MATURA Skript

AHS

Mathemat

MEHR ERFAHREN

Das musst d... n!

Matura Österreich

STARK

Inhalt

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

dieses handliche Buch bietet Ihnen einen Leitfaden zu allen wesentlichen Inhalten, die Sie in der Mathematikmatura benötigen. Es führt Sie systematisch durch den Stoff, der den Grundkompetenzen zugrunde liegt, und begleitet Sie somit optimal bei Ihrer Vorbereitung. Durch seinen klar strukturierten Aufbau eignet sich dieses Buch besonders zur Auffrischung und Wiederholung des Prüfungsstoffs kurz vor der Matura. Da bei Ihrer Matura die Verwendung eines CAS-Rechners erlaubt ist, werden bei den meisten Beispielen nur Lösungsansätze und Ergebnisse angeführt.

- **Definitionen** und **Regeln** sind durch einen grauen Balken am Rand gekennzeichnet, wichtige **Begriffe** sind durch Fettdruck hervorgehoben.
- Zahlreiche **Abbildungen** veranschaulichen den jeweiligen Lerninhalt.
- Passgenaue **Beispiele** verdeutlichen die Theorie. Sie sind durch das Symbol gekennzeichnet.
- Zu typischen Grundaufgaben wird die **Vorgehensweise** Schritt für Schritt beschrieben.
- Das **Stichwortverzeichnis** führt schnell und treffsicher zum jeweiligen Stoffinhalt.

Viel Erfolg bei der Maturavorbereitung!

Die Autorinnen
Mag.ª Julia Luksch,
Mag.ª Katharina Luksch,
Mag.ª Magdalena Thaler

Die offiziellen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre (Haupttermin) sowie zahlreiche Übungsaufgaben zu beiden Prüfungsteilen mit vollständigen Lösungen zu allen Aufgaben enthält das Buch „Zentral-Matura Mathematik“ (Bestell-Nr. M5000).

Algebra und Geometrie

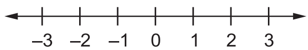
AG 1 Grundbegriffe der Algebra

Zahlenmengen

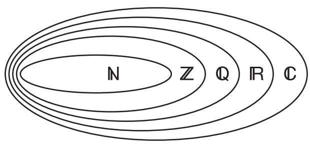
Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$
Rationale Zahlen: $\mathbb{Q} = \{a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \,|\, \frac{a}{b}\}$
Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
Komplexe Zahlen: $\mathbb{C} = \{a, b \in \mathbb{R} \,|\, a + bi\}$, wobei $i^2 = -1$

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ sind diejenigen Zahlen, die man zum Zählen benötigt, inklusive der Null. Zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gehören zusätzlich die negativen ganzen Zahlen. Alle rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ kann man als Bruch schreiben; das sind endliche oder periodische Dezimalzahlen. Die unendlichen nicht periodischen Dezimalzahlen $\mathbb{I}$ heißen **irrationale Zahlen**. Beispiele dafür sind die Kreiszahl π ($\pi = 3{,}1415\dots$) und die Euler'sche Zahl e ($e = 2{,}7182\dots$). Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bestehen aus den rationalen und den irrationalen Zahlen. Zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ gehören neben allen reellen Zahlen auch die imaginären Zahlen ($a + bi$ mit $b \neq 0$). Weitere Zahlenmengen sind die Menge $\mathbb{N}_g = \{0; 2; 4; 6; \dots\}$ der geraden und $\mathbb{N}_u = \{1; 3; 5; 7; \dots\}$ der ungeraden natürlichen Zahlen.

Beliebige reelle Zahlenmengen werden auf der **Zahlengeraden** dargestellt.



