



MEHR
ERFAHREN

STARK in KLAUSUREN

Prozesse und Matrizen

Udo Mühlenfeld

STARK



MEHR
ERFAHREN

STARK in KLAUSUREN

Prozesse und Matrizen

Udo Mühlenfeld

STARK

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

So arbeiten Sie mit diesem Buch

Strukturierte Darstellung von Daten	1
1 Materialverflechtungen	1
1.1 Darstellung von Daten in Matrizen	1
1.2 Verflechtungsgraphen und Bedarfsmatrizen	5
Klausur 1	10
Rechnen mit Matrizen	13
2 Elementare Rechenoperationen	13
2.1 Vervielfachen einer Matrix, Addieren und Subtrahieren von Matrizen	13
2.2 Multiplizieren einer Matrix mit einem Vektor	18
2.3 Multiplizieren von Matrizen	22
3 Weitere Rechenoperationen	27
3.1 Gesetze beim Addieren und Multiplizieren von Matrizen	27
3.2 Einheitsmatrix und inverse Matrix	31
4 Matrizenrechnung mit dem GTR	39
Klausur 2	45
Lineare und mehrstufige Prozesse	47
5 Beschreibung von Prozessen	47
5.1 Prozessdiagramme	47
5.2 Prozessmatrizen	52
5.3 Multiplizieren einer Matrix mit einem Vektor	57
5.4 Multiplizieren von Matrizen	61

Fortsetzung nächste Seite



Inhaltsverzeichnis

6	Langfristige Entwicklungen	67
6.1	Zyklische Prozesse	67
6.2	Stationäre Verteilungen	72
6.3	Fixvektoren	77
6.4	Grenzmatrizen	81
	Klausur 3	85
	Klausur 4	87
	Lösungen	89
	Strukturierte Darstellung von Daten	89
	Klausur 1	94
	Rechnen mit Matrizen	97
	Klausur 2	121
	Lineare und mehrstufige Prozesse	127
	Klausur 3	156
	Klausur 4	160

Autor: Udo Mühlenfeld



Auf einen Blick!

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

die **Matrizenrechnung** ruht im Mathematikunterricht auf zwei tragenden Säulen. Innermathematisch stellen Matrizen mathematische Objekte dar, die vor mehr als 2 000 Jahren in China erstmals zur Darstellung linearer Gleichungssysteme eingeführt wurden. Als Erfinder der Matrizenrechnung gilt Arthur Cayley (1821–1895), der die Rechenoperationen und Gesetzmäßigkeiten, wie sie vom Rechnen mit reellen Zahlen bekannt sind, für Matrizen definierte bzw. untersuchte.

Eine zweite Säule bildet, gerade auch mit Blick auf die Motivation im Unterricht, eine Fülle von **Alltagssituationen**, in denen das Konzept der Matrizen hilft, Probleme zu lösen: beispielsweise die Berechnung des Materialbedarfs bei mehrstufigen Produktionsprozessen, der Einfluss unterschiedlicher Faktoren auf die Entwicklung von Tierpopulationen oder auch die langfristige Entwicklung des Konsumverhaltens. In diesen Kontextsituationen wird auch deutlich, welche Hilfe ein **GTR** bei der Bewältigung realer Daten bieten kann.

Auf beiden Säulen bauen auch die Aufgaben auf, mit denen Sie sich im Rahmen der **Abiturprüfung** beschäftigen. Dieses Buch hilft Ihnen, Ihr Wissen und Ihre Fertigkeiten in diesem wichtigen Themengebiet zu **vertiefen** und zu **testen**.

- Anschauliche **Schritt-für-Schritt-Erklärungen** und konkrete **Rechenbeispiele** vermitteln die Lerninhalte so, dass Sie sie verstehen und anwenden können.
- Zahlreiche **Aufgaben** helfen Ihnen dabei, den neu gelernten Stoff zu festigen.
- **Klausuren** zur Selbstüberprüfung geben Ihnen einen Überblick über Ihren aktuellen Leistungsstand und die Möglichkeit zur Kontrolle Ihres Lernerfolgs.
- Ausführliche **Lösungsvorschläge** sorgen dafür, dass Sie Ihre Lösungsansätze und Rechenwege selbstständig überprüfen und verbessern können.

