehörige Graph G_k etwa so aus wie ein geschwungenes M (siehe Skizze).
Die gegebene Gerade $y = 4$ verläuft parallel zur x-Achse.

Aus der Symmetrieeigenschaft von G_k (und auch der Geraden) folgt, dass es genügt, nur einen der beiden Hochpunkte zu betrachten, um Aussagen über die Anzahl der gemeinsamen Punkte von G_k und der Geraden zu machen.