Venn-Diagramm der Zahlenmengen:



Zeichen	Zeichenerklärung
$<$ bzw. $>$	kleiner bzw. größer als
$\leq$ bzw. $\geq$	kleiner als oder gleich bzw. größer als oder gleich
$=$ bzw. $\neq$	ist gleich bzw. ist nicht gleich (ist ungleich)
$\in$ bzw. $\notin$	ist Element bzw. ist kein Element von
$\subset$ bzw. $\subseteq$	ist echte Teilmenge bzw. ist Teilmenge von
$\supset$ bzw. $\supseteq$	ist echte Obermenge bzw. ist Obermenge von
$\not\subset$ bzw. $\nsubseteq$	ist keine echte Teilmenge bzw. ist keine Teilmenge von
$\not\supset$ bzw. $\nsupseteq$	ist keine echte Obermenge bzw. ist keine Obermenge von
$\cup$	vereinigt; Vereinigungsmenge von
$\cap$	geschnitten; Durchschnittsmenge von
$\setminus$	ohne

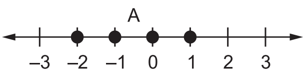
- $5<7,\ 3\leq 5,\ 5\leq 5,\ \frac{5}{x}\neq 0$
- $5\in\mathbb{N},\ \frac{1}{3}\notin\mathbb{Z},\ \ \mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R},\ \mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
- $\{2;3;4\}\supset\{3;4\}$ und $\{2;3;4\}\supseteq\{2;3;4\}$
- $\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}=\mathbb{R},\ \ \mathbb{N}\setminus\{2\}=\{0;1;3;4;\dots\}$

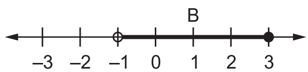
1. Setzen Sie $\in$ oder $\notin$ ein, je nachdem ob die gegebene Zahl in der Zahlenmenge enthalten ist oder nicht.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{C}$
-2	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\sqrt{5}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$
$\sqrt{36}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$5+2i$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$

Vorgehen: Vereinfachen, wenn möglich! Nur der Wert von Wurzeln aus einer Quadratzahl ist eine natürliche Zahl, sonst ist dieser Wert irrational.

2. Stellen Sie die Mengen $A=\{-2;-1;0;1\}$ und $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x\in(-1;3]\}$ auf der Zahlengeraden dar.





Variable: Buchstabe, der Platzhalter für eine unbekannte Zahl oder Größe ist.

Term: Sinnvoller mathematischer Ausdruck, der eine Verknüpfung von Zahlen, Variablen, Rechenzeichen und Klammern ist.

Formel: Beschreibung eines Zusammenhangs zwischen verschiedenen Größen.

(Un-)Gleichung: Mathematische Aussage über die (Un-)Gleichheit zweier Terme.

Gleichungssystem: System mehrerer Gleichungen in mehreren Variablen.

Äquivalenz: Gleichwertigkeit mehrerer mathematischer Aussagen.

Äquivalenzumformung: Umformung einer (Un-)Gleichung, bei der die mathematische Aussage erhalten bleibt und nicht erweitert wird.

Grundmenge: Zahlenmenge, die alle sinnvollen Werte für die Variablen enthält.

Definitionsmenge: Menge aller Werte, die die Variablen annehmen dürfen, damit die Rechenausdrücke sinnvoll sind.

Lösbarkeit: Eine (Un-)Gleichung mit einer Unbekannten ist lösbar, wenn es mindestens eine Zahl gibt, die für die Variable eingesetzt werden kann und die mathematische Aussage erfüllt. Bei zwei Unbekannten handelt es sich um ein Zahlenpaar.

Lösung(smenge): Werte von Unbekannten heißen Lösungen, wenn sie die (Un-)Gleichung erfüllen. Alle Lösungen bilden die Lösungsmenge. Hat die (Un-)Gleichung keine Lösung, ist die Lösungsmenge leer: $L = \{\,\}$.

- x, y, a sind Variablen, $x + 2y$, a^3 Terme; $3x - 7 = 2$ ist eine Gleichung.
- Die Gleichung $\frac{x^2}{x-1} = 0$ hat die Grundmenge $G = \mathbb{R}$, aber die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, weil der Nenner nicht 0 sein darf.
- Lösung mittels Äquivalenzumformungen:
$$\begin{aligned} 3x - 10 &= 23 \quad \vert +10 \\ 3x &= 33 \quad \vert :3 \\ x &= 11 \end{aligned}$$
- Für $5x \leq 15$ mit $G = \mathbb{R}$ ist die Lösungsmenge $L = (-\infty; 3]$.