So können Sie **stark in** Ihre nächsten **Klausuren** gehen!

Viel Spaß bei der Vorbereitung und viel Erfolg in der Klausur wünscht Ihnen

Udo Mühlenfeld

Udo Mühlenfeld



5.4 Multiplizieren von Matrizen

Bei vielen Prozessen, wie Populationsentwicklungen, ist nicht nur die unmittelbar nachfolgende Verteilung von Interesse, sondern auch die Entwicklung in einem längeren Zeitraum, um z. B. langfristige Aussagen über die Größe der Wildschweinpopulation zu erhalten und mögliche Gegenmaßnahmen zum Schutze der Landwirtschaft einleiten zu können und deren Wirkung rechnerisch zu überprüfen. Ebenso ist die **langfristige Entwicklung** des Käuferverhaltens für den Handel wichtig, um durch entsprechende Bevorratung die Kosten für die Lagerhaltung zu optimieren. Betreiber von Mietwagenstationen und Speditionen wollen wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ihre Fahrzeuge an welchen Standorten befinden, um gegebenenfalls durch einen entsprechenden Ausgleich dafür zu sorgen, dass vor Ort eine optimale Auslastung gewährleistet ist.

WISSEN

Sind zu einem Übergangsprozess ein Zustandsvektor \vec{v}_0 , der den Anfangszustand beschreibt, und die Prozessmatrix P gegeben, können die **zukünftigen Verteilungen** sowohl **schrittweise** als auch mithilfe der **Matrixpotenzen** berechnet werden.

Schrittweise Berechnung	Verwendung von Matrixpotenzen
$P \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_1$	$P \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_1$
$P \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2$	$P^2 \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_2$
$P \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_3$	$P^3 \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_3$
...	...
$P \cdot \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1}$	$P^{n+1} \cdot \vec{v}_0 = \vec{v}_{n+1}$

BEISPIEL

- 1 Die Anfangspopulation einer Wildschweinrotte besteht aus 30 Frischlingen, 3 Überläufern und 3 älteren Tieren. Für die Veränderungen der Population von Generation zu Generation kann die im **Beispiel 1** im Abschnitt 5.2 aufgestellte Prozessmatrix $P = \begin{pmatrix} 1,47 & 3,17 & 3,80 \\ 0,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0,21 & 0,88 \end{pmatrix}$ vorausgesetzt werden.

Berechnen Sie die Zusammensetzung der Wildschweinpopulation in der dritten Generation sowohl schrittweise als auch mithilfe einer Matrixpotenz.



Lösung:

Die Anfangspopulation wird durch folgenden Zustandsvektor beschrieben:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Veränderung von der ersten zur zweiten und von der zweiten zur dritten Generation kann **schrittweise** durch Multiplikation mit der Prozessmatrix P berechnet werden:

$$P \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1,47 & 3,17 & 3,80 \\ 0,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0,21 & 0,88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65,01 \\ 14,1 \\ 3,27 \end{pmatrix} \quad \text{erster Rechenschritt}$$

$$P \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1,47 & 3,17 & 3,80 \\ 0,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0,21 & 0,88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 65,01 \\ 14,1 \\ 3,27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152,6877 \\ 30,5547 \\ 5,8386 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 153 \\ 31 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{zweiter Rechenschritt}$$

Da das Zwischenergebnis des ersten Rechenschritts für die Beantwortung der Fragestellung nicht relevant ist und es nur auf das Ergebnis des zweiten Rechenschritts ankommt, kann die Berechnung auch in einem Schritt mit der **Matrixpotenz** erfolgen:

$$P \cdot [P \cdot \vec{v}_0] = P^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1,47 & 3,17 & 3,80 \\ 0,47 & 0 & 0 \\ 0 & 0,21 & 0,88 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152,6877 \\ 30,5547 \\ 5,8386 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 153 \\ 31 \\ 6 \end{pmatrix}$$

↑
erster Rechenschritt
zweiter Rechenschritt

In der dritten Generation leben etwa 153 Frischlinge, 31 Überläufer und 6 ältere Tiere in der Wildschweinrotte.

