

2020 MSA

Mittlerer Schulabschluss



**MEHR
ERFAHREN**

Schleswig-Holstein

Mathematik

- + Basiswissen mit Übungen
- + Formelsammlung
- + Original-Prüfungen



STARK

Inhalt

Vorwort

Hinweise und Tipps

1	Keine Angst vor dem MSA	I
2	Dein persönlicher Zeitplan	I
3	Hinweise zur Prüfung	II
4	Deine persönliche Generalprobe	III
5	Lernplaner	IV
6	Formelsammlung	VI

Training Grundwissen

1	Wiederholung Grundlagen	1
1.1	Terme und Termumformungen	1
	Termumformungen	2
	Bruchterme	6
1.2	Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen	8
	Lineare Gleichungen	8
	Lineare Ungleichungen	10
	Textaufgaben	11
1.3	Proportionale und antiproportionale Zuordnungen	12
	Proportionale Zuordnungen	12
	Nicht proportionale Zuordnungen	13
	Lösen von proportionalen Zuordnungen	13
	Antiproportionale Zuordnungen	14
	Lösen von antiproportionalen Zuordnungen	15
1.4	Prozentrechnung und Zinsrechnung	17
	Prozentrechnung	17
	Zinsrechnung	21
1.5	Umrechnungen von Größen	22
1.6	Dreiecke und Vierecke	25
1.7	Kreis	29
	Kreisring	30
	Kreisbögen und Kreissektor	31
1.8	Potenzen und Wurzeln	33
	Potenzen	33
	Wurzeln	36

2	Lineare Funktionen – Lineare Gleichungssysteme	37
2.1	Allgemeine Funktion	37
2.2	Lineare Funktionen	39
	Zeichnen von Graphen	40
	Verlauf von Graphen linearer Funktionen	42
2.3	Lineare Gleichungssysteme	44
	Grafisches Lösungsverfahren	45
	Rechnerische Lösungsverfahren	46
	Lösen von Textaufgaben mit zwei Unbekannten	49
3	Quadratische Funktionen und Gleichungen	51
3.1	Quadratische Funktionen	51
	Die Normalparabel	51
	Verschiebung der Normalparabel längs der Koordinatenachsen	52
	Streckung der Normalparabel	53
	Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion	54
	Bestimmung des Scheitelpunkts einer Parabel	55
	Nullstellen einer quadratischen Funktion	59
3.2	Quadratische Gleichungen	60
	Reinquadratische Gleichungen $x^2 - q = 0$	60
	Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px = 0$	61
	Gemischt quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$	62
	Der Satz von Vieta	65
4	Ähnlichkeit und Strahlensätze	66
4.1	Maßstab	66
4.2	Vergrößern und Verkleinern von Figuren	68
4.3	Strahlensätze	72
5	Sätze am rechtwinkligen Dreieck	75
5.1	Der Satz des Pythagoras	75
5.2	Der Kathetensatz	77
6	Trigonometrie	81
6.1	Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck	81
6.2	Berechnungen an allgemeinen Dreiecken – Sinus- und Kosinussatz	87
	Sinusatz	87
	Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks	89
	Kosinussatz	90
	Sinusatz oder Kosinussatz – das ist die Frage	92
7	Körper	94
7.1	Darstellungen von Körpern	94
7.2	Masseberechnungen an Körpern	95
7.3	Gerade Prismen	95
7.4	Pyramiden	101

7.5	Kegel	103
7.6	Kugeln	105
8	Daten und Zufall	108
8.1	Statistische Grundbegriffe	108
	Daten erfassen	108
	Daten reduzieren (zusammenfassen)	109
	Daten darstellen	111
	Grafische Darstellungen analysieren	114
8.2	Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung	120
8.3	Schätzen von Wahrscheinlichkeit mithilfe der relativen Häufigkeit	121
8.4	Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit von Zufallsexperimenten	122
8.5	Mehrstufige Zufallsexperimente	125
9	Wachstum und Zerfall	130
9.1	Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall	130
9.2	Exponentialfunktionen	132
9.3	Zinseszins	134
9.4	Lineares und exponentielles Wachstum im Vergleich	136
10	Vermischte Aufgaben	139

Original-Abschlussprüfungen

Mittlerer Schulabschluss 2017.....	2017-1
Mittlerer Schulabschluss 2018.....	2018-1
Mittlerer Schulabschluss 2019.....	2019-1



Dein Coach zum Erfolg: Mit dem **Interaktiven Training** kannst du online mit vielen zusätzlichen interaktiven Aufgaben zu allen prüfungsrelevanten Kompetenzbereichen trainieren.

