ABI

# BundesAbi

MEHR
ERFAHREN

## Mathematik

Länderübergreifende
Abitur-Aufgaben

STARK

# Inhalt

**Autor:** Peter Bunzel

ActiveBook Interaktives Training

Ihr Coach zum Erfolg: Mit dem **interaktiven Training zum hilfsmittelfreien Teil des Abiturs** lösen Sie online Aufgaben, die speziell auf diesen Prüfungsteil zugeschnitten sind.
Am besten gleich ausprobieren!
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode finden Sie auf dem Ausklappbogen in diesem Buch.

# Vorwort

Liebe Schülerinnen und Schüler,

die **schriftlichen Abiturprüfungen** im Fach Mathematik vieler Bundesländer (z. B. Bayern, Hamburg, Bremen, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Sachsen und Schleswig-Holstein) enthalten sogenannte **länderübergreifende Aufgaben zum hilfsmittelfreien Prüfungsteil**, auf die Sie sich mithilfe dieses Buches optimal vorbereiten können.
In einer kurzen Einführung erfahren Sie mehr über den **organisatorischen Rahmen**, innerhalb dessen die länderübergreifenden Aufgaben in die Abiturprüfungen integriert werden. Zudem gibt es noch wertvolle **Hinweise und Tipps** zum Lösen hilfsmittelfreier Prüfungsaufgaben im Allgemeinen und des „länderübergreifenden Aufgabenblocks“ im Speziellen.
Den Hauptteil des Buches bildet eine umfangreiche Sammlung an Übungsaufgaben im Stil der länderübergreifenden Abitur-Aufgaben. Diese **Übungsaufgaben** sollen Ihnen dabei helfen, die **inhaltlichen Schwerpunkte** sowie die **typischen Fragestellungen** zu üben, und können dabei in Einzelfällen im zeitlichen Umfang von den länderübergreifenden Abitur-Aufgaben abweichen.
Zusätzlich enthält das Buch drei **Aufgabenserien**, die Ihnen in Anlehnung an die ersten entsprechenden Aufgaben aus den Abiturprüfungen zeigen, wie der länderübergreifende Aufgabenblock in der kommenden Abiturprüfung aussehen könnte. Mit diesen drei Aufgabenserien können Sie den entsprechenden Teil der **Abiturprüfung simulieren** und so gezielt den Stand Ihrer Prüfungsvorbereitungen überprüfen. (Die Aufgabenserien berücksichtigen die beiden Lehrplanalternativen Analytische Geometrie und Lineare Algebra.)
Zu sämtlichen in diesem Buch enthaltenen Aufgaben finden Sie **vollständige Lösungsvorschläge** inklusive möglicher Lösungsalternativen sowie separate **Hinweise und Tipps zum Lösungsansatz**, die Sie beim selbstständigen Lösen der Aufgaben unterstützen. Um den unterschiedlichen Erwartungshorizonten der beteiligten Bundesländer gerecht zu werden, unterscheiden sich die Lösungsalternativen teilweise nur marginal.
Anhand der Fülle von Aufgaben, die dieses Buch Ihnen bietet, können Sie mit eigenverantwortlichem Üben die nötige **Sicherheit** erlangen und somit den länderübergreifenden Aufgaben im Abitur gelassen entgegensehen.
Alles Gute und viel Erfolg für die Abiturvorbereitung sowie die Abiturprüfung!

P. Bunzel

Peter Bunzel

## Organisatorische Hinweise

*Ausgangslage und Neuerung*

Nachdem die Kultusministerkonferenz durch die „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung" (in der Fassung von 2002) und die „Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife" (2012) bereits zwei große Schritte getan hat, um einer bundesweiten **Vergleichbarkeit der Abiturprüfungen** näher zu kommen, haben inzwischen viele der sechzehn Bundesländer einen dritten Schritt in diese Richtung gemacht: So sind z. B. Bayern, Hamburg, Bremen, Brandenburg, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen, Rheinland-Pfalz, Sachsen und Schleswig-Holstein übereingekommen, beginnend mit der Abiturprüfung 2014 **länderübergreifend** entwickelte Aufgaben oder Aufgabenteile – kurz „länderübergreifende Aufgaben" – in die Prüfungen in den Fächern Deutsch, Englisch und Mathematik zu integrieren. In Schleswig-Holstein enthalten die Abiturprüfungen in Englisch und Mathematik erst seit 2015 länderübergreifende Aufgaben, in Brandenburg seit 2015 (Deutsch); Bremen beteiligt sich seit 2016 (Mathematik, Deutsch) bzw. seit 2017 (Englisch), Rheinland-Pfalz seit 2017. Zudem sind in Hamburg, Mecklenburg-Vorpommern und Niedersachsen nur die Prüfungen auf erhöhtem Anforderungsniveau, in Sachsen bzw. Rheinland-Pfalz nur die Prüfungen auf Leistungskursniveau bzw. im Leistungsfach betroffen.