2 Die zum **Beispiel 2** im Abschnitt 5.1 zugehörige Prozessmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,4 & 0,3 & 0,08 \\ 0,1 & 0,29 & 0,12 & 0,36 \\ 0,05 & 0,15 & 0,46 & 0,22 \\ 0,2 & 0,16 & 0,12 & 0,34 \end{pmatrix}$$

gibt Auskunft über die Veränderung der Anzahl

der Segways an den vier Ausleihstationen (Theresienwiese, Marienplatz, Deutsches Museum und Hauptbahnhof) innerhalb eines Tages.

Nehmen Sie an, dass die am 1. Juli zur Verfügung stehenden Segways gleichverteilt sind auf die vier Stationen, und berechnen Sie die Verteilung der Segways

- a nach einer Woche,
- b am Ende des Monats Juli.



Lösung:

- a Die Gleichverteilung der Segways am Anfang wird durch den Zustands-

vektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$ beschrieben. Die Verteilung der Segways nach einer

Woche berechnet sich durch:

$$P^7 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,4 & 0,3 & 0,08 \\ 0,1 & 0,29 & 0,12 & 0,36 \\ 0,05 & 0,15 & 0,46 & 0,22 \\ 0,2 & 0,16 & 0,12 & 0,34 \end{pmatrix}^7 \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung erfolgt mit dem GTR:

Mat F
 $\begin{bmatrix} 0,65 & 0,4 & 0,3 & 0,08 \\ 0,1 & 0,29 & 0,12 & 0,36 \\ 0,05 & 0,15 & 0,46 & 0,22 \\ 0,2 & 0,16 & 0,12 & 0,34 \end{bmatrix}$
 Mat | Mat>Lst | Det | Trn | Augment | ▶

Vct C
 $\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{bmatrix}$
 Vct | DotP() | CrossP() | Angle() | UnitV() | ▶

Mat F⁷ × Vct C
 $\begin{bmatrix} 0,4213491305 \\ 0,194242321 \\ 0,1774164243 \\ 0,2069921241 \end{bmatrix}$
 Vct | DotP() | CrossP() | Angle() | UnitV() | ▶

Nach einer Woche befinden sich ca. 42 % der Segways an der Theresienwiese, 19 % am Marienplatz, 18 % am Deutschen Museum und 21 % am Hauptbahnhof.

- b Da der Monat Juli 31 Tage besitzt, berechnet sich die Verteilung der Segways am Ende des Monats durch:

$$P^{31} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,4 & 0,3 & 0,08 \\ 0,1 & 0,29 & 0,12 & 0,36 \\ 0,05 & 0,15 & 0,46 & 0,22 \\ 0,2 & 0,16 & 0,12 & 0,34 \end{pmatrix}^{31} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung mit dem GTR zeigt, dass sich gerundet die gleiche Verteilung wie in Teilaufgabe a ergibt.

Mat F³¹ × Vct C
 $\begin{bmatrix} 0,4213586163 \\ 0,1942880072 \\ 0,1773274667 \\ 0,2070259097 \end{bmatrix}$
 Vct | DotP() | CrossP() | Angle() | UnitV() | ▶



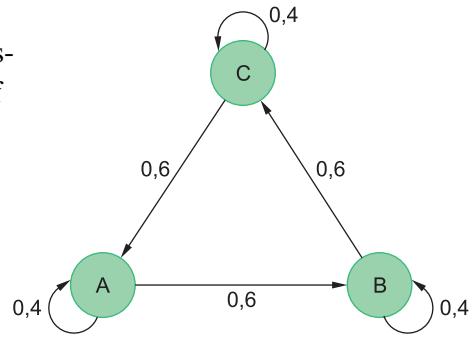
- 57** Gegeben sind die stochastische Matrix $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, mit der die Veränderungen zwischen drei verschiedenen Zuständen beschrieben werden, und der Zustandsvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$, der eine Anfangsverteilung auf diese Zustände darstellt.