Die **interaktiven Aufgaben** sind im Buch mit diesem Button gekennzeichnet. Am besten gleich ausprobieren! 
Ausführliche Infos inkl. Zugangscode findest du auf den **Farbseiten** vorne in diesem Buch.

Autorinnen und Autoren:

Jörg Collenburg, Doris Cremer, Heike Ohrt, Dietmar Steiner

Vorwort

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit vorliegendem Buch kannst du dich langfristig und nachhaltig auf die zentrale **Prüfung zum mittleren Schulabschluss in Mathematik** vorbereiten. Das Buch ist so konzipiert, dass es bereits zu Beginn der 9. Klasse zur Vorbereitung auf Klassenarbeiten und zur langfristigen Vorbereitung auf die Abschlussprüfung verwendet werden kann.

Gerade für alle Teilnehmer*innen einer zentral gestellten Prüfung ist das **Grundlagenwissen** besonders wichtig. Denn in der Prüfung geht es nicht um irgendwelche Spezialkenntnisse, die du vielleicht gut beherrschst, sondern die Aufgaben werden auf einem möglichst breiten Grundwissen aufbauen. Es geht vor der Prüfung also um eine Gesamtwiederholung.

- ▶ Daher beginnt dieses Buch mit einem ausführlichen **Trainingsteil**. Im ersten Kapitel werden die wichtigsten Themen der 7. bis 9. Klasse kurz wiederholt, die Kapitel 2 bis 9 behandeln intensiv sämtliche prüfungsrelevanten Bereiche. Zu jedem Thema findest du passende Übungsaufgaben, insgesamt über 180, anhand derer du überprüfen kannst, ob du den Stoff sicher beherrschst.
- ▶ Du kannst **selbstständig** mit dem Buch arbeiten, weil alle Themen auch anhand von Beispielaufgaben erklärt werden, die du dir auf jeden Fall anschauen solltest.
- ▶ In Kapitel 10 findest du **Vermischte Aufgaben**. Hier kannst du dein erworbene Wissen an komplexen, themenübergreifenden Aufgaben testen.
- ▶ Die schriftlichen **Original-Abschlussprüfungen zum Mittleren Schulabschluss 2017 bis 2019** bilden den Abschluss des Buches. Für deren Bearbeitung sind 135 Minuten Bearbeitungszeit vorgesehen, von denen maximal 45 Minuten für Teil I der Prüfung verwendet werden dürfen.

Zu allen Aufgaben gibt es **ausführliche Lösungen** in einem separaten Buch (Bestell-Nr. 11500L), die jeden Rechenschritt genau erklären. Dabei wird besonderer Wert auf die Lösungsansätze und Vorüberlegungen gelegt. Zur Veranschaulichung und dem besseren Verständnis der Lösungen helfen dir zahlreiche Skizzen.

Zuerst solltest du selbst die Lösung finden und dann mit dem Buch vergleichen. Nur was du dir selbst erarbeitet hast, bleibt im Gedächtnis und du lernst dazu. Halte dich deswegen konsequent daran, jede Aufgabe zunächst selbst zu rechnen.

Wenn du den Inhalt dieses Buches beherrschst, bist du bestens auf die Prüfung vorbereitet.

Sollten nach Erscheinen dieses Bandes noch wichtige Änderungen in der Abschluss-Prüfung vom Kultusministerium bekannt gegeben werden, findest du aktuelle Informationen dazu im Internet unter: www.stark-verlag.de/pruefung-aktuell

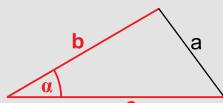
Wir wünschen dir für die Prüfung viel Erfolg!



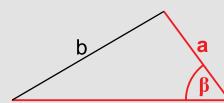
Jörg Collenburg

Merke**Kosinussatz****Kosinussatz**

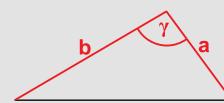
In jedem Dreieck gelten folgende Zusammenhänge:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras:

Ist der eingeschlossene Winkel 90° , wird der Kosinuswert 0 und man erhält:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Beispiele

1. Um die Länge eines Sees zu bestimmen, misst man die Strecken \overline{AB} , \overline{AC} und den Winkel BAC :

$$\overline{AB} = 350 \text{ m}; \overline{AC} = 168 \text{ m}; \angle BAC = 65^\circ$$

Wie lang ist der See?

Lösung:

Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bestimmt man die Länge der dritten Seite mit dem Kosinussatz.

$$x^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \angle BAC \quad | \sqrt{}$$

$$x = \sqrt{\overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos \angle BAC}$$

$$x = \sqrt{168^2 + 350^2 - 2 \cdot 168 \cdot 350 \cdot \cos 65^\circ}$$

$$x \approx 317,84$$

Der See ist ca. 318 m lang.