*Gemeinsame hilfsmittelfreie Prüfungsaufgaben*

Im Fach **Mathematik** bedeutet das konkret, dass innerhalb eines **hilfsmittelfreien Prüfungsteils** ein „länderübergreifender Aufgabenblock" gebildet wird, der entweder durch weitere länderspezifische hilfsmittelfreie Aufgaben ergänzt wird oder bereits den gesamten hilfsmittelfreien Prüfungsteil bildet.[1] In jedem Fall umfasst der länderübergreifende Aufgabenblock genau **vier Aufgaben** mit einem Zeitumfang von **45 Minuten**. Bei jeder dieser Aufgaben können 5 Bewertungseinheiten erreicht werden, insgesamt werden damit für die länderübergreifenden Aufgaben maximal **20 Bewertungseinheiten** vergeben. Die vier ausgewählten Aufgaben decken die vier Bereiche Analysis, Stochastik, Analytische Geometrie und Lineare Algebra ab, wobei die beiden letzteren gemäß den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung" als Alternativen zueinander verstanden werden können (entsprechend den unterschiedlichen Lehrplaninhalten in den betreffenden Ländern). Die Länder Bayern und Mecklenburg-Vorpommern schließen den Bereich Lineare Algebra für die Abiturprüfung explizit aus (da dieser dort nicht im Lehrplan enthalten ist).

**1** In Rheinland-Pfalz ist keine hilfsmittelfreie Prüfungsaufgabe vorgesehen.

*Aufgabenpool 1 und Aufgabenpool 2*

Das Zusammenstellen der bundeslandspezifischen länderübergreifenden Aufgabenblocks läuft wie folgt ab. In Zusammenarbeit der teilhabenden Bundesländer wird zunächst ein Pool an Aufgaben erarbeitet, der wiederum in zwei Bereiche unterteilt ist, den sogenannten Aufgabenpool 1 und den sogenannten Aufgabenpool 2. Alle Aufgaben im **Aufgabenpool 1** decken nur die Anforderungsbereiche I und II[2] ab, alle Aufgaben aus **Aufgabenpool 2** hingegen decken mit mindestens einem Aufgabenteil zudem Anforderungsbereich III[2] ab. In jedem Bundesland wählt die jeweilige Abiturkommission aus diesen beiden Aufgabenpools vier länderübergreifende Abitur-Aufgaben für die landesweite Abiturprüfung aus, drei Aufgaben aus Aufgabenpool 1 und eine Aufgabe aus Aufgabenpool 2.
Da der länderübergreifende Aufgabenblock wie oben beschrieben i. d. R. Teil eines hilfsmittelfreien Prüfungsteils ist, sind die länderübergreifenden Aufgaben ohne elektronische Hilfsmittel wie z. B. Taschenrechner und Software sowie ohne Tabellen- oder Formelsammlung zu bearbeiten. Es dürfen lediglich ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und Zeichengeräte verwendet werden. (Dennoch sind in einigen der Bundesländer davon abweichende Sonderregelungen getroffen worden.)

*Prüfungsvorbereitung*

Zur Vorbereitung auf die insgesamt nach wie vor länderspezifischen Abiturprüfungen im Fach Mathematik empfehlen wir die **Abiturprüfungsbände** des STARK Verlags, die passgenau auf die einzelnen Bundesländer abgestimmt sind. Sie enthalten jeweils eine Sammlung von Original-Prüfungsaufgaben der letzten Jahre mit schülergerechten Musterlösungen. Die Bände sind für die folgenden Bundesländer erhältlich: Bayern (Best.-Nr. 95001), Hamburg (Best.-Nr. 25000), Mecklenburg-Vorpommern (Best.-Nr. 135000), Niedersachsen (erhöhtes Anforderungsniveau: Best.-Nr. 35000), Rheinland-Pfalz (Best.-Nr. 75000), Sachsen (LK: Best.-Nr. 145000), Schleswig-Holstein (Best.-Nr. 15000).
Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abiturprüfung bekannt gegeben werden, finden Sie aktuelle Informationen dazu im Internet unter:
www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