- Interpretieren Sie die Zahlenwerte in der ersten Zeile der Prozessmatrix.
- Berechnen Sie \vec{v}_2 sowohl schrittweise als auch mithilfe einer Matrixpotenz.
- Berechnen Sie die Matrixpotenz P^5 und interpretieren Sie die Zahlenwerte in der ersten Zeile dieser Matrix.

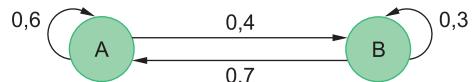
- 58** Gegeben sind das rechts abgebildete Prozessdiagramm sowie eine Anfangsverteilung auf die Zustände A, B und C, die durch den folgenden Zustandsvektor beschrieben wird:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die späteren Zustandsverteilungen \vec{v}_3 und \vec{v}_6 .

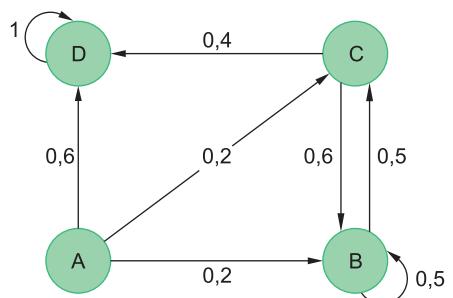


- 59** Gegeben ist das rechts abgebildete Prozessdiagramm.



- Geben Sie die zugehörige Prozessmatrix P an und berechnen Sie die Matrixpotenz P^2 .
- Der Wert in der ersten Zeile und ersten Spalte der Matrixpotenz P^2 ist $a_{11}=0,64$ und beschreibt die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang des Prozesses von A nach A in zwei Schritten.
Erläutern Sie anhand des Prozessdiagramms, aus welchen Wahrscheinlichkeiten sich dieser Wert zusammensetzt.

- 60** Berechnen Sie für einen stochastischen Prozess mit dem rechts abgebildeten Prozessdiagramm die Zustandsverteilung nach 3 bzw. 6 Schritten, wenn sich der Prozess zu Beginn im Zustand A befindet.



56

Die Prozessmatrix ist nicht geeignet, die Wählerwanderung über einen längeren Zeitraum zu beschreiben, da die politischen Parteien bestrebt sind, durch entsprechende Maßnahmen (z. B. Programmergänzungen, Wechsel der Kandidaten, politischer Kurswechsel, ...) den Weggang der Wähler zu stoppen oder Nichtwähler zu aktivieren, wodurch sich Übergangswahrscheinlichkeiten ändern werden.

57

- a** Durch die Werte in der ersten Zeile der Prozessmatrix sind die Wahrscheinlichkeiten für die Zustandswechsel hin zum Zustand Z_1 gegeben: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % bleibt der Prozess im Zustand Z_1 , vom Zustand Z_2 findet kein Wechsel in den Zustand Z_1 statt und ein Übergang vom Zustand Z_3 in den Zustand Z_1 erfolgt mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 %.
- b** *Vorgehensweise 1:* Im ersten Schritt wird zunächst $\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0$ berechnet, im zweiten Schritt dann $\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1$.

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.27 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.27 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.296 \\ 0.204 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Vorgehensweise 2: Mithilfe der Matrixpotenz wird $\vec{v}_2 = P^2 \cdot \vec{v}_0$ direkt berechnet:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^2 \times \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.3 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.296 \\ 0.204 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Bei beiden Vorgehensweisen lautet das Ergebnis $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0,296 \\ 0,204 \\ 0,5 \end{pmatrix}$.