2. Berechne die Winkel im Dreieck mit den Seitenlängen $a=4,5 \text{ cm}$, $b=3,5 \text{ cm}$ und $c=4 \text{ cm}$. Konstruiere anschließend das Dreieck und überprüfe die Werte.

Lösung:

Bei 3 gegebenen Seiten muss man sich entscheiden, welchen der eingeschlossenen Winkel man zuerst berechnen möchte.

Berechnung von α mit dem Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad | -b^2 -c^2$$

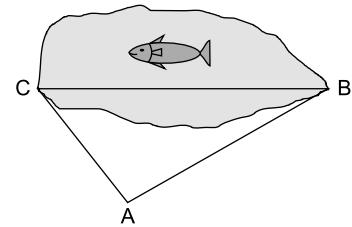
$$a^2 - b^2 - c^2 = -2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad | :(-2 \cdot b \cdot c)$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2 \cdot b \cdot c}$$

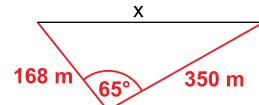
$$\cos \alpha = \frac{4,5^2 - 3,5^2 - 4^2}{-2 \cdot 3,5 \cdot 4}$$

$$\cos \alpha = 0,2857\dots$$

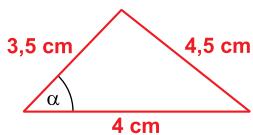
$$\alpha \approx 73,40^\circ$$



Planskizze:



Planskizze:



Berechnung von β mit dem Kosinussatz:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta & | - a^2 - c^2 \\ b^2 - a^2 - c^2 &= -2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta & | : (-2 \cdot a \cdot c) \\ \cos \beta &= \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2 \cdot a \cdot c} \\ \cos \beta &= \frac{3,5^2 - 4,5^2 - 4^2}{-2 \cdot 4,5 \cdot 4} \\ \cos \beta &= 0,6666... \\ \beta &\approx 48,19^\circ \end{aligned}$$

oder

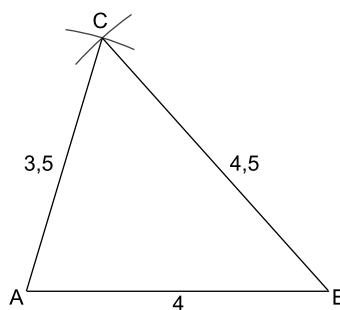
Berechnung von β mit dem Sinussatz:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} & | \cdot \sin \alpha & | \cdot \sin \beta \\ a \cdot \sin \beta &= b \cdot \sin \alpha & | : a \\ \sin \beta &= \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \\ \sin \beta &= \frac{3,5 \cdot \sin 73,40^\circ}{4,5} \\ \sin \beta &= 0,7453... \\ \beta &\approx 48,19^\circ \end{aligned}$$

Berechnung von γ mit der Winkelsumme:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \alpha - \beta \\ \gamma &= 180^\circ - 73,40^\circ - 48,19^\circ \\ \gamma &= 58,41^\circ \end{aligned}$$

Konstruktion des Dreiecks:



Konstruktionsbeschreibung:

- $c = \overline{AB} = 4$ cm zeichnen
- Kreisbogen um A mit $r = 3,5$ cm
- Kreisbogen um B mit $r = 4,5$ cm
- Schnittpunkt der Kreisbögen ist C

Winkel messen: $\alpha = 73^\circ$; $\beta = 48^\circ$; $\gamma = 59^\circ$

Die Winkelgrößen stimmen mit den berechneten Werten überein.



Interaktive Aufgaben



4. Seite berechnen
5. Winkel berechnen

Merke**Sinussatz oder Kosinussatz**

Sind von einem allgemeinen Dreieck drei Größen bekannt, sollte vor der Berechnung überlegt werden, welcher der beiden Sätze zu verwenden ist.

Der **Kosinussatz** wird verwendet, wenn folgende Größen gegeben sind:

- drei Seiten (**SSS**)
- zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (**SWS**)

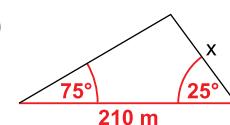
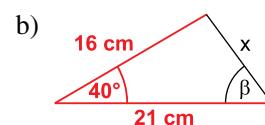
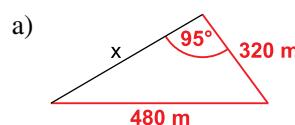
Der **Sinussatz** wird verwendet, wenn folgende Größen gegeben sind:

- zwei Seiten und einer der von den Seiten nicht eingeschlossenen Winkel (**SSW**)
- zwei Winkel und eine Seite (**WSW**); eventuell ist zuerst mithilfe der Winkelsumme der dritte Winkel zu berechnen

Beispiel

Sinussatz oder Kosinussatz?