2 Die Anforderungsbereiche I, II und III sind in den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife“ definiert.

## Tipps für Vorbereitung und Prüfungssituation

### Zeitliche Planung

*Prüfungssituation*

Zur Bearbeitung der vier länderübergreifenden Abitur-Aufgaben sind in der Prüfung 45 Minuten vorgesehen. Eine der vier Aufgaben ist anspruchsvoller als die drei anderen Aufgaben, da durch sie im Gegensatz zu den drei anderen Aufgaben auch der Anforderungsbereich III abgedeckt wird. Für die Zeiteinteilung können Sie sich daher nach folgender Faustregel richten: Der länderübergreifende Aufgabenblock umfasst drei Aufgaben à 10 Minuten und eine Aufgabe à 15 Minuten.

*Vorbereitung*

Sie sollten die **Übungsaufgaben zu Aufgabenpool 1** in aller Regel also innerhalb von je 10 Minuten lösen können, die **Übungsaufgaben zu Aufgabenpool 2** in aller Regel innerhalb von je 15 Minuten. Für das Bearbeiten der **drei Aufgabenserien** sollten Sie jeweils nicht mehr als 45 Minuten benötigen.
Sicher werden Sie zu Beginn Ihrer Prüfungsvorbereitung mehr Zeit als diese vorgegebenen Richtwerte benötigen. Durch kontinuierliches Üben sollte sich Ihr Zeitbedarf jedoch immer weiter den Richtwerten annähern. Insbesondere sollten Sie gegen Ende der Vorbereitungszeit tatsächlich in der Lage sein, eine Aufgabenserie in ca. 45 Minuten zu lösen. (Es empfiehlt sich daher, die Aufgabenserien bis zum Ende der Vorbereitungsphase „aufzuheben“.)

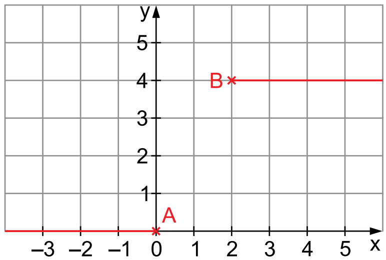
### Liste der Operatoren

Operatoren sind die Schlüsselwörter innerhalb der Aufgabenstellungen v. a. von Prüfungsaufgaben. Sie sagen Ihnen eindeutig, was Sie zu tun haben (Arbeitsauftrag) und in welchem Umfang Sie dies tun müssen (erwartete Leistung). Um Aufgaben zielgerichtet anzugehen und sicher und effizient zu lösen, ist es daher sehr hilfreich, sich im Rahmen der Prüfungsvorbereitung mit den für Prüfungsaufgaben infrage kommenden Operatoren vertraut zu machen.
Dies ermöglicht Ihnen nachfolgende Liste, die die für hilfsmittelfreie Prüfungsaufgaben relevanten Operatoren zusammenfasst und jeweils kurz erklärt, was sie für die Lösung und den Lösungsumfang einer Aufgabe bedeuten. Unter „Beispiele“ wird, soweit möglich, unter Angabe von Seitenzahl und betreffender Aufgabe bzw. Teilaufgabe (in Klammern) auf eine Auswahl von passenden Übungsaufgaben verwiesen. Zudem ist angegeben, zu welchen Anforderungsbereichen der betreffende Operator gehört. Da aber die drei Anforderungsbereiche nicht immer scharf voneinander getrennt werden können, ist diese Zuordnung unter entsprechendem Vorbehalt zu betrachten.

# Länderübergreifendes Abitur
# Aufgabenpool 1

## Analysis

**Aufgabe 1** In der Skizze sind zwei geradlinige Gleise abgebildet, die in den Punkten A bzw. B enden. Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden.




a) Beurteilen Sie, welchen Grad eine ganzrationale Funktion mindestens haben muss, die dieses Gleisstück beschreibt.

b) Bestimmen Sie eine passende ganzrationale Funktion f.