- c** Zunächst wird die Matrixpotenz P^5 berechnet:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 0.312 & 0.312 & 0.313 \\ 0.188 & 0.188 & 0.187 \\ 0.500 & 0.500 & 0.500 \end{bmatrix}$$

Die Werte in der ersten Zeile geben die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass ein Wechsel in den Zustand Z_1 erfolgt. Man erkennt, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten von jedem der drei Zustände zum Zustand Z_1 etwa gleich sind.



Lösungen

134

- 58** Die Prozessmatrix wird aus dem Prozessdiagramm abgeleitet:

$$P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

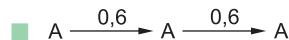
Die gesuchten Zustandsverteilungen werden am einfachsten mit den zugehörigen Matrixpotenzen und dem GTR ermittelt:

Es gilt: $\vec{v}_3 = P^3 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 25,84 \\ 30,08 \\ 24,08 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_6 = P^6 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 27,16 \\ 26,27 \\ 26,57 \end{pmatrix}$

- 59 a** Die Prozessmatrix hat die Gestalt $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,7 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Als Matrixpotenz ergibt sich $P^2 = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,63 \\ 0,36 & 0,37 \end{pmatrix}$.

- b** Es gibt zwei Wege, im Prozessdiagramm in zwei Schritten von A nach A zu gelangen:



Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $0,6 \cdot 0,6 = 0,36$.



Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $0,4 \cdot 0,7 = 0,28$.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist $0,36 + 0,28 = 0,64$ und entspricht dem Wert $a_{11} = 0,64$ in der Matrixpotenz P^2 .

- 60** Zunächst wird anhand des Prozessdiagramms die Prozessmatrix aufgestellt:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Tatsache, dass sich der Prozess zu Beginn im Zustand A befindet, lässt sich durch folgenden Zustandsvektor beschreiben:

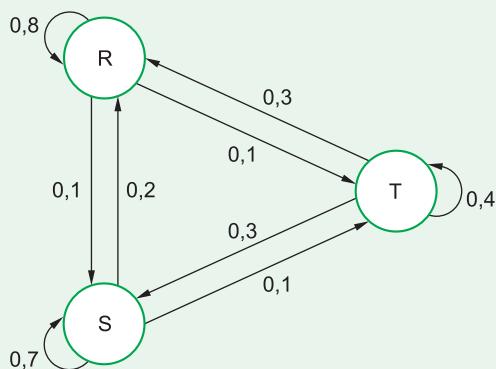
$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfe deine Ergebnisse!

Klausur 3

1

a
(2)



b
(3) Die Anfangsverteilung auf die Zustände R, S und T wird durch folgenden Vektor beschrieben:

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,6 \\ 0,15 \end{pmatrix}$$

Die Zustandsverteilungen für den nächsten und übernächsten Zeitpunkt ergeben sich durch Multiplikation mit der Prozessmatrix.

Für die Berechnungen kann der GTR eingesetzt werden.

Verteilung für den nächsten Zeitpunkt:

$$\vec{v}_1 = P \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,6 \\ 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,365 \\ 0,49 \\ 0,145 \end{pmatrix}$$

Math	Rad	Fix3	d/c	Real
[.8 .2 .3]	x	[.25]		
[.1 .7 .3]	x	[.6]		
[.1 .1 .4]	x	[.15]		
[0.365]				
[0.490]				
[0.145]				
2x2	3x3	mxn	2x1	3x1

Verteilung für den übernächsten Zeitpunkt:

$$\vec{v}_2 = P \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,365 \\ 0,49 \\ 0,145 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,434 \\ 0,423 \\ 0,144 \end{pmatrix}$$

Math	Rad	Fix3	d/c	Real
[.8 .2 .3]	x	[.365]		
[.1 .7 .3]	x	[.49]		
[.1 .1 .4]	x	[.145]		
[0.434]				
[0.423]				
[0.144]				
2x2	3x3	mxn	2x1	3x1

oder

$$\vec{v}_2 = P^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,6 \\ 0,15 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,434 \\ 0,423 \\ 0,144 \end{pmatrix}$$