Welchen Satz wendest du in den folgenden Fällen für die erste Berechnung an?

**Lösung:**

- a) Gegeben: SSW \rightarrow Sinussatz

$$\text{Ansatz: } \frac{480}{\sin 95^\circ} = \frac{320}{\sin \alpha}$$

Bestimme dann β über die Winkelsumme und x mit dem Sinus- oder Kosinussatz.
[Ergebnisse: $\alpha = 41,62^\circ$; $\beta = 43,38^\circ$; $x = 330,94\text{ m}$]

- b) Gegeben: SWS \rightarrow Kosinussatz

$$\text{Ansatz: } x^2 = 16^2 + 21^2 - 2 \cdot 16 \cdot 21 \cdot \cos 40^\circ$$

Bestimme dann β mit dem Sinus- oder Kosinussatz.
[Ergebnisse: $x = 13,50\text{ cm}$; $\beta = 49,63^\circ$]

- c) Gegeben: WSW \rightarrow Sinussatz mithilfe der Winkelsumme

Bestimme zunächst γ mithilfe der Winkelsumme: $\gamma = 180^\circ - 75^\circ - 25^\circ = 80^\circ$

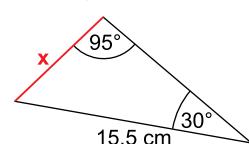
$$\text{Sinussatz: } \frac{210}{\sin 80^\circ} = \frac{x}{\sin 75^\circ}$$

[Ergebnis: $x = 205,97\text{ m}$]

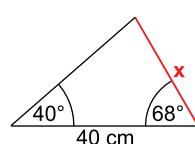
Aufgaben**127**

Berechne jeweils die Länge der Strecke x und den Flächeninhalt des Dreiecks.

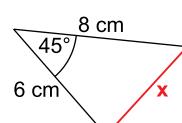
- a)



- b)



- c)

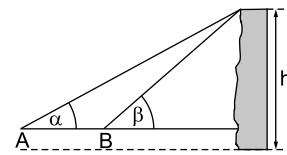
**128**

Stelle den Kosinussatz schrittweise nach $\cos \alpha$ um.

129

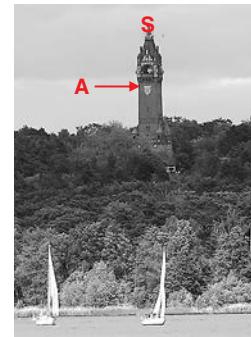
Zur Bestimmung der Höhe h einer Kletterwand werden mithilfe eines Messgeräts zwei Winkel gemessen. Das Messgerät steht dazu in 1,60 m Höhe über dem waagerechten Erdboden.

Strecke $\overline{AB} = 10 \text{ m}$; Winkel $\alpha = 42,4^\circ$; $\beta = 65,6^\circ$

**130**

Der Grunewaldturm steht auf dem Karlsberg am Ostufer der Havel bei Berlin. Die Aussichtsplattform A auf einer Turmhöhe von 36 m liegt 100 m über dem Wasserspiegel. Von einem Segelboot aus peilt man die Turmspitze S unter einem Höhenwinkel von $11,2^\circ$ und die Aussichtsplattform A unter einem Höhenwinkel von $9,5^\circ$ an. Die Luftlinie zwischen dem Segelboot und der Turmspitze S beträgt 612 m.

Fertige eine Skizze an und berechne die Höhe des Grunewaldturms. Vernachlässige dabei den Höhenunterschied vom Messpunkt im Boot zum Wasserspiegel.

**131**

Beim OstseeMan Triathlon in Glücksburg starten Jahr für Jahr im August über 1 500 Athleten auf der Langdistanz. Zur Vorbereitung hat ein Verein eine Schwimmstrecke in der Ostsee mit Bojen markiert (siehe Bild). Start und Ziel (S) befinden sich am Strand neben dem Schiffsanleger. Die Athleten müssen um die Bojen A und B außen herumschwimmen. Folgende Maße sind bekannt:

Winkel $SBA = 56^\circ$; Winkel $BAS = 96^\circ$; $\overline{BS} = 1600 \text{ m}$

Entspricht die Länge dieser Schwimmstrecke ($S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow S$) der Wettkampflänge von 3,8 km?