**Aufgabe 2** Bestimmen Sie jeweils die Gleichung einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften.

a) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion mit drei verschiedenen Nullstellen.

b) Die Funktion f ist eine gebrochenrationale Funktion, deren Funktionswerte alle größer als 1 sind.

c) Die Funktion f ist eine Exponentialfunktion mit $f(x) \to 2$ für $x \to \infty$.

d) Die Funktion f ist eine Wurzelfunktion, deren Steigung an der Stelle $x = 1$ den Wert 2 hat.

**Aufgabe 3** Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0|0)$ ein Tiefpunkt des Graphen von f ist.

b) Der Graph von f schließt mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie, wie groß der Inhalt des Flächenstücks ist, das oberhalb der x-Achse liegt.

**Aufgabe 4** Der Graph $G_f$ einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist symmetrisch zur y-Achse, hat einen Hochpunkt $H(0|-1)$ und einen Tiefpunkt $T(1|-2)$. Untersuchen Sie, was ohne Bestimmung des Funktionsterms über die Anzahl der Nullstellen, die Anzahl der Extrempunkte und die Anzahl der Wendepunkte von f gesagt werden kann, und fertigen Sie eine Skizze des Graphen $G_f$ an.

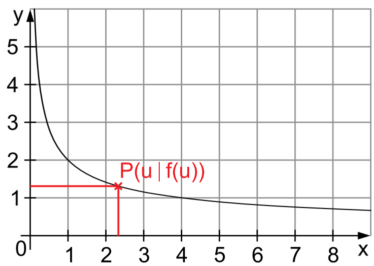
**Aufgabe 5** Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion f mit folgender Eigenschaft:
Der Graph von f ist eine Parabel (vom Grad 2), die mit der x-Achse eine Fläche vom Inhalt 36 FE einschließt.

**Aufgabe 6** Gegeben sind der Graph $G_h$ der gebrochenrationalen Funktion $h(x) = \frac{4}{x^2}$ und der Punkt $B(2\,|\,h(2))$.
Die Tangente t an $G_h$ im Punkt B schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung, durch die die Tangente t beschrieben werden kann.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

**Aufgabe 7** Gegeben ist für $x > 0$ die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.
Das rot eingezeichnete Rechteck rotiert um die x-Achse, wodurch ein Zylinder entsteht.
Zeigen Sie, dass das Volumen des Zylinders nicht von u abhängt.




**Aufgabe 8** a) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion f mit den folgenden Eigenschaften: f ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, der Graph von f besitzt einen Tiefpunkt $T(-2\,|\,-8)$ und einen Hochpunkt $H(0\,|\,0)$.

b) Skizzieren Sie ohne weitere Berechnungen den Graphen $G_f$ von f.

## Hinweise und Tipps

**Teilaufgabe 1 a**

Übersetzen Sie den Begriff „knickfrei“ in die Sprache der Analysis.
Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem Grad einer ganzrationalen Funktion und der maximalen Anzahl ihrer Extremstellen her.

**Teilaufgabe 1 b**

Wählen Sie eine ganzrationale Funktion mit dem niedrigsten möglichen Grad.
Stellen Sie eine allgemeine Funktionsgleichung solch einer Funktion auf.
Übersetzen Sie alle Bedingungen, die die Funktion f erfüllen muss, in mathematische Sprache. Sollten Sie Probleme beim Identifizieren der Bedingungen an f haben, überlegen Sie zuerst, welcher Zusammenhang zwischen dem Grad einer ganzrationalen Funktion und der Anzahl der für die (eindeutige) Bestimmung eines Funktionsterms dieser Funktion nötigen Bedingungen – die voneinander verschieden und widerspruchsfrei sein müssen – besteht.
Leiten Sie mithilfe der Bedingungen aus dem allgemeinen Funktionsterm den gesuchten her.

**Teilaufgabe 2 a**

Unter Verwendung der Linearfaktorzerlegung können Sie direkt einen Funktionsterm einer Funktion mit beliebigen gegebenen Nullstellen aufstellen.

**Teilaufgabe 2 b**

Für den Ansatz genügt es, als Zählerpolynom eine Konstante und als Nennerpolynom ein Polynom mit nur einem Koeffizienten ungleich null zu wählen.
Überlegen Sie, was für das Quadrat (oder allgemein für gerade ganzzahlige Potenzen) einer reellen Zahl stets gilt.
Um damit die geforderte Bedingung zu erfüllen, bietet sich eine Verschiebung des Graphen der gewählten Funktion in y-Richtung an.