Math	Rad	Fix3	d/c	Real
[.8 .2 .3]	²	x	[.25]	
[.1 .7 .3]	x	[.6]		
[.1 .1 .4]	x	[.15]		
[0.434]				
[0.423]				
[0.144]				
2x2	3x3	mxn	2x1	3x1



Überprüfe deine Ergebnisse!

c Die Berechnung der Matrixpotenz P^3 erfolgt mit dem GTR:

$$(2) \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0,627 & 0,411 & 0,474 \\ 0,234 & 0,450 & 0,360 \\ 0,139 & 0,139 & 0,166 \end{pmatrix}$$

In der Matrixpotenz P^3 stehen die Wahrscheinlichkeiten für die Zustandsänderungen des Prozesses in drei Schritten, also für den dritten Beobachtungszeitpunkt.

Math	Deg	Fix3	d/c	Real
.8	.2	.3		
.1	.7	.3		
.1	.1	.4		

$\begin{bmatrix} 0,627 & 0,411 & 0,474 \\ 0,234 & 0,450 & 0,360 \\ 0,139 & 0,139 & 0,166 \end{bmatrix}$
$2 \times 2 3 \times 3 m \times n 2 \times 1 3 \times 1 \Rightarrow$

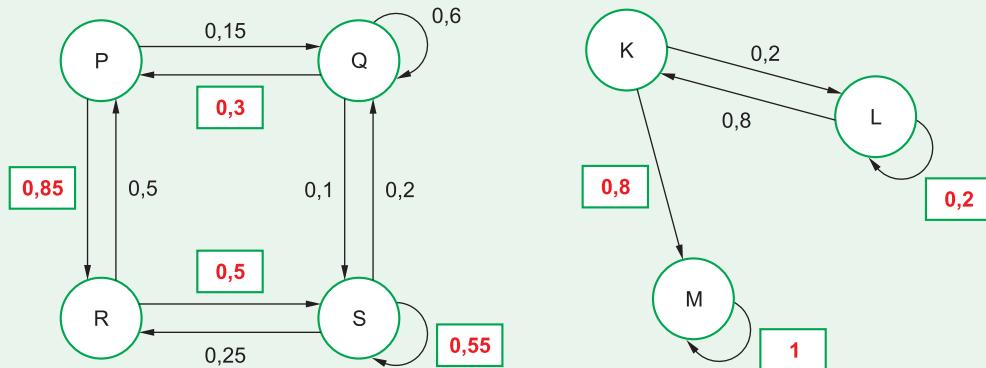
d $a_{11}=0,627$: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Prozess zu Beginn und nach drei Schritten wieder im Zustand R befindet, beträgt 62,7 %.

$a_{13}=0,474$: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Prozess zu Beginn im Zustand T und nach drei Schritten im Zustand R befindet, liegt bei 47,4 %.

$a_{31}=0,139$: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Prozess zu Beginn im Zustand R und nach drei Schritten im Zustand T befindet, liegt bei 13,9 %.

2

a Da es sich um stochastische Prozesse handelt, müssen alle Summenwerte der Zahlen an den Pfeilen, die von einem Zustand abgehen, eins ergeben.



Von P nach R: $1 - 0,15 = \textcolor{red}{0,85}$

Von Q nach P: $1 - 0,1 - 0,6 = \textcolor{red}{0,3}$

Von R nach S: $1 - 0,5 = \textcolor{red}{0,5}$

Von S nach S: $1 - 0,25 - 0,2 = \textcolor{red}{0,55}$

Von K nach M: $1 - 0,2 = \textcolor{red}{0,8}$

Von L nach L: $1 - 0,8 = \textcolor{red}{0,2}$

Von M nach M: $1 - 0 = \textcolor{red}{1}$





© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK



© STARK Verlag

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.