**Interaktive
Aufgaben**

- 6. Winkel berechnen in 2 Schritten
- 7. Feuer

Abschlussprüfung zum Erwerb des Mittleren Schulabschlusses
Schleswig-Holstein – Mathematik 2018

Heft 1 – A: Kurzformaufgaben

1 Punkt

- A1. Gib an, welche Zahl man zu der Zahl 3 addieren muss, um die Zahl –4 zu erhalten.
-

3 Punkte

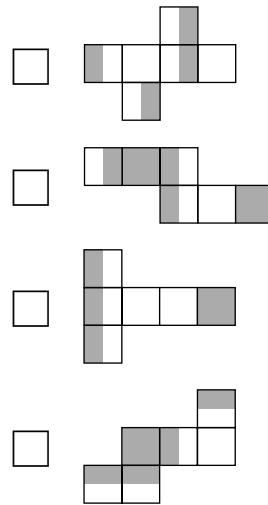
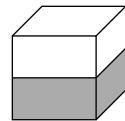
- A2. Die Form einiger Buchstaben des Alphabets ist symmetrisch. Gib jeweils einen Buchstaben an, für dessen geometrische Form die folgende Bedingung gilt:

- a) achsensymmetrisch: _____
b) punktsymmetrisch: _____
c) punktsymmetrisch und achsensymmetrisch: _____

1 Punkt

- A3. Ein Würfel wird zur Hälfte in Farbe getaucht.

Kreuze an, welches der folgenden Netze zu diesem Würfel gehört.



1 Punkt

- A4. Es wird berichtet, dass der Mathematiker Carl-Friedrich Gauß als Schüler seinen Mathematiklehrer ins Erstaunen versetzte. Carl-Friedrich sollte die natürlichen Zahlen von 1 bis 100 addieren. Er gab den relativ einfachen Term $101 \cdot 50$ als Ergebnis an. Dafür überlegte er Folgendes:

$$1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots, 50 + 51$$

Erläutere, wie Gauß auf diesen Term gekommen sein mag.

1 Punkt

- A5. Herr Evers fährt mit seinem Pkw zu seiner Arbeit in einen 100 km entfernten Ort. Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt dabei 75 km/h.

Kreuze an, wie viel Zeit er für die Fahrt zur Arbeit benötigt.

- 1 h 20 min 1 h 27 min 1 h 40 min 1 h 50 min

1 Punkt

- A6. Bei vielen Fernseh- und Computerbildschirmen verhalten sich Breite zu Höhe des sichtbaren Bereiches wie 16 zu 9.

Welche Maße hat ein solcher Bildschirm etwa, wenn seine Bildschirmdiagonale mit 55 cm angegeben ist?

- 32 cm × 18 cm 32 cm × 25 cm 48 cm × 27 cm 48 cm × 32 cm

1 Punkt

- A7. Für zwei Zahlen x und y soll gelten: $x \cdot y = 1$.

Kreuze an, welche der folgenden Aussagen wahr ist.

- Wenn x negativ ist, dann ist y auch negativ.
 Wenn x größer als 1 ist, dann ist auch y größer als 1.
 Weder x noch y können negativ sein.
 Wenn x kleiner als 1 ist, dann ist y negativ.

1 Punkt

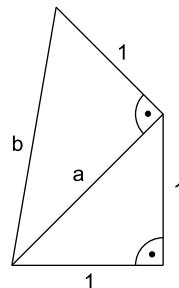
- A8. Helen möchte eine Spielekonsole für 400 € kaufen. Sie hat von ihrer Tante dafür 130 € als Zuschuss erhalten. Sie selbst kann monatlich 30 € ansparen.

Kreuze an, mit welcher Gleichung Helen berechnen kann, wie viele Monate sie sparen muss.

- $400 \text{ €} = 130 \text{ €} \cdot x + 30 \text{ €}$
 $400 \text{ €} = 130 \text{ €} + 30 \text{ €} \cdot x$
 $30 \text{ €} \cdot x - 130 \text{ €} = 400 \text{ €}$
 $130 \text{ €} \cdot x = 400 \text{ €} - 30 \text{ €}$

1 Punkt

- A9. Welche Länge hat die Strecke b ?



- $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{4}$ $\sqrt{5}$

© **STARK Verlag**

www.stark-verlag.de
info@stark-verlag.de

Der Datenbestand der STARK Verlag GmbH
ist urheberrechtlich international geschützt.
Kein Teil dieser Daten darf ohne Zustimmung
des Rechteinhabers in irgendeiner Form
verwertet werden.

STARK