**Teilaufgabe 2 c**

*Die* Exponentialfunktion hat einen Grenzwert für $x \to -\infty$. Spiegelung ihres Graphen an der x-Achse und Verschiebung ihres Graphen in y-Richtung liefern eine mögliche Funktionsgleichung.

**Teilaufgabe 2 d**

Wählen Sie als Ansatz für den Funktionsterm die Quadratwurzel $\sqrt{x}$.
Durch Streckung bzw. Stauchung des Funktionsgraphen in y-Richtung kann der Wert der Steigung an einer Stelle angepasst werden.

## Lösungsvorschlag

**Aufgabe 1**

a) Der Graph einer ganzrationalen Funktion, die dieses Gleisstück beschreibt, muss mindestens zwei Punkte mit waagerechter Tangente besitzen (nämlich $A(0|0)$ und $B(2|4)$). Also muss die Ableitung der zugehörigen Funktion mindestens zwei Nullstellen und damit mindestens den Grad 2 haben. Die Funktion selbst muss dazu mindestens den Grad 3 haben.

b) **Allgemeine Funktionsgleichung mit Ableitung**
Gemäß dem Ergebnis aus Aufgabenteil a wählt man im einfachsten Fall eine ganzrationale Funktion dritten Grades.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d;\ \ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

**Bedingungen**
Um den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion dritten Grades eindeutig bestimmen zu können, müssen vier verschiedene Bedingungen an diese Funktion bekannt sein.
Die vier gegebenen Bedingungen an die Funktion f lauten (mit ihrer Übersetzung in mathematische Sprache):

$A \in G_f \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

$B \in G_f \quad \Rightarrow \quad f(2) = 4$

knickfrei in A $\quad \Rightarrow \quad f'(0) = 0$

knickfrei in B $\quad \Rightarrow \quad f'(2) = 0$

**Parameterwerte bestimmen**

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \ \Leftrightarrow \ d = 0 \\ f'(0) = 0 \ \Leftrightarrow \ c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(x) = ax^3 + bx^2;\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} f(2) = 4 & \Leftrightarrow \ 8a + 4b = 4 \ (*) & \\ f'(2) = 0 & \Leftrightarrow \ 12a + 4b = 0 & \Leftrightarrow \ 4b = -12a \end{array}\right.$$

$$4b = -12a \ \text{ in } (*)\text{:}\ 8a - 12a = 4 \ \Leftrightarrow \ a = -1$$

$$\Rightarrow \ b = 3$$

**Parameterwerte einsetzen**

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

**Aufgabe 2**

a) **Nullstellen**
Hier gibt es unendlich viele Möglichkeiten, eine einfache ist z. B. eine Funktion mit den Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$.

**Funktionsgleichung**
Der Funktionsterm lässt sich unter Verwendung der Linearfaktorzerlegung mithilfe der Nullstellen direkt angeben:
$f(x) = x(x-1)(x-2)$

b) **Ansatz**

$$x^2 \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} + 1 > 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

**Funktionsgleichung**

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2+1}{x^2}$$

*Bemerkung:* Die Addition von 1 zum Funktionsterm einer Funktion entspricht der Verschiebung des zugehörigen Funktionsgraphen um eine Einheit in positive y-Richtung.
Auf die gleiche Weise lässt sich für jede Potenz von x mit negativer gerader Hochzahl eine Lösung angeben.

c) **Ansatz**

$$e^{x} \to 0 \quad \text{für } x \to -\infty \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{-x} + 2 \to 2 \quad \text{für } x \to \infty$$

**Funktionsgleichung**

$f(x) = e^{-x} + 2$

*Bemerkung:* Wird im Funktionsterm einer Funktion die Funktionsvariable durch ihr (–1)-Faches ersetzt, so entspricht dies einer Spiegelung des Funktionsgraphen an der y-Achse; die Addition von 2 zum Funktionsterm entspricht der Verschiebung des Graphen um zwei Einheiten in positive y-Richtung.
Die Funktion $f(x) = e^{-x} + 2$ ist eine Zerfallsfunktion. Ihr Graph ist in nachfolgender Abbildung links zu sehen. Die „zugehörige" Wachstumsfunktion $B(x) = 2 - e^{-x}$ erfüllt ebenfalls die gegebenen Bedingungen. Ihr Graph ist in der nachfolgenden Abbildung rechts zu